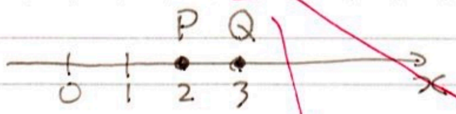
# ⑪ 座標と座標系

No. 1

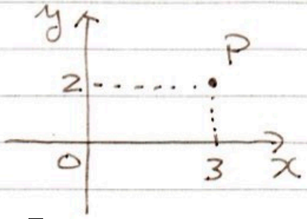
○ 座標：点の位置を指定する数の組

・1次元



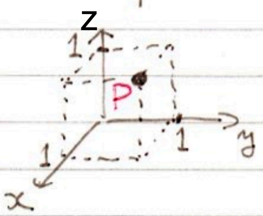

1次元のときは1個
P→~~1~~2, Q→~~2~~3

・2次元



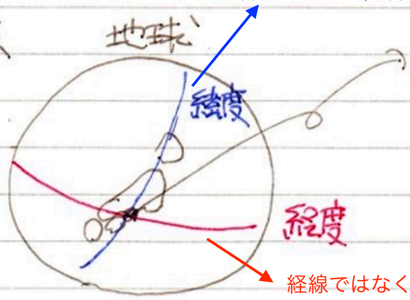

2次元のときは2個の組
P → (3, 2)

・3次元




3次元 → 3個の組
P → (1, 1, 1)

・地理座標

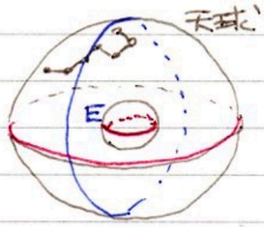



緯線ではなく、緯度の軸のつもり

名古屋市
(35.2°N, 136.9°E)
2個の組

経線ではなく、経度の軸のつもり

・天球座標 … 天文学




2個の組
キョリは入ってない。

○ デカルト「方法序説」1637
○ ライプニッツ, "co-ordinate (座標)"

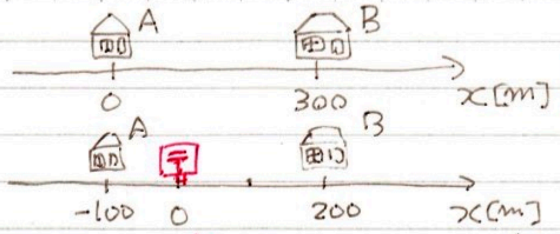
※ 座標の表現方法は1通りではない。
→ 様々な座標系

# ⑪ 座標と座標系



○ 座標系：座標を表現する形式.

・1次元

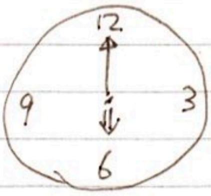



A → 0
B → 300

A → −100
B → 200

km → A → −0.1
B → 0.2

原点や単位の取り方によって表わされる座標は異なる.

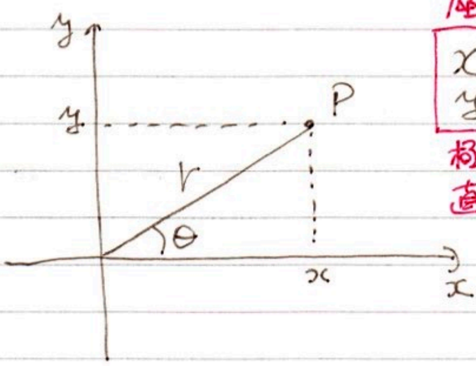



長針 → 12 → 3 → 6 → 9 → 12
0° → 90° → 180° → 270° → 360° 0°
0分 → 15分 → 30分 → 45分 → 60分 0分

短針 → 0時 → 3時 → 6時 → 9時 → 12時

1次元座標（円座標）

・2次元




座標変換

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

極座標から直交座標への変換の式

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \mathrm{sgn}(y)\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

