ベクトル ver.20230415

１．ベクトルを使う理由

多くの物理現象，物理量（力，速度，加速度，電場，磁場，etc.），物理法則はベクトルを用いて表される．しかしながら，ベクトルが用いられるようになったのは，１９世紀以降であり，それまでは四元数が用いられていた（現在でも四元数はコンピューターグラフィックスにおける３次元の回転の計算などに用いられている）．

物理学においてベクトルが広く用いられるようになった最大の理由は，ベクトルを使って表現された物理法則の方程式の形が，座標変換のもとで不変であるということによる．例えば，この授業の主要テーマのひとつであるニュートンの第２法則，すなわち運動方程式が，物体の質量 m，加速度ベクトル $\vec{a}$，物体にはたらく力のベクトル $\vec{f}$ を用いて，

$$m\vec{a} = \vec{f} \tag{1}$$

と書かれることは, 高校の物理の授業で見たことがある人は少なくないと思われるが, この式は加速度ベクトル $\vec{a}$ と力のベクトル $\vec{f}$ がどの座標系で定義されたベクトルなのかに依らず成り立つ．直交座標系（$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$）でも成り立つし，極座標系（$\vec{a} = (a_r, a_\theta, a_\phi), \vec{f} = (f_r, f_\theta, f_\phi)$）でも成り立つし，円筒座標系（$\vec{a} = (a_r, a_\theta, a_z), \vec{f} = (f_r, f_\theta, f_z)$）でも成り立つ．座標系は我々が勝手に定義するものなのだから，座標系を変えるたびに法則の見た目が変わってしまうのは都合が悪い．ベクトルは様々な座標系で物理法則を研究するのに最適な数学的ツールである．

また，ベクトルを用いずに法則を表そうとすると数式として不完全なものになってしまう場合も多い．例えば，一般的には，（この授業の主要テーマである）「万有引力の法則」は

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{2}$$

（M, m は二つの質点の質量，r は二つの質点の間の距離，G は万有引力定数，F は二つの質点の間にはたらく引力の大きさ）と表記されることが多いが，この式だけでは万有引力がはたらく向きはわからない．万有引力の場合は「引力」と名前が付いているのだから，(2) 式のように力の大きさだけを表す数式でも十分かも知れないが，より一般的な力，速度，加速度，電場，磁場などの物理量に関する法則を記述する数式を考えるときには，それらの物理量の大きさだけしか記述できない数式では法則の名に値しないだろう．ちなみに，力の向きも含む万有引力の法則は，一方の質点からもう一方の質点へのベクトル $\vec{r}$（大きさ $|\vec{r}| = r$）を用いて

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GMm\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{3}$$

と表される．分母の３乗はタイポではないことに注意．

というわけで，物理学にとってベクトルは必須の数学的ツールであるため，大学で物理学を学ぶ際には必ずベクトル解析も学ぶ．数学者たちは便利な概念／量を続々と発見／開発してきているが，大学で最初に古典力学を学ぶ際には，ベクトルを用いるのがベストである．ただし，この授業が対象とする古典力学の基礎においては，ベクトルを用いた数式だけで最後まで押し通すということはしない．むしろ古典力学においては，問題ごとに適切な（解析しやすい，解きやすい）座標系を選んで，成分ごとに解析するということがしばしば行われるので，ベクトルの威力をあまり感じることはないかも知れない．

一方，古典電磁気学においては，クーロンの法則などからマックスウェルの方程式という電磁場の振る舞いを記述する基礎方程式が導かれるが，その導出にはベクトル解析の知識が必須であり，マックスウェルの方程式もベクトルを用いて表記される．また，量子力学においてもベクトルは必須である．そのような科目を履修したい人は，教養教育院の代数・幾何の授業を聞いてベクトルについてしっかり勉強しておこう．以下では，古典力学で用いるベクトルに関する最小限の知識をまとめる．

