測度論的位置解析の試み

partially based on an ongoing work
M. Izumi, R. Kobayashi and P. Lin, "Riemann-Hurwitz Approach to Nevanlinna Theory, the Ahlfors-Yamanoi LLD and Measure Concentration Phenomenon"

小林亮一

24 March 2023, 最終講義 @ 名古屋大学

• 今子有大樹。患其無用。何不樹之於無可有鄉。廣漠之野。彷徨乎無為其側。逍遥乎寝臥其下。（莊子）

• God created the integers ; everything else is man-made. (Leopold Kronecker)

• God created infinity, and man, unable to understand infinity, had to invent finite sets. (Gian-Carlo Rota)

発端

発端

定理 (1)

可分な無限次元 *Banach* 空間における平行移動不変かつ局所有限な *Borel* 測度は自明である．

（証明：ℓ^2 の場合："直交補空間" をとるプロセスが終わらない．一般の場合：Riesz の不等式.）

発端

定理 (1)

可分な無限次元 *Banach* 空間における平行移動不変かつ局所有限な *Borel* 測度は自明である．

（証明：ℓ^2 の場合："直交補空間" をとるプロセスが終わらない．一般の場合：Riesz の不等式.）

素朴に考えれば

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{euc}}([0,1]^n) = 1, \quad \mathrm{Vol}_{\mathrm{euc}}(B^n(\frac{1}{2})) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

だからだが，この定理は自然の摂理である．

発端

定理 (1)

可分な無限次元 *Banach* 空間における平行移動不変かつ局所有限な *Borel* 測度は自明である．

（証明：ℓ^2 の場合："直交補空間" をとるプロセスが終わらない．一般の場合：Riesz の不等式.）

素朴に考えれば

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{euc}}([0,1]^n) = 1, \quad \mathrm{Vol}_{\mathrm{euc}}(B^n(\frac{1}{2})) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

だからだが，この定理は自然の摂理である．

だから次の問題意識が発生する（問題を考えたくなる）：

発端

定理 (1)

可分な無限次元 *Banach* 空間における平行移動不変かつ局所有限な *Borel* 測度は自明である．

（証明：ℓ^2 の場合："直交補空間" をとるプロセスが終わらない．一般の場合：Riesz の不等式.)

素朴に考えれば

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{euc}}([0,1]^n) = 1, \quad \mathrm{Vol}_{\mathrm{euc}}(B^n(\frac{1}{2})) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

だからだが，この定理は自然の摂理である．

だから次の問題意識が発生する（問題を考えたくなる）：

問題 (Basic Question)

有限次元の普通の幾何にこの定理の影があるはずだ．それを見つける数学はどんな数学か？

発端

発端

定理 (2 測度集中現象 Borel's Lemma)

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ は $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上の一様ランダムベクトルとする．このとき $\sqrt{n}X_1$ は $n \to \infty$ のときガウス分布に従う確率変数に弱収束する：

$$\mathbb{P}[\sqrt{n}X_1 \leq t] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

発端

定理 (2 測度集中現象 Borel's Lemma)

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ は $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上の一様ランダムベクトルとする．このとき $\sqrt{n}X_1$ は $n \to \infty$ のときガウス分布に従う確率変数に弱収束する：

$$\mathbb{P}[\sqrt{n}X_1 \leq t] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

定理 (1)+ 定理 (2) $\Rightarrow n \to \infty$ のとき，測度論的 sphere packing という概念が漸近的に well-defined になる．

発端

定理 (2 測度集中現象 Borel's Lemma)

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ は $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上の一様ランダムベクトルとする．このとき $\sqrt{n}X_1$ は $n \to \infty$ のときガウス分布に従う確率変数に弱収束する：

$$\mathbb{P}[\sqrt{n}X_1 \leq t] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

定理 (1)+ 定理 (2) $\Rightarrow n \to \infty$ のとき，測度論的 sphere packing という概念が漸近的に well-defined になる．

格子点に中心を持つボールの和集合が測度論的に全空間を近似する．これらのボールは disjoint ではないが，有界閉集合の体積をボールの体積の和でいくらでも近似できる．これは一例．もっと驚くべき例があるはず．

発端

定理 (2 測度集中現象 Borel's Lemma)

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ は $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上の一様ランダムベクトルとする．このとき $\sqrt{n}X_1$ は $n \to \infty$ のときガウス分布に従う確率変数に弱収束する：

$$\mathbb{P}[\sqrt{n}X_1 \le t] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

定理 (1)+ 定理 (2) $\Rightarrow n \to \infty$ のとき，測度論的 sphere packing という概念が漸近的に well-defined になる．

格子点に中心を持つボールの和集合が測度論的に全空間を近似する．これらのボールは disjoint ではないが，有界閉集合の体積をボールの体積の和でいくらでも近似できる．これは一例．もっと驚くべき例があるはず．

問題：こういう観察を有限次元幾何に射影したらどんな影が見える？

発端

定理 (2 測度集中現象 Borel's Lemma)

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ は $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上の一様ランダムベクトルとする．このとき $\sqrt{n}X_1$ は $n \to \infty$ のときガウス分布に従う確率変数に弱収束する：

$$\mathbb{P}[\sqrt{n}X_1 \le t] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

定理 (1)+ 定理 (2) $\Rightarrow$ $n \to \infty$ のとき，測度論的 sphere packing という概念が漸近的に well-defined になる．

格子点に中心を持つボールの和集合が測度論的に全空間を近似する．これらのボールは disjoint ではないが，有界閉集合の体積をボールの体積の和でいくらでも近似できる．これは一例．もっと驚くべき例があるはず．

問題：こういう観察を有限次元幾何に射影したらどんな影が見える？
衝撃的な例：[AS] K. Adiprasito and R. Sanyal, Whitney numbers of arrangements via measure concentration of intrinsic volumes, arXiv:1606.09412 [math.CO] Rota-Heron-Welsh conjecture の解決．