直交座標→極座標

r一定 θだけで位置を表現

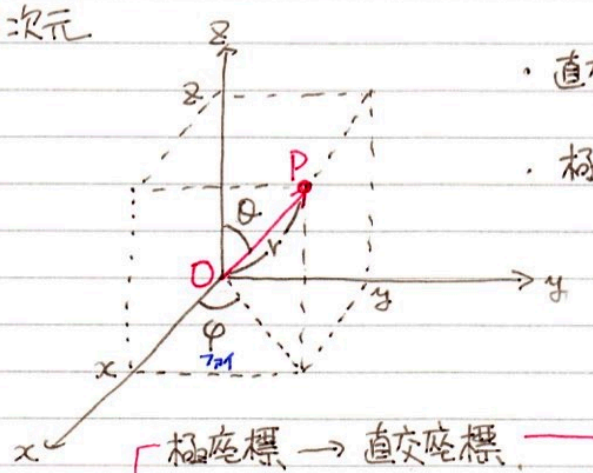
○ 直交座標系（デカルト座標系） $P(x, y)$

○ 極座標系 $P(r, \theta)$

## ⑪ 座標と座標系

・座標系：座標を表現する形式

・3次元




・直交座標系（デカルト座標系）

$P(x, y, z)$

・極座標（球座標、球面座標）

r固定

$P(r, \theta, \varphi)$

$\phi$と書くこともある。

$P(\theta, \varphi)$ 本質的に2次元

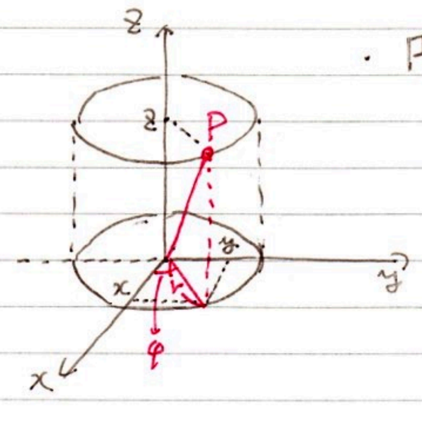
地理座標と同じ

極座標 → 直交座標

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

逆は憶えなくてよい。

$$\begin{cases} r = \cdots \\ \theta = \cdots \\ \varphi = \cdots \end{cases}$$




・円筒座標

$P(r, \varphi, z)$

円筒座標 → 直交座標

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

## ⑾ 座標と座標系

### ○ 座標変換

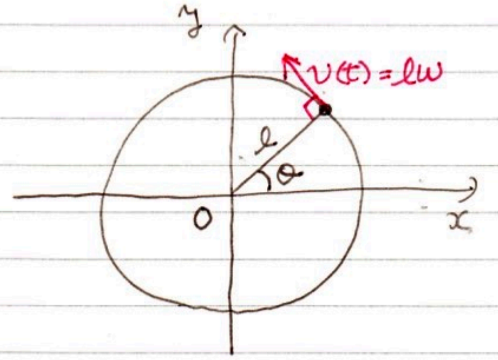
○ ベクトルは座標変換のもとで不変

○ 何故様々な座標系を考えるのか？

### ○ 等速円運動

$$\begin{cases} x(t) = l\cos(\omega t) \\ y(t) = l\sin(\omega t) \end{cases} \xrightarrow[\text{座標変換}]{} \begin{cases} \theta(t) = \omega t \\ r(t) = l \ (\text{定数}) \end{cases}$$

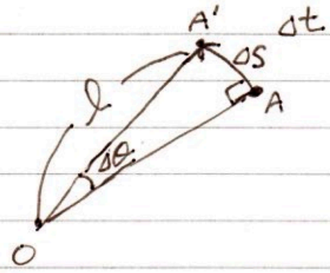
直交座標　　　　　　　円座標




$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} = v_\theta(t) = \omega \ \text{：角速度} \\ \dot{r}(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} = v_r(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \dot{v}_\theta(t) = a_\theta(t) = 0 \\ \ddot{r}(t) = \dfrac{d^2 r(t)}{dt^2} = \dot{v}_r(t) = a_r(t) = 0 \end{cases}$$

○ 角速度と速さの関係




$$\text{速さ}\ v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \simeq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l\sin(\Delta\theta)}{\Delta t}$$

$$\simeq l \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (\because \sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta,\ \Delta\theta \ll 1)$$

$$= l\dot{\theta}(t)$$

$$= l\omega$$

# (1) 座標と座標系

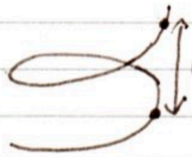
## ◦ らせん運動

・3次元直交座標系

$$\begin{cases} x = l\cos\omega t \\ y = l\sin\omega t \\ z = ut \end{cases}$$

定数 $(l, \omega, u > 0)$

・z軸上方から見たら，もしくは運動をxy面に投影したら
2次元等速円運動

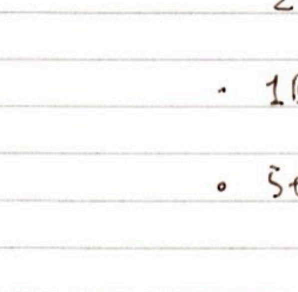



・1回転の周期 $= T = \frac{2\pi}{\omega}$

◦ らせんのピッチ $= L = z(t+T) - z(t)$
$= u(t + \frac{2\pi}{\omega}) - ut$
$= \frac{2\pi}{\omega}u$