２．ベクトルの座標表示

３次元空間中のある点Pの位置をベクトル$\vec{r}$で表すことにしよう．$\boldsymbol{r}$のように太字でベクトルを書くことも多いが，この授業では誤解のないように矢印を用いて表記する．逆に矢印がないものはベクトルではなくスカラー（向きをもたない量，例えば温度など）であると考えて欲しい．任意の座標系の原点をO，任意の点をPとして，ベクトル$\vec{r}$を，大きさが距離$\overline{\mathrm{OP}}$に等しく，OからPへの向きを持つ量として定義する．直交座標系を使えば，Pの座標(P_x, P_y, P_z)と，直交座標系の基本ベクトル

$$\vec{e}_x = \vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0) \tag{4}$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0) \tag{5}$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1) \tag{6}$$

を用いて，

$$\vec{r} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k} \tag{7}$$

と書くことができる（$\vec{e}_x, \vec{e}_1$等を使っても同様）．明らかに基本ベクトルの長さは1である．これをベクトルの座標表示という．この授業では，特に断らない限り，質点の座標をベクトル$\vec{r}$を用いて書く．この場合，原点Oから点Pまでの距離をrとすると，それはベクトルの大きさ$|\vec{r}|$を用いて，

$$\text{距離}\overline{\mathrm{OP}} = |\vec{r}| = r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \tag{8}$$

と書くことができる．以下では，一般にベクトル$\vec{r}$の直交座標系における各成分を$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$のように書く．ここでは$(r_x, r_y, r_z) = (P_x, P_y, P_z)$である．直交座標系における一般的な位置$(x, y, z)$を$\vec{r} = (x, y, z)$と書くことも多い．このときは$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$である．

上記のように，位置をベクトルで表す場合には，空間中の矢印としてのベクトルの始点を原点に固定していることには注意が必要である．このようなベクトルを位置ベクトルという．一方，一般のベクトルにおいては始点は指定されない．例えば，直交座標系において空間中の矢印でベクトルを定義した場合，その空間中で平行移動した矢印で定義されるベクトルは元のベクトルと同じものとして扱われる．一般に，２つのベクトル$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$と$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$が平行なら，$c$を定数として，

$$\vec{a} = c\,\vec{b}, \quad (a_x = c\,b_x, a_y = c\,b_y, a_z = c\,b_z) \tag{9}$$

が成り立つ．両者の大きさが同じなら$|c| = 1$である．$c < 0$なら$\vec{a}$と$\vec{b}$は逆向きであることに注意しよう．例えば，(3)式においてG, M, m, rは全て正であるから，ベクトル$\vec{r}$と万有引力$\vec{F}(\vec{r})$は常に逆向きである．

3．ベクトル場とスカラー場

一般に，力，速度，加速度，電場，磁場のような物理量は，場所に依存して向きや大きさが異なる．例えば，重力は地表では常に下向きなので場所に依存せず一定に感じられるが，宇宙

から眺めれば，北極点にはたらく重力と南極点にはたらく重力は反対向きである．つまり，それらの物理量は位置ベクトル $\vec{r}$ の関数であり，それ自体もベクトルである．そのような位置に依存するベクトルのことを，ベクトル場と呼ぶ．直交座標系で考えるなら，位置 $\vec{r}$ におけるベクトル場 $\vec{F}(\vec{r})$（もしくは成分で位置を表すなら $\vec{F}(x,y,z)$）は，

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k} \tag{10}$$

の意味である（$F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ は，それぞれ位置 (x,y,z) に依存するベクトル $\vec{F}(x,y,z)$ の x,y,z 成分）．

一方，温度 $T(\vec{r}) = T(x,y,z)$ や液体の圧力 $P(\vec{r}) = P(x,y,z)$ などは，一般には場所に依存してその大きさだけが異なる量である（向きをもたない）．このような量をスカラーと呼び，そのような位置に依存するスカラーのことをスカラー場と呼ぶ．2013 年にノーベル物理学賞が授与されたピーター・ヒッグスが提唱したヒッグス場もスカラー場である．

4．ベクトルの和

２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和は，例えば直交座標系におけるそれらの成分 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ と基本ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を用いて，

$$\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} \tag{11}$$

によって定義される．ベクトルの和は，２つのベクトルが同じ次元（上の例では３次元）のときだけ定義されることに注意しよう．また，物理量を表す２つのベクトルについては，それらの意味（単位）が同じときだけ和が意味をもつことにも注意しよう（単位が異なる物理量を記述する数式には必ず単位を合わせるための物理定数がかけ合わされることに注意．例えば，万有引力の法則 (3) における万有引力定数 G など）．

