論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　　松下　浩大

論　文　題　目

Some results on cluster algebra theory and its application
(団代数の理論とその応用に関するいくつかの結果)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
岡田　聡一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
中西　知樹

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
林　孝宏

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
鈴木　浩志

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は団代数理論およびその応用に関する申請者の研究成果（一部に共同研究の成果も含む）をまとめたものである．

まず背景を簡単に説明する．団代数 (cluster algebra) は 2000 年ごろに Fomin と Zelevinsky によって導入された可換代数のクラスである．団代数はルート系と密接に関連しているが，ルート系と同じく数学のさまざまな分野に横断的，普遍的に現れる代数的・組合せ論的構造であることが次第に明らかになり，現在多くの分野の研究者により活発に研究されている．比較的最近の団代数理論の重要な進展として，Gross–Hacking–Keel–Kontsevich (2018) による，ホモロジカルミラー対称性における散乱図 (scattering diagram) の手法の導入と，散乱図を用いた Laurent 正値性予想などの団代数理論における重要予想の解決が挙げられる．また，団代数理論の 1 つの応用として，Beineke–Brüstle–Hille (2011), Lampe (2016) は，19 世紀以来深く研究されている Markov 方程式の整数解の変換が団代数の変異により記述されることを明らかにし，古典的な結果に新しい知見を与えた．以上の 2 つが本研究の出発点となる．

以下では，本論文における主要な結果を述べる．

第 1 部はランク 2 のアフィン型団散乱図に関するもので，申請者による単独研究の結果である．一般に，団代数の初期交換行列 B からある構造群 G が定まり，この群の元の幾何学的な分解を用いて団散乱図という幾何的・代数的対象が定まる．これにより，もともとは変異を用いて定義された団代数（あるいはその基盤概念である団パターン）の構造を群の関係式というより代数的な観点から解析することが可能となる．団散乱図で最も簡単で非自明なものは，ランク 2 のアフィン型（$A_1^{(1)}$ 型および $A_2^{(2)}$ 型）である．例えば，$A_1^{(1)}$ 型の場合，団散乱図は二重対数元 (dilogarithm element) と呼ばれる構造群の元 $[\mathbf{n}]$ に関する整合関係式

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^2\cdots\prod_{j=0}^{\infty}\begin{bmatrix}2^j\\2^j\end{bmatrix}^{2^{2-j}}\cdots\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$

で表される．この関係式は，箙の表現論 (Reineke (2010)) やミラー対称性の文脈 (Dimofte–Gukov–Soibelman (2010)) で得られた量子二重対数関数の関係式と一致するだけでなく，団代数の変異の極限による導出 (Reading (2020)) も知られている．一方，団散乱図の任意の整合関係式は二重対数元の五角関係式から得られることが知られている (Nakanishi (2023))．以上の背景のもとで，申請者はこれらの整合関係式が実際に五角関係式から導出されることを具体的に示した．申請者の証明は，既知の導出よりも簡明な代数的導出を与えているとともに，これらの関係式の代数的起源を明白にしている．これは団代数理論における基本的かつ重要な結果として位置付けられるものである．以上の結果は arXiv (2021) において公表済である．

第 2 部は Diophantine 方程式への団代数理論の応用に関するもので，行田康晃氏との

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

共同研究の結果である．Markov 方程式とは

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

で与えられる Diophantine 方程式である．Markov 方程式の正の整数解 (x, y, z) から変換 $((y^2 + z^2)/x, y, z)$（とその置換）によって新しい正の整数解 (x', y', z') が得られ，基本解 $(1, 1, 1)$ からこの変換を用いることですべての正の整数解が得られることがよく知られている．実は，この変換はランク 3 のある団代数の変異式と一致し，この変換の整数性および正値性は団代数の Laurent 現象および Laurent 正値性の帰結として理解することができる．一方．団代数の拡張として一般団代数というものが Chekhov–Shapiro (2014) によって導入され，行田 (2021) は方程式

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 12xyz$$

の正の整数解が，あるランク 3 の一般団代数の変異により記述され，Markov 方程式と同様の性質を持つことを示した．申請者たちは，さらなる一般化として，任意の正整数 k_1, k_2, k_3 に対して，方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k_1yz + k_2zx + k_3xy = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz \qquad (*)$$

を見出し，この一般化についても上述の結果が拡張できることを示している．この研究の核心部分は，ある一般団代数に対して変異で不変な方程式 $(*)$ 自体を見つけることにあるが，共同研究において申請者がこの部分について特に大きな貢献をしたことを予備審査委員会では確認している．以上の結果は Electron. J. Combin. (2023) からすでに出版されている．

以上のように, 本論文は団代数の基礎と応用に対する重要な知見を与えるものであり, 学位論文として十分な内容を備えている．また，2024 年 1 月 30 日に本論文に関する公開学位審査セミナーを行い，本論文の主要結果が非専門家にも伝わるように工夫された講演とその後の質疑応答の内容から，申請者が博士の学位を取得するに足る学識を有することを確認した．

これらの理由により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．