Basic Question と相性のいい議論の例

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

- E：楕円曲線．$L \to E$ を豊富直線束とする．$\mu \in \mathbb{G}(1, |mL|) \Leftrightarrow$ 射影 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$（$\deg(\mu) = 2d$ と仮定）．

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

- E：楕円曲線．$L \to E$ を豊富直線束とする．$\mu \in \mathbb{G}(1, |mL|) \Leftrightarrow$ 射影 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$（$\deg(\mu) = 2d$ と仮定）．

有理型写像 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$ は $E \overset{\wp_E}{\to} \mathbb{P}^1 \overset{rat}{\to} \mathbb{P}^1$ と分解する．これを Galois 被覆 $E \overset{d:1}{\to} E' \overset{\wp_{E'}}{\to} \mathbb{P}^1$ で近似する．

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

- E：楕円曲線．$L \to E$ を豊富直線束とする．$\mu \in \mathbb{G}(1, |mL|) \Leftrightarrow$ 射影 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$（$\deg(\mu) = 2d$ と仮定）．

有理型写像 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$ は $E \overset{\wp_E}{\to} \mathbb{P}^1 \overset{rat}{\to} \mathbb{P}^1$ と分解する．これを Galois 被覆 $E \overset{d:1}{\to} E' \overset{\wp_{E'}}{\to} \mathbb{P}^1$ で近似する．

分岐因子に対する Shiffman-Zelditch 収束定理（$\Leftarrow$ 測度論的 sphere packing）$\Rightarrow d$ が大きいほど精密な近似がとれる．

楕円曲線は自己被覆を持つ $\Rightarrow E' \overset{\exists d:1}{\to} E$（異なる大きさ同じ形）．

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

- E：楕円曲線．$L \to E$ を豊富直線束とする．$\mu \in \mathbb{G}(1, |mL|) \Leftrightarrow$ 射影 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$（$\deg(\mu) = 2d$ と仮定）．

有理型写像 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$ は $E \overset{\wp_E}{\to} \mathbb{P}^1 \overset{rat}{\to} \mathbb{P}^1$ と分解する．これを Galois 被覆 $E \overset{d:1}{\to} E' \overset{\wp_{E'}}{\to} \mathbb{P}^1$ で近似する．

分岐因子に対する Shiffman-Zelditch 収束定理（$\Leftarrow$ 測度論的 sphere packing）$\Rightarrow d$ が大きいほど精密な近似がとれる．

楕円曲線は自己被覆を持つ $\Rightarrow E' \overset{\exists d:1}{\to} E$（異なる大きさ同じ形）．

列 $\{E' \overset{d:1}{\to} E\}_d$ の GH 極限が楕円曲線の一意化 $\mathbb{C}^* \to E$ を与える．

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

- E：楕円曲線．$L \to E$ を豊富直線束とする．$\mu \in \mathbb{G}(1, |mL|) \Leftrightarrow$ 射影 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$（$\deg(\mu) = 2d$ と仮定）．
有理型写像 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$ は $E \overset{\wp_E}{\to} \mathbb{P}^1 \overset{rat}{\to} \mathbb{P}^1$ と分解する．これを Galois 被覆 $E \overset{d:1}{\to} E' \overset{\wp_{E'}}{\to} \mathbb{P}^1$ で近似する．
分岐因子に対する Shiffman-Zelditch 収束定理（$\Leftarrow$ 測度論的 sphere packing）$\Rightarrow$ d が大きいほど精密な近似がとれる．
楕円曲線は自己被覆を持つ $\Rightarrow$ $E' \overset{\exists d:1}{\to} E$（異なる大きさ同じ形）．
列 $\{E' \overset{d:1}{\to} E\}_d$ の GH 極限が楕円曲線の一意化 $\mathbb{C}^* \to E$ を与える．
- $d \to \infty$ のとき

$$\mathfrak{M}(\tau(E')) = \frac{1}{|F|_{\omega_{\mathrm{hyp}}}} \int_F \Re(z) \frac{dz d\bar{z}}{\Im(z)^2} = \infty$$

の反映（F はガウス基本領域）を観察していると解釈できる．

Basic Question と相性のいい議論の例

観察

ランダム射影と楕円曲線の一意化（議論 (E)）．

- E : 楕円曲線．$L \to E$ を豊富直線束とする．$\mu \in \mathbb{G}(1, |mL|) \Leftrightarrow$ 射影 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$（$\deg(\mu) = 2d$ と仮定）．
有理型写像 $\mu : E \to \mathbb{P}^1$ は $E \stackrel{\wp_E}{\to} \mathbb{P}^1 \stackrel{rat}{\to} \mathbb{P}^1$ と分解する．これを Galois 被覆 $E \stackrel{d:1}{\to} E' \stackrel{\wp_{E'}}{\to} \mathbb{P}^1$ で近似する．
分岐因子に対する Shiffman-Zelditch 収束定理（$\Leftarrow$ 測度論的 sphere packing）$\Rightarrow$ d が大きいほど精密な近似がとれる．
楕円曲線は自己被覆を持つ $\Rightarrow$ $E' \stackrel{\exists d:1}{\to} E$（異なる大きさ同じ形）．
列 $\{E' \stackrel{d:1}{\to} E\}_d$ の GH 極限が楕円曲線の一意化 $\mathbb{C}^* \to E$ を与える．
- $d \to \infty$ のとき

$$\mathfrak{M}(\tau(E')) = \frac{1}{|F|_{\omega_{\mathrm{hyp}}}} \int_F \Re(z) \frac{dzd\bar{z}}{\Im(z)^2} = \infty$$