5．ベクトルの内積（スカラー積）

２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，例えば直交座標系におけるそれらの成分 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を用いて，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{12}$$

で定義される．左辺はベクトルを用いて書かれるが，右辺はベクトルではなくスカラー（向きをもたない量）であることに注意しよう．２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を用いて，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \tag{13}$$

と書くこともできる（証明は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}$ で作られる三角形に余弦定理を適用する）．ベクトルの内積を用いることにより，ベクトルの大きさを $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ と書くことができる．向きが直交する２つのベクトルの内積は明らかにゼロである．このことから，直交座標系における（それぞれが互いに直交する）基本ベクトルについては

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \tag{14}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \tag{15}$$

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{16}$$

となることもわかる．(16) 式の m, n は, (4)-(6) 式の $x, y, z, 1, 2, 3$ に対応する．定義 (12) から交換則 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ も明らかに成り立つ．さらに, ベクトルの内積については, 分配則 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ も成り立つ．

6．ベクトルの外積（ベクトル積）

２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を,（例えば３次元ベクトルの場合）次の３成分をもつベクトルとして定義する．

$$\begin{cases} (\vec{a}\times\vec{b})_x & \equiv a_y b_z - a_z b_y \\ (\vec{a}\times\vec{b})_y & \equiv a_z b_x - a_x b_z \\ (\vec{a}\times\vec{b})_z & \equiv a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \tag{17}$$

行列式（詳細は線形代数の授業や教科書を参照）の記法を使って

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{18}$$

と書くと覚えやすいかも知れない．

ベクトルの内積と異なり，ベクトルの外積はベクトルであることに注意．ベクトル積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の定義は,

・大きさが，$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ として，$\vec{a}, \vec{b}$ を２辺とする平行四辺形の面積）

・向きが，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ねじを回転させたときのねじの進む向き

をもつベクトルとすることもできる．ベクトルの外積については，$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ となるため，交換則が成り立たないことにも注意しよう．２つのベクトルが平行（なす角がゼロ）の場合には,

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin 0 = 0 \tag{19}$$

である．直交座標系における基本ベクトルに対しては,

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} \tag{20}$$

$$\vec{e}_\ell \times \vec{e}_m = \begin{cases} 0 & (\ell = m) \\ \vec{e}_n & (\ell \neq m) \end{cases} \tag{21}$$

が成り立つ．(21) 式は，ℓ, m, n の順番が $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \cdots$ や $x \to y \to z \to x \to \cdots$ の巡回型であるときにのみ成り立つことに注意（それ以外の順番のときには右辺の符号が変わることがある）．分配則はベクトルの外積についても成り立ち,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \tag{22}$$

となる．

ベクトルの外積は古典電磁気学では必須なので，そのような科目を履修しようと考えている人は覚えておくとよい．とりあえずこの授業では名前だけ覚えておいて，必要に応じて上記の定義や式を見返して欲しい．

7．ベクトルの微分，積分と演算子

ベクトルの微分は各成分の微分と覚えておけばよい．例えば，時間 t に依存する位置ベクトル $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$（これは一般に軌道と呼ばれるものである）の t による微分は，

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right) \tag{23}$$

となるが，これは，速度ベクトルに他ならない．つまり，

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \equiv \vec{v}(t) \tag{24}$$

である．これをもう一度微分したものが加速度ベクトルであり，

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\right) \equiv (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \equiv \vec{a}(t) \tag{25}$$

である．

ベクトルの積分は，とりあえずこの授業では各成分ごとの積分であると覚えておけばよい．今後の授業でベクトルの積分が出てきたときに具体的に説明する．

この授業でも後で出てくる予定であるが，演算子もここで紹介しておく．演算子とは，ある量や関数に作用して，別の量や関数へと変換するモノと覚えておけばよい．最初に覚えておくべきベクトルの演算子は，位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ を引数とするスカラー関数 $U(\vec{r})$ をベクトル場 $\vec{F}(\vec{r})$ に変換する「勾配 (gradient)」と呼ばれる演算子

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla U(\vec{r}) = \mathrm{grad}\, U(\vec{r}) \equiv (\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}) \tag{26}$$