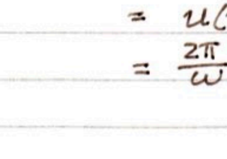
◦ 3次元円筒座標系

$$\begin{cases} r(t) = l \ (\text{一定}) \\ \varphi(t) = \omega t \\ z(t) = ut \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{r}(t) = v_r(t) = 0, \ \ddot{r}(t) = a_r(t) = 0 \\ \dot{\varphi}(t) = v_\varphi(t) = \omega, \ \ddot{\varphi}(t) = a_\varphi(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = v_z(t) = u, \ \ddot{z}(t) = a_z(t) = 0 \\ \dot{\vec{r}} = \vec{v} = (0, \omega, u), \ \ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \vec{0} \end{array}$$




cf.) Wolfram Alpha
$l = \omega = 1$, $u = 1/10$ として
ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], t/10}, {t, 0, 6*Pi}]

cf.) 3次元極座標系




$\overline{OA} = l$
$\overline{PA} = ut$
$\overline{OP}\cos\theta = \overline{PA}$
$\therefore \cos\theta = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{ut}{r}$

$$\begin{cases} r(t) = \overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{PA}^2} \\ \quad = \sqrt{l^2 + (ut)^2} \\ \theta(t) = \arccos\left(\frac{ut}{\sqrt{l^2 + (ut)^2}}\right) \\ \varphi(t) = \omega t \end{cases}$$

# ⑪ 座標と座標系

## ○ 運動座標系

○ ニュートンの第1法則（運動の第1法則）（予告編）

すべての物体は，外力によってその状態を変えられない限り，静止の状態あるいは一直線上の ~~一直線上~~ の一様な運動の状態を，そのまま続ける．

→ 慣性の法則
inertia　物体が持つ速度を保持し続けようとする性質

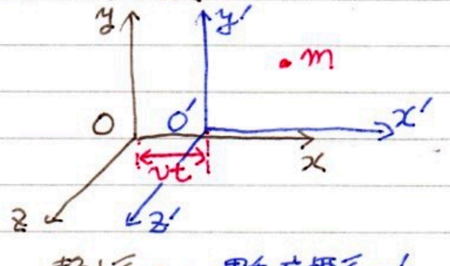
→ 座標系（原点や軸）が動いていたら成り立たない！
cf.）「赤の女王／鏡の国のアリス」→ 進化論における「赤の女王仮説」

→ 慣性の法則が成り立つ座標系を古典力学では使わなくてはならない．
↓
慣性系

○ ガリレイの相対性原理

ある慣性系に対して等速度で動く座標系は慣性系

○ ガリレイ変換




$$\begin{cases} t' = t & \text{(時間はそのまま)} \\ x' = x - vt & \\ y' = y & \text{(y, z はそのまま)} \\ z' = z & \end{cases}$$

静止系O と 運動座標系O'
（O系に対して速さvで x軸正方向へ等速直線運動）

→ 質量mの O系で静止している物体は O'系では $x'$ 負の方向に速さvで等速運動し続ける．
→ O'も慣性系

発展

○ ニュートンの第2法則（運動方程式，運動の第2法則）もガリレイ変換のもとで不変

$ma = m\ddot{x} = F$ （x成分）

ガリレイ変換 $ma' = m\ddot{x}' = m\dfrac{d^2(x-vt)}{dt^2} = m\ddot{x} = F$ 　} 不変

速度(速さ)　$V(t) = \dot{x}(t) \longrightarrow V'(t) = \dot{x}' = \dfrac{d(x-vt)}{dt} = \dot{x} - v$
$= V(t) - v$　速度はガリレイ変換のもとでは不変ではない

・ $v \to c$ (光速) ではガリレイ変換の予測は成り立たない！

・アインシュタイン「光の速さで光を見たら？」

・光速度不変の法則（マイケルソン・モーレーの実験）

光はどの座標系で見ても同じ速さ.

↓

ローレンツ変換

$$
\begin{cases}
t' = \dfrac{t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \dfrac{v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,x \\
x' = -\dfrac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,t + \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,x \\
y' = y \\
z' = z
\end{cases}
$$

$v \ll \cancel{x}\ c$ のとき $v/c \simeq 0,\ \frac{v}{c^2} \simeq 0$ で

ガリレイ変換に帰着

→ ガリレイの相対性原理は $v \ll c$ のときに近似的に成り立つ

・光速度を不変に保つローレンツ変換による相対性原理

↓

特殊相対性理論

↓ 慣性系以外に拡張

一般相対性理論