の反映（F はガウス基本領域）を観察していると解釈できる．
- 議論 (E) の類似として議論 ($\mathbb{C}^*$) も考えられる．

測度論的位置解析を考える動機（小林双曲性）

測度論的位置解析を考える動機（小林双曲性）

- 小林双曲性．測度双曲性．距離空間と測度論の有効性（小林昭七）．

測度論的位置解析を考える動機（小林双曲性）

- 小林双曲性．測度双曲性．距離空間と測度論の有効性（小林昭七）．
- 代数的極小曲面 M のガウス写像の値分布問題を基本群の問題と思うアプローチでは，極限 $\lim_{r\to 1} Z(r) = \sum_{\alpha\in\pi_1(M)} \frac{\mathrm{Area}_{\mathrm{FS}}(F_\alpha \cap \mathbb{D}(r))}{\mathrm{Area}_{\mathrm{hyp}}(\mathbb{D}(r))}$ が問題になる．$r \to 1$ のとき，普遍被覆面 $\mathbb{D}$ に働く自由 Fuchs 群 $\pi_1(M)$ の基本領域 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\pi_1(M)}$ と $\mathbb{D}(r)$ の位置解析を行う必要がある．
$r \to 1$ とすると関わる基本領域の個数 $\to \infty$ ゆえ測度論的になる．

測度論的位置解析を考える動機（小林双曲性）

- 小林双曲性．測度双曲性．距離空間と測度論の有効性（小林昭七）．
- 代数的極小曲面 M のガウス写像の値分布問題を基本群の問題と思うアプローチでは，極限 $\lim_{r\to 1} Z(r) = \sum_{\alpha\in\pi_1(M)} \frac{\mathrm{Area}_{\mathrm{FS}}(F_\alpha \cap \mathbb{D}(r))}{\mathrm{Area}_{\mathrm{hyp}}(\mathbb{D}(r))}$ が問題になる．$r \to 1$ のとき，普遍被覆面 $\mathbb{D}$ に働く自由 Fuchs 群 $\pi_1(M)$ の基本領域 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\pi_1(M)}$ と $\mathbb{D}(r)$ の位置解析を行う必要がある．
  $r \to 1$ とすると関わる基本領域の個数 $\to \infty$ ゆえ測度論的になる．
- Nevanlinna 理論の第二主予想を，射影代数多様体 X^n への正則曲線の Wronskian を定義する問題と思うアプローチでは，存在しない射影構造をあるかのように思える設定をどう作るかが問題になる．そこで豊富直線束の冪 $\to \infty$ の時，小平埋め込み $X \to |mL|^*$ に付随するランダム射影の集まり $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu\in\mathbb{G}(n,|mL|)}$ から誘導される分岐つきランダム射影構造を考えて，冪が巨大という設定で正則曲線とランダム分岐因子の位置解析を測度論的に行いたくなる．

測度論的位置解析を考える動機（小林双曲性）

- 小林双曲性．測度双曲性．距離空間と測度論の有効性（小林昭七）．
- 代数的極小曲面 M のガウス写像の値分布問題を基本群の問題と思うアプローチでは，極限 $\lim_{r\to 1} Z(r) = \sum_{\alpha\in\pi_1(M)} \frac{\mathrm{Area}_{\mathrm{FS}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))}{\mathrm{Area}_{\mathrm{hyp}}(\mathbb{D}(r))}$ が問題になる．$r\to 1$ のとき，普遍被覆面 $\mathbb{D}$ に働く自由 Fuchs 群 $\pi_1(M)$ の基本領域 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\pi_1(M)}$ と $\mathbb{D}(r)$ の位置解析を行う必要がある．
  $r\to 1$ とすると関わる基本領域の個数 $\to\infty$ ゆえ測度論的になる．
- Nevanlinna 理論の第二主予想を，射影代数多様体 X^n への正則曲線の Wronskian を定義する問題と思うアプローチでは，存在しない射影構造をあるかのように思える設定をどう作るかが問題になる．そこで豊富直線束の冪 $\to\infty$ の時，小平埋め込み $X\to|mL|^*$ に付随するランダム射影の集まり $\{\mu : X\to\mathbb{P}^n\}_{\mu\in\mathbb{G}(n,|mL|)}$ から誘導される分岐つきランダム射影構造を考えて，冪が巨大という設定で正則曲線とランダム分岐因子の位置解析を測度論的に行いたくなる．
- これらの問題を解こうとすると $\mathbb{G}(n,|mL|)$ を像への双有理写像 $\mathbb{G}(n,|mL|)\to|F_m|$ ($F_m=[R_\mu]$ は分岐因子によって定められる X 上の正則直線束）により $|F_m|$ に拡張する必要が生じる（非線形射影も考える）．

測度論的位置解析を考える動機（小林非双曲性）

測度論的位置解析を考える動機（小林非双曲性）

- 小林双曲性（cf. 上記の二つの問題）が測度論的位置解析を動機づけるのであれば，その逆である小林非双曲性もそうだろう．

測度論的位置解析を考える動機（小林非双曲性）

- 小林双曲性（cf. 上記の二つの問題）が測度論的位置解析を動機づけるのであれば，その逆である小林非双曲性もそうだろう．
- 代数的双曲性の概念 (Demailly).

測度論的位置解析を考える動機（小林非双曲性）

- 小林双曲性（cf. 上記の二つの問題）が測度論的位置解析を動機づけるのであれば，その逆である小林非双曲性もそうだろう．
- 代数的双曲性の概念 (Demailly).

  射影代数多様体 X が**代数的双曲性**を持つとは，正数 ε で，任意の既約曲線 $C \subset X$ に対し $-\chi(C) = 2g(C) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C)$ が成り立つことを言う（ω は Kähler 計量）．

測度論的位置解析を考える動機（小林非双曲性）

- 小林双曲性（cf. 上記の二つの問題）が測度論的位置解析を動機づけるのであれば，その逆である小林非双曲性もそうだろう．

- 代数的双曲性の概念 (Demailly).

  射影代数多様体 X が代数的双曲性を持つとは，正数 ε で，任意の既約曲線 $C \subset X$ に対し $-\chi(C) = 2g(C) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C)$ が成り立つことを言う（ω は Kähler 計量）．

- 非双曲的と考えられる Calabi-Yau 多様体で，いくらでも次数の高い楕円曲線の族，Fano 多様体ではいくらでも次数の高い有理曲線の族が見つかれば，非双曲性に関して何らか面白い帰結が得られるはずである．

測度論的位置解析を考える動機（小林非双曲性）

- 小林双曲性（cf. 上記の二つの問題）が測度論的位置解析を動機づけるのであれば，その逆である小林非双曲性もそうだろう．

- 代数的双曲性の概念 (Demailly).