である．ここで記号 ∂ は偏微分を表す．$U(\vec{r})$ は x, y, z の関数だが，$\partial U(\vec{r})/\partial x$ は，y, z は定数とみなして $U(\vec{r})$ を x で微分するという意味である（$\partial U(\vec{r})/\partial y, \partial U(\vec{r})/\partial z$ も同様）．∇ はナブラ，grad は勾配と呼ばれる演算子であり，全く同じ働きをする．歴史的事情により両者が使われ続けているが，同じものと思っていて欲しい．

（演習問題）古典電磁気学において，一般に電場（ベクトル場）は静電ポテンシャル（スカラー場）の勾配で与えられる．原点にある点電荷 q による静電ポテンシャルは

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{27}$$

で与えられる．このとき，電場 $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$ を求めよ．ただし，ε_0 は真空中の誘電率．

（答）

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|\vec{r}|^3}, \frac{y}{|\vec{r}|^3}, \frac{z}{|\vec{r}|^3}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}
\end{aligned} \tag{28}$$

途中の微分の計算については，配布資料「微積分」の「3-3. 商の微分」を参照のこと．

8．その他

上記を読めばわかる通り，古典力学の基礎を学ぶ上では，ベクトルについては最低限の知識があれば十分である．ただし，扱っている量や変数がベクトルなのかスカラーなのか混乱して，間違った計算をしてしまう人もときどきいるので，ノートを作るときや，演習問題を解く際には，扱っている数式がベクトルの式なのかスカラーの式なのかは常に意識するようにして欲しい．

古典力学の教科書によっては，ベクトル３重積やスカラー３重積，さらには極性ベクトル，軸性ベクトル，擬ベクトルなどについても触れているものがあるが，この授業では使わないので，ここでは省略する．それらは，構造，流体，制御，ロボット，電気工学などの工学分野ではよく使われるものなので，今後そのような分野の科目を履修しようと考えている人は，代数，幾何，ベクトル解析についての全学教育科目の授業をしっかり聞いて勉強して欲しい．

なお，このノートには，不正確な表現，間違い，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください．

演習問題

問 1　(3) 式の万有引力 $\vec{F}(\vec{r})$ はベクトル場であり，これは重力場とも呼ばれる．重力場を可視化しよう．質量 M の質点が原点にあり，質量 m の質点は原点を中心とする半径 r の球面上を動き回れるとする．質量 m の質点が 3 次元直交座標系において

$$\vec{r} = (r,0,0), (0,r,0), (0,0,r), (-r,0,0), (0,-r,0), (0,0,-r) \tag{29}$$

の 6 つの位置にあるときに，その質点にはたらく万有引力 $\vec{F}(\vec{r})$ をそれぞれ矢印で図示せよ．それぞれについて位置ベクトル $\vec{r}$ も図示すること．(3) 式右辺のマイナス符号に注意して図示せよ．

問 2　2 つの 2 次元ベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y)$ と $\vec{b} = (b_x, b_y)$ が直交しているとき，c を定数として，$b_x = -ca_y$, $b_y = ca_x$ となることを示せ．このことを 2 次元平面上の図を用いて説明せよ．ただし，$\vec{a}$ も $\vec{b}$ も零ベクトル $(0,0)$ ではないとする．

問 3　2 つの 3 次元ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行なとき，(9) 式と外積の定義 (17) を用いて，（19）式を使わずに，$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ であることを示せ．

問 4　2 次元直交座標系における, 時間 t の関数である位置ベクトル $\vec{r}(t) = (\ell\cos(\omega t), \ell\sin(\omega t))$ を考える．ℓ, ω(オメガ) はそれぞれ正の定数とする．このとき，(24) 式や (25) などの定義に従って，位置ベクトルと速度ベクトルが直交すること，速度ベクトルと加速度ベクトルが直交すること，および位置ベクトルと加速度ベクトルが平行であることを，それぞれ示せ．2 次元平面上に，$\vec{r}(t)$ の軌道，速度ベクトル，加速度ベクトルを図示せよ．$\ell = \omega = 1$ として，WolframAlpha に `ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]},{t, 0, 2*Pi}]` と入力すると軌道を描いてくれるので，その図もレポートに貼り付けること．