  射影代数多様体 X が代数的双曲性を持つとは，正数 ε で，任意の既約曲線 $C \subset X$ に対し $-\chi(C) = 2g(C) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C)$ が成り立つことを言う（ω は Kähler 計量）．

- 非双曲的と考えられる Calabi-Yau 多様体で，いくらでも次数の高い楕円曲線の族，Fano 多様体ではいくらでも次数の高い有理曲線の族が見つかれば，非双曲性に関して何らか面白い帰結が得られるはずである．

- 議論 (E)($\mathbb{C}^*$) から自然に生じる問題：Calabi-Yau 多様体，Fano 多様体への full-rank entire holomorphic map をどう構成するか？反標準因子はその観点からどう理解できるか？

測度集中現象に基づく測度論的位置解析

測度集中現象に基づく測度論的位置解析

設定：$L \to X$:豊富直線束，$X \to |mL|^*$:小平埋め込み，$\mu \in \mathbb{G}(n, |mD|)$: ランダム n-dim 部分線形系．m が大きいと巨大な射影空間やグラスマン多様体が出現する．これらの巨大空間の測度論的な性質から何がわかるか？

測度集中現象に基づく測度論的位置解析

設定：$L \to X$:豊富直線束，$X \to |mL|^*$:小平埋め込み，$\mu \in \mathbb{G}(n, |mD|)$: ランダム n-dim 部分線形系．m が大きいと巨大な射影空間やグラスマン多様体が出現する．これらの巨大空間の測度論的な性質から何がわかるか？

次の定理は測度集中現象 (Borel's Lemma) の一つの現れである：

測度集中現象に基づく測度論的位置解析

設定：$L \to X$:豊富直線束，$X \to |mL|^*$:小平埋め込み，$\mu \in \mathbb{G}(n, |mD|)$: ランダム n-dim 部分線形系．m が大きいと巨大な射影空間やグラスマン多様体が出現する．これらの巨大空間の測度論的な性質から何がわかるか？

次の定理は測度集中現象 (Borel's Lemma) の一つの現れである：

定理 (A（大偏差原理型不等式）)

$\varepsilon > 0$: 勝手な正数．$X^n (n \geq 2)$: 非特異射影代数多様体．$C \subset X$:非特異既約曲線，$\deg_{mL}(C) = O(m^n)$．巨大だが巨大すぎない整数 m を例えば $m \approx \varepsilon^{-\frac{2+\delta}{n}}$ にとる（$\delta > 0$ は ε, m に依存しない小さい正数）．このとき $\exists \mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ s.t. C と R_μ は $(R_\mu)_{\mathrm{reg}}$ で交わり，交点における角 $\measuredangle([\nu_p C], [\nu_p R_\mu])$（$\nu_p$：直交補空間をとる操作，$[\nu_p R_\mu] := \mathrm{Ker}(d\mu)_p$）の直角からの差は ε より小さい．実際，このような μ は Haar 測度に関して $\mathbb{G}(n, |mL|)$ の大部分を占める．

測度論的位置解析の典型的な例

測度論的位置解析の典型的な例

次の定理は定理 A からの帰結である：

測度論的位置解析の典型的な例

次の定理は定理 A からの帰結である：

定理 (B （測度論的位置解析）)

$\varepsilon > 0$: 勝手な正数．$m \approx \varepsilon^{-\frac{2+\delta}{n}}$: 定理 A と同様．
(1) X^n $(n \geq 2)$: 非特異射影代数多様体. $C \subset X$:非特異既約曲線, $\deg_{mL}(C) = O(m^n)$．このとき $\exists \mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ で以下の性質を満たすものが在る :

(i) C と R_μ は $(R_\mu)_{\mathrm{reg}}$ で交わる．

(ii) $\forall p \in C \cap R_\mu$ において，角 $\measuredangle([\nu_p C], [\nu_p R_\mu])$ と直角の違いは ε より小さい．

(2) *(1)* と同じ状況で，射影 $\mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ を C^∞ に改変して $(R_\mu)_{\mathrm{reg}}$ における C と R_μ の全ての交点で角 $\measuredangle([\nu_p C], [\nu_p R_\mu])$ を直角，即ち $[\nu_p R_\mu] = \mathrm{Ker}(d\mu)_p$ にできる. もっと強く，実は初めから問題の角は直角である（不等式 $\Rightarrow$ 等式という整数論的な議論が可能である！）．

測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体における楕円曲線

定理 (C)

(X, L) を n 次元射影的 *Calabi-Yau* 多様体とその上の豊富直線束，$l \subset \mathbb{P}^n$ を直線とする．$\mathbb{G}(n, |mL|)$ を $|F_m|$ に拡張する．
仮定：$\exists \mu \in |F_m|$ *s.t.* l は $(n-1)$ 点 $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ で B_μ に接し（条件 $(\dagger)$），他のすべての B_μ との交わりは横断的．
結論：仮定は実現可能であり，この仮定が実現すれば $C = \mu^* l \subset X$ の正規化は楕円曲線である．

定理 (C)

(X, L) を n 次元射影的 *Calabi-Yau* 多様体とその上の豊富直線束，$l \subset \mathbb{P}^n$ を直線とする．$\mathbb{G}(n, |mL|)$ を $|F_m|$ に拡張する．
仮定：$\exists \mu \in |F_m|$ *s.t.* l は $(n-1)$ 点 $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ で B_μ に接し（条件 (†)），他のすべての B_μ との交わりは横断的．
結論：仮定は実現可能であり，この仮定が実現すれば $C = \mu^* l \subset X$ の正規化は楕円曲線である．

理由：定理 A,B と Hörmander's L^2-method for $\overline{\partial}$-eq. を組み合わせると，$\mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ を動かして仮定を満たすような曲線 $C = \mu^* l$ を見つけられる．$(\mu^*\zeta|_C)_0 = C \cap R_\mu$, $(\mu^*\zeta|_C)_\infty = C \cap \mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1}$ だから
$\deg(\mu^*\zeta|_C) = (\mu^*\zeta|_C)_0 - (\mu^*\zeta|_C)_\infty = \deg(C \cap R_\mu) - \deg(C \cap \mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1}) = \deg((R_\mu - \mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1})|_C) = \deg(K_X|_C) = \deg(\mathcal{O}_X|_C) = 0$（$\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式 $K_X = R_\mu - \mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1}$）．この式に
$\mu|_C : C \to l = \mathbb{P}^1$ に対する Riemann-Hurwitz 公式を適用すると
$-\chi(C) = 0$ がわかる． □

Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性

Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性

定理 C により，射影的 Calabi-Yau 多様体にはいくらでも次数の高い楕円曲線がある．これは Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性を意味する．ここから面白い帰結を得るために定理 C の族バージョンを考える：

Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性

定理 C により，射影的 Calabi-Yau 多様体にはいくらでも次数の高い楕円曲線がある．これは Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性を意味する．ここから面白い帰結を得るために定理 C の族バージョンを考える：

定理 (D)

定理 *C* で見つかる楕円曲線を発生させるデータ $\mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ と l のうち，μ を動かすことにより，射影多様体 $V^{n-1} \subset |F_m|$ を勝手にとると，ある有限集合 $\subset V^{n-1}$ 上で $\{C_t\}_{t \in U}$ は定理 *C* の楕円曲線たちの有限族である．$m \to \infty$ とすると有限族に含まれる楕円曲線の個数 $\to \infty$ で際限なく大きくなり *pointed Gromov-Hausdorff* 収束を考えられる．

Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性

定理 C により，射影的 Calabi-Yau 多様体にはいくらでも次数の高い楕円曲線がある．これは Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性を意味する．ここから面白い帰結を得るために定理 C の族バージョンを考える：

定理 (D)

定理 *C* で見つかる楕円曲線を発生させるデータ $\mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ と l のうち，μ を動かすことにより，射影多様体 $V^{n-1} \subset |F_m|$ を勝手にとると，ある有限集合 $\subset V^{n-1}$ 上で $\{C_t\}_{t \in U}$ は定理 *C* の楕円曲線たちの有限族である．$m \to \infty$ とすると有限族に含まれる楕円曲線の個数 $\to \infty$ で際限なく大きくなり *pointed Gromov-Hausdorff* 収束を考えられる．

条件 (†)$\Rightarrow$ 有限族．議論 (E) は定理 C の族バージョンに拡張できて，次の結果を導く．V^{n-1} として $\mathbb{P}^{n-1}$ や A^{n-1} (Abel 多様体) をとるといい：

Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性

定理 C により，射影的 Calabi-Yau 多様体にはいくらでも次数の高い楕円曲線がある．これは Calabi-Yau 多様体の代数的非双曲性を意味する．ここから面白い帰結を得るために定理 C の族バージョンを考える：

定理 (D)

定理 *C* で見つかる楕円曲線を発生させるデータ $\mu \in \mathbb{G}(n, |mL|)$ と l のうち，μ を動かすことにより，射影多様体 $V^{n-1} \subset |F_m|$ を勝手にとると，ある有限集合 $\subset V^{n-1}$ 上で $\{C_t\}_{t \in U}$ は定理 *C* の楕円曲線たちの有限族である．$m \to \infty$ とすると有限族に含まれる楕円曲線の個数 $\to \infty$ で際限なく大きくなり *pointed Gromov-Hausdorff* 収束を考えられる．

条件 (†)⇒ 有限族．議論 (E) は定理 C の族バージョンに拡張できて，次の結果を導く．V^{n-1} として $\mathbb{P}^{n-1}$ や A^{n-1} (Abel 多様体) をとるといい：

定理 (E （Calabi-Yau 多様体への full-rank 正則写像）)

X : 射影的 *Calabi-Yau* 多様体．このとき，超越的な *full-rank* 正則写像（全射）$F : \mathbb{C}^* \times V^{n-1} \to X$ が存在する．

Fano 多様体の代数的非双曲性

Fano 多様体の代数的非双曲性

- Fano 多様体では議論 (E) を議論 ($\mathbb{C}^*$) に置き換えて族バージョン化.

Fano 多様体の代数的非双曲性

- Fano 多様体では議論 (E) を議論 ($\mathbb{C}^*$) に置き換えて族バージョン化.

定理 (F（定理 C の Fano バージョン）)

X : Fano 多様体. $l \subset \mathbb{P}^{n-1}$ は直線.
仮定：$\exists \mu \in |F_m|$ s.t. l は $(n-1)$ 点 $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ で B_μ に接し（条件 (†)），他の全ての交点は横断的.
結論：この仮定は実現可能. 仮定が実現 $\Rightarrow C = \mu^* l \subset X$ は有理曲線である.

Fano 多様体の代数的非双曲性

- Fano 多様体では議論 (E) を議論 ($\mathbb{C}^*$) に置き換えて族バージョン化．

定理 (F（定理 C の Fano バージョン）)

X : Fano 多様体．$l \subset \mathbb{P}^{n-1}$ は直線.
仮定：$\exists \mu \in |F_m|$ s.t. l は $(n-1)$ 点 $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ で B_μ に接し（条件 $(\dagger)$），他の全ての交点は横断的．
結論：この仮定は実現可能．仮定が実現 $\Rightarrow C = \mu^* l \subset X$ は有理曲線である．

Fano 多様体の代数的非双曲性

- Fano 多様体では議論 (E) を議論 ($\mathbb{C}^*$) に置き換えて族バージョン化.

定理 (F（定理 C の Fano バージョン）)

X : Fano 多様体. $l \subset \mathbb{P}^{n-1}$ は直線.
仮定：$\exists \mu \in |F_m|$ s.t. l は $(n-1)$ 点 $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ で B_μ に接し（条件 (†)），他の全ての交点は横断的.
結論：この仮定は実現可能．仮定が実現 $\Rightarrow C = \mu^* l \subset X$ は有理曲線である.

CY の場合と同様，定理 F のファミリーバージョン：際限なく増大する有理曲線の有限族を構成できる．その有限族の pointed GH 極限をとる.
V^{n-1} として A^{n-1} を取るのがいいと思う.

定理 (G（定理 D の Fano バージョン）)

仮定：X : Fano 多様体.
結論：反標準因子 D_X と，超越的な full-rank 正則写像
$F : \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^{n-1} \to X \setminus D_X$ が存在する.

Nevanlinna 理論

Nevanlinna 理論

- ランダム射影 $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu \in \mathbb{G}(n,|mL|)}$ の方法で更なる面白い帰結を得ようとする（例えば X が一般型の場合とか混合型の場合に何か言いたい）と，Nevanlinna 理論の第二主定理が必要になる（と思う）．

Nevanlinna 理論

- ランダム射影 $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu \in \mathbb{G}(n,|mL|)}$ の方法で更なる面白い帰結を得ようとする（例えば X が一般型の場合とか混合型の場合に何か言いたい）と，Nevanlinna 理論の第二主定理が必要になる（と思う）.
- Griffiths-Lang 予想：X：非特異射影代数多様体，D：snc 因子，ε：任意の正数，E：任意の豊富直線束.
  $\exists Z = Z_{X,D,\varepsilon,E} \subset X$：代数的真部分集合 s.t. $\forall f : \mathbb{C} \to X$：正則曲線に対し，もし $f(\mathbb{C}) \not\subset Z \Rightarrow$
  $m_{f,D}(r) + N_{f,\mathrm{Ram}}(r) \leq T_{f,-K_X}(r) + \varepsilon T_{f,E}(r) \,\|.$

Nevanlinna 理論

- ランダム射影 $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu \in \mathbb{G}(n,|mL|)}$ の方法で更なる面白い帰結を得ようとする（例えば X が一般型の場合とか混合型の場合に何か言いたい）と，Nevanlinna 理論の第二主定理が必要になる（と思う）．
- Griffiths-Lang 予想：X : 非特異射影代数多様体，D : snc 因子，ε : 任意の正数，E : 任意の豊富直線束．
$\exists Z = Z_{X,D,\varepsilon,E} \subset X$: 代数的真部分集合 s.t. $\forall f : \mathbb{C} \to X$: 正則曲線に対し，もし $f(\mathbb{C}) \not\subset Z \Rightarrow$
$m_{f,D}(r) + N_{f,\mathrm{Ram}}(r) \leq T_{f,-K_X}(r) + \varepsilon T_{f,E}(r) \,\|$.
- X に射影構造がないと，K_X^{-1} 値正則曲線のゼロ切断に関する個数関数としては，分岐個数関数 $N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ を定義できない（次ページ）．したがって「この形では定義できない分岐個数関数を，何らかの方法で定義できる枠組みをどうやって構築するか」が，GL 予想の解決への鍵である（と思う）．

Nevanlinna 理論

- ランダム射影 $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu \in \mathbb{G}(n,|mL|)}$ の方法で更なる面白い帰結を得ようとする（例えば X が一般型の場合とか混合型の場合に何か言いたい）と，Nevanlinna 理論の第二主定理が必要になる（と思う）.

- Griffiths-Lang 予想：X：非特異射影代数多様体，D：snc 因子，ε：任意の正数，E：任意の豊富直線束.
$\exists Z = Z_{X,D,\varepsilon,E} \subset X$：代数的真部分集合 s.t. $\forall f : \mathbb{C} \to X$：正則曲線に対し，もし $f(\mathbb{C}) \not\subset Z \Rightarrow$
$m_{f,D}(r) + N_{f,\mathrm{Ram}}(r) \leq T_{f,-K_X}(r) + \varepsilon T_{f,E}(r) \,\|.$

- X に射影構造がないと，K_X^{-1} 値正則曲線のゼロ切断に関する個数関数としては，分岐個数関数 $N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ を定義できない（次ページ）. したがって「この形では定義できない分岐個数関数を，何らかの方法で定義できる枠組みをどうやって構築するか」が，GL 予想の解決への鍵である（と思う）.

- 成功例：Brotbek：Demailly ジェットタワーに Wronskian イデアル層を構成. ⇒ 小林予想の解決. [B] D. Brotbek, On the hyperbolicity of general hypersurfaces, Publ. math. de l'IHES, 126 (2017) 1-34.

$N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ へのランダム分岐つき射影構造アプローチ

$N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ へのランダム分岐つき射影構造アプローチ

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$:線形非退化な正則曲線 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n$ の射影構造を使うとロンスキアン $W(f) = \det(f', f'', \ldots, f^{(n)})$ は $K_{\mathbb{P}^n}^{-1}$-値正則曲線である.

$N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ へのランダム分岐つき射影構造アプローチ

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$:線形非退化な正則曲線 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n$ の射影構造を使うとロンスキアン $W(f) = \det(f', f'', \ldots, f^{(n)})$ は $K_{\mathbb{P}^n}^{-1}$-値正則曲線である.
- ランダム射影 : D を大変豊富と仮定して，完備線型系 $\{|mD|\}_{m=1,2,\ldots}$ の列に対応する小平埋め込み $\mu : X \overset{|mD|}{\to} \mathbb{P}^N = |mD|^*$ の埋め込み次元 N は $O(m^n)$ のオーダーで増大する.

$N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ へのランダム分岐つき射影構造アプローチ

- $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n$:線形非退化な正則曲線 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n$ の射影構造を使うとロンスキアン $W(f)=\det(f',f'',\dots,f^{(n)})$ は $K_{\mathbb{P}^n}^{-1}$-値正則曲線である．
- ランダム射影： D を大変豊富と仮定して，完備線型系 $\{|mD|\}_{m=1,2,\dots}$ の列に対応する小平埋め込み $\mu:X\overset{|mD|}{\to}\mathbb{P}^N=|mD|^*$ の埋め込み次元 N は $O(m^n)$ のオーダーで増大する．
- アイディア：ランダム射影 $\{\mu:X\to\mathbb{P}^n\}_{\mu\in\mathbb{G}(n,|mD|)}$ によりランダム分岐つき射影構造を導入して m が巨大のときに現れる統計法則に着目する．

$N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ へのランダム分岐つき射影構造アプローチ

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$:線形非退化な正則曲線 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n$ の射影構造を使うとロンスキアン $W(f) = \det(f', f'', \ldots, f^{(n)})$ は $K_{\mathbb{P}^n}^{-1}$-値正則曲線である.
- ランダム射影：D を大変豊富と仮定して，完備線型系 $\{|mD|\}_{m=1,2,\ldots}$ の列に対応する小平埋め込み $\mu : X \overset{|mD|}{\to} \mathbb{P}^N = |mD|^*$ の埋め込み次元 N は $O(m^n)$ のオーダーで増大する.
- アイディア：ランダム射影 $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu \in \mathbb{G}(n,|mD|)}$ によりランダム分岐つき射影構造を導入して m が巨大のときに現れる統計法則に着目する.
- 測度論的位置解析．D を含む $|mD|$ の n 次元部分線形系全体 $\mathfrak{P}_m$ は $\mathbb{G}(n, |(m-1)D|)$ $\Rightarrow$ 測度集中現象が起きる．ランダム射影 $\{\mu : X \to \mathbb{P}^n\}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}$ に付随する分岐因子 R_μ は確率変数．$f(\mathbb{C})$ の 1 点 $f(z) \in X$ における n ジェットに対する分岐因子 R_μ の位置に測度論的位置解析を適用する.

ランダム分岐つき射影構造の測度論的位置解析のロジックと Fubini の定理

ランダム分岐つき射影構造の測度論的位置解析のロジックと Fubini の定理

- 測度集中現象をこのように応用できる直観的理由：

ランダム分岐つき射影構造の測度論的位置解析のロジックと Fubini の定理

- 測度集中現象をこのように応用できる直観的理由：
  測度集中現象がその威力を発揮するのは，Fubini の定理

$$\mathfrak{M}_\mu \int_0^r \frac{dt}{t} n_{W(f_\mu),S_0}(t) = \int_0^r \frac{dt}{t} \mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$$

の右辺においてである．

ランダム分岐つき射影構造の測度論的位置解析のロジックと Fubini の定理

- 測度集中現象をこのように応用できる直観的理由：
  測度集中現象がその威力を発揮するのは，Fubini の定理

$$\mathfrak{M}_\mu \int_0^r \frac{dt}{t} n_{W(f_\mu),S_0}(t) = \int_0^r \frac{dt}{t} \mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$$

  の右辺においてである．
- そこでは，右辺の $\mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$ において，正則曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ が $f(z_0)$ において分岐因子 R_μ と交わるとき（または近いとき），因子 R_μ の f の n ジェットに対する相対的位置が「何らかの関係を満たす状態」が支配的になっている（この状態に測度が集中している）．

ランダム分岐つき射影構造の測度論的位置解析のロジックと Fubini の定理

- 測度集中現象をこのように応用できる直観的理由：
  測度集中現象がその威力を発揮するのは，Fubini の定理

  $$\mathfrak{M}_\mu \int_0^r \frac{dt}{t} n_{W(f_\mu),S_0}(t) = \int_0^r \frac{dt}{t} \mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$$

  の右辺においてである．
- そこでは，右辺の $\mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$ において，正則曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ が $f(z_0)$ において分岐因子 R_μ と交わるとき（または近いとき），因子 R_μ の f の n ジェットに対する相対的位置が「何らかの関係を満たす状態」が支配的になっている（この状態に測度が集中している）．
  すなわち，f の n ジェットに対する $T_{f(z_0)}R_\mu$ の相対的位置を確率変数と思ったとき，背景の確率分布が「何らかの関係を満たす」状態に集中している．

ランダム分岐つき射影構造の測度論的位置解析のロジックと Fubini の定理

- 測度集中現象をこのように応用できる直観的理由：
  測度集中現象がその威力を発揮するのは，Fubini の定理

$$\mathfrak{M}_\mu \int_0^r \frac{dt}{t} n_{W(f_\mu),S_0}(t) = \int_0^r \frac{dt}{t} \mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$$

  の右辺においてである．
- そこでは，右辺の $\mathfrak{M}_\mu n_{W(f_\mu),S_0}(t)$ において，正則曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ が $f(z_0)$ において分岐因子 R_μ と交わるとき（または近いとき），因子 R_μ の f の n ジェットに対する相対的位置が「何らかの関係を満たす状態」が支配的になっている（この状態に測度が集中している）．
  すなわち，f の n ジェットに対する $T_{f(z_0)}R_\mu$ の相対的位置を確率変数と思ったとき，背景の確率分布が「何らかの関係を満たす」状態に集中している．
- 質問：その「何らかの関係」とは何か？

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu.$

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu.$
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu.$
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \leq T_{f,-K_X}(r) + O(\log r T_{f,E}(r)) \parallel.$

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu$.
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \leq$
  $T_{f,-K_X}(r) + O(\log rT_{f,E}(r)) \,\|$.
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ が R_μ を通過するとき μ-almost surely に $W(f_\mu) = 0$ である.（質問の答）

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu$.
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \leq$
  $T_{f,-K_X}(r) + O(\log rT_{f,E}(r)) \,\|$.
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ が R_μ を通過するとき μ-almost surely に $W(f_\mu) = 0$ である. (質問の答)
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ K_X^{-1} 値有理型関数（μ-確率変数と思う）
  $\Psi(j_n(f)) := \left\{ \dfrac{W(j_n(f_\mu))}{\psi_\mu(f)} \right\}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}$ $(R_\mu := (\psi_\mu))$ は $\psi_\mu(f) \to 0$ のとき almost surely に有界である.

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu.$
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \le$
  $T_{f,-K_X}(r) + O(\log rT_{f,E}(r)) \,\|.$
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ が R_μ を通過するとき μ-almost surely に $W(f_\mu) = 0$ である.（質問の答）
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ K_X^{-1} 値有理型関数（μ-確率変数と思う）
  $\Psi(j_n(f)) := \left\{ \dfrac{W(j_n(f_\mu))}{\psi_\mu(f)} \right\}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}$ $(R_\mu := (\psi_\mu))$ は $\psi_\mu(f) \to 0$ のとき almost surely に有界である.
- 第一の解釈：$N'_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}(N_{W(f_\mu),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r)).$

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu.$
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \leq$
  $T_{f,-K_X}(r) + O(\log rT_{f,E}(r)) \,\|.$
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ が R_μ を通過するとき μ-almost surely に $W(f_\mu) = 0$ である. (質問の答)
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ K_X^{-1} 値有理型関数（μ-確率変数と思う）
  $\Psi(j_n(f)) := \left\{ \frac{W(j_n(f_\mu))}{\psi_\mu(f)} \right\}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}$ $(R_\mu := (\psi_\mu))$ は $\psi_\mu(f) \to 0$ のとき almost surely に有界である.
- 第一の解釈：$N'_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}(N_{W(f_\mu),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r)).$
  第二の解釈：$N_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m} N_{\Psi(j_n f),S_0}(r).$

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu$.
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \leq$
  $T_{f,-K_X}(r) + O(\log rT_{f,E}(r)) \parallel$.
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ が R_μ を通過するとき μ-almost surely に $W(f_\mu) = 0$ である.（質問の答）
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ K_X^{-1} 値有理型関数（μ-確率変数と思う）
  $\Psi(j_n(f)) := \left\{ \dfrac{W(j_n(f_\mu))}{\psi_\mu(f)} \right\}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}$ 　$(R_\mu := (\psi_\mu))$ は $\psi_\mu(f) \to 0$ のとき almost surely に有界である.
- 第一の解釈：$N'_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}(N_{W(f_\mu),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r))$.
  第二の解釈：$N_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m} N_{\Psi(j_n f),S_0}(r)$.
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$
  1. $\exists r_m$ s.t. $\forall r > r_m$, $N_{W(f_\mu),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) > -\varepsilon T_{f,E}(r)$ almost surely in $\mu \in \mathfrak{P}_m$.

Riemann-Hurwitz 公式と分岐個数関数

- 射影 $\mu : X \to \mathbb{P}^n$ に対する Riemann-Hurwitz 公式
  $\mu^* K_{\mathbb{P}^n}^{-1} = K_X^{-1} + R_\mu$.
- $f_\mu := \mu \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ に Cartan/Ahlfors 第二主定理を適用して μ に対する RH 公式で書き直し：
  $m_{f,D}(r) + N_{W(j_n(f_\mu)),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) \leq$
  $T_{f,-K_X}(r) + O(\log rT_{f,E}(r)) \parallel$.
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ が R_μ を通過するとき μ-almost surely に $W(f_\mu) = 0$ である. (質問の答)
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$ K_X^{-1} 値有理型関数（μ-確率変数と思う）
  $\Psi(j_n(f)) := \left\{ \dfrac{W(j_n(f_\mu))}{\psi_\mu(f)} \right\}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}$ $(R_\mu := (\psi_\mu))$ は $\psi_\mu(f) \to 0$ のとき almost surely に有界である.
- 第一の解釈：$N'_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m}(N_{W(f_\mu),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r))$.
  第二の解釈：$N_{f,\mathrm{Ram}}(r) := \mathfrak{M}_{\mu \in \mathfrak{P}_m} N_{\Psi(j_n f),S_0}(r)$.
- 測度論的位置解析 $\Rightarrow$
  1. $\exists r_m$ s.t. $\forall r > r_m$, $N_{W(f_\mu),S_0}(r) - T_{f,R_\mu}(r) > -\varepsilon T_{f,E}(r)$ almost surely in $\mu \in \mathfrak{P}_m$.
  2. $N'_{f,\mathrm{Ram}}(r) = N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ モジュロ $\varepsilon T_{f,E}(r)$.

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想
- 測度論的位置解析と幾何学的量子化

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想
- 測度論的位置解析と幾何学的量子化
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の SLAG トーラス

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想
- 測度論的位置解析と幾何学的量子化
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の SLAG トーラス
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の Levi 平坦超曲面

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想
- 測度論的位置解析と幾何学的量子化
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の SLAG トーラス
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の Levi 平坦超曲面
- 測度論的位置解析とコンパクト Riemann 多様体の第一固有値の評価

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想
- 測度論的位置解析と幾何学的量子化
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の SLAG トーラス
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の Levi 平坦超曲面
- 測度論的位置解析とコンパクト Riemann 多様体の第一固有値の評価
- 測度論的位置解析と YTD 予想

風呂敷

測度論的位置解析のひろがりは？

- 測度論的位置解析と小林双曲性に関わる問題（たくさんある）
- 測度論的位置解析とアバンダンス予想
- 測度論的位置解析と幾何学的量子化
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の SLAG トーラス
- 測度論的位置解析と Calabi-Yau 多様体の Levi 平坦超曲面
- 測度論的位置解析とコンパクト Riemann 多様体の第一固有値の評価
- 測度論的位置解析と YTD 予想
- 測度論的位置解析のアデール版．

References.

[AS] K. Adiprasito and R. Sanyal, Whitney numbers of arrangements via measure concentration of intrinsic volumes, arXiv:1606.09412 [math.CO]

[A] L. Ahlfors, The theory of meromorphic curves, Acta Soc. Sci. Fenn. Nova. (1941) Ser. A 3 no.4. 1-31.

[B] D. Brotbek, On the hyperbolicity of general hypersurfaces, Publ. math. de l'IHES, 126 (2017) 1-34.

[IKL] M. Izumi, R. Kobayashi and P. Lin, Riemann-Hurwitz approach to Nevanlinna Theory, ...

[M] E. Meckes, Concentration of Measure and the Compact Classical Matrix Groups, Lecture Notes (2014)

ありがとうございました.