運動の法則と運動方程式 ver.20230426

ここでは**ニュートンの運動の３法則**について解説する．これらの法則が古典力学の本論である．運動の３法則は，プリンキピアのイントロに書かれている．ニュートンは，それら３法則から出発すれば，様々な運動が理解できることをプリンキピアの中で示した．資料「古典力学の成り立ち」でも述べたように，歴史的には，コペルニクス，ガリレオ，デカルト，ティコ・ブラーエ，ケプラーらの研究をニュートンが引き継ぎ，運動の３法則，さらには万有引力の法則にたどり着いたわけであるが，多くの古典力学の教科書や授業では，ニュートンの運動の３法則からスタートして，様々な例題を考察したのちに，惑星の運動に関するケプラーの３法則を扱い，さらに，より基礎的かつシンプルな万有引力の法則からケプラーの３法則を導くということをする．この授業でもそのように進める予定である．そうする理由は，惑星の運動は本質的に２次元の運動なので，ニュートンの運動の３法則を適用する例題としては，より単純な１次元の問題を先に扱った方が，初学者には見通しよく学修を進めることができるからである．

ニュートンの運動の３法則は，すでに高校物理でも扱われていたはずだが，高校物理では，それらから派生する運動量保存則やエネルギー保存則に基づく代数方程式を解くことにより解を得ていたはずである．一方，この授業では，全ての大学の古典力学の授業と同様に，ニュートンの運動の３法則，特に，運動方程式と呼ばれる微分方程式を解析することにより，様々な問題を統一的に扱う．ニュートンの時代には微分方程式の概念は存在していなかった．微分方程式は巨人ニュートンの肩に登る高速エレベータのようなものである．

以下では，まずニュートンの運動の３法則を言葉で表し，それぞれを説明したのち，第２法則の解析的表現について説明する．さらに，いくつかの簡単な例題について，運動方程式を実際に解いて質点の軌道を求める．さらに，それぞれの場合についてエネルギー保存則が運動方程式から導かれることを確認する．

１．ニュートンの運動の３法則

第１法則 すべての質点は，力が加えられることにより状態が変化させられない限り，静止あるいは等速直線運動の状態を続ける．この法則は，**慣性の法則**，または**エネルギー保存則**と呼ばれることもある．

第２法則 質点の運動量の変化は，加えられた力の方向に沿って起こり，かつ，微小時間内における運動量の単位時間あたりの変化の大きさは，加えられた力の大きさに等しい．この法則は，**運動方程式**，または**運動量保存則**と呼ばれることもある．

第３法則 すべての作用に対して，等しく，かつ反対向きの反作用が常に存在する．すなわち，互いにはたらき合う２つの質点の相互作用の大きさは常に相等しく，かつ反対方向へと向かう．

資料「座標と座標系」の中でも先取りして解説した通り，第１法則の中の**慣性**（inertia）とは，物体が速度を保持し続けようとする性質のことである．第１法則（慣性の法則）に従うならば，この法則が成り立つ座標系，すなわち慣性系を採用して，質点の運動を扱う必要がある．慣性系を採用するなら，宇宙全体が止まっているか，等速直線運動しているかは区別できないし，区別しない，というのがガリレイの相対性原理である．

第１法則においては，質点が運動を変えたのなら（速度ベクトルが変わったなら），それは質点に「何か」が作用した結果であると考える．ニュートンは，その「何か」を「力」と呼ん

だ．言い換えると，速度ベクトルを変化させるものが力であり，その変化のしにくさの度合いが慣性である．万有引力は見えないし，しかもニュートンの時代の人々にとってはとてつもなく離れた太陽や惑星の間にはたらく「何か」であったため，そのようなものの実在自体を想像することが大変困難だった．現代の我々から見ると，第１法則は当たり前すぎてその重要性がピンと来ない人も多いかもしれないが，そもそも慣性や力やエネルギーという概念がなかった時代にこの法則にたどり着いたニュートンの慧眼は驚くべきものであると受け止めなければならない．

第２法則における運動量の定義は，高校物理でも扱ったように，質量と速度の積である（つまり運動量はベクトルである）．第１法則が力の存在に対する法則であるのに対して，第２法則は力の定量的な定義である．また，以下で示すように，第２法則は，運動方程式を介して，質量を定義していることにも注意しよう．さらに，以下で示すように，第２法則は，質点に力が作用したときの質点の運動量の変化量を記述，予測する．ニュートンは，プリンキピアの中で，この法則を発見したのはガリレオであると述べている．自然科学の様々な法則には発見者の名が冠されることが多いが，必ずしも最初に発見した人の名前が付くわけではないということは憶えておいてもよいかも知れない．それを不公正だという人もいるけれども，ガリレオは草葉の陰で苦笑しているのではないかとも思う．真の科学者は発見の喜びを求める者であり，名を残すことを求める者ではないから．

第３法則は，ニュートンが言ったとされる，「地球はリンゴを引っ張っているが，同時にリンゴも同じ強さで地球を引っ張っている」という命題の言い換えでもある（本当にニュートンがそう言ったのかどうかは確認していないので，気になる人は調べて教えてください）．これも高校物理（中学理科？）以来おなじみの概念ではあるが，そもそも力の概念がなかったニュートンの時代に，その「見えない何か」についての法則が発見されたことにも驚かなくてはならない．ニュートンの時代の人々にとって万有引力とは，現代人の我々にとっての「愛の力」とか「赤い糸」とかいったものに相当するものだったであろうから．

２．質点の運動方程式：第２法則の解析的表現

微分方程式を使った，現代的な第２法則の解析的表現を見ていこう．この授業のハイライトである．運動方程式を立てることができたら，あとは機械的に答えが導かれる（微分方程式が解ける場合には）．

運動する質点の**運動量**（momentum）$\vec{p}(t)$ を，

$$\vec{p}(t) \equiv m\vec{v}(t) \tag{1}$$

と定義する（プリンキピアの中でニュートンは運動量という言葉は使っておらず，「運動の量（quantity of motion）」に相当するラテン語を使ったとされる．ラテン語のつづりがわかる人は教えてください）．m は質量（スカラー）である．これをもちいて，ニュートンの運動の第２法則は

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(t) \tag{2}$$

と表される．ニュートンの記法をもちいて $\dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}(t)$ と書いても同じ意味である．左辺は「微小時間内における運動量の単位時間あたりの変化の大きさ」に相当し，右辺は「加えられた力」

である．(1) 式を (2) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}(t)) = \vec{F}(t) \quad &\Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} + \vec{v}(t)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(t) \\
&\Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(t) \qquad (3) \\
&\quad \text{or} \quad m\vec{a}(t) = \vec{F}(t) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となる．途中の計算では質点の質量が時間に依らず一定であると仮定した．この授業では基本的に質点の質量は時間的に変化しない場合を扱うが，ロケットなどの場合には燃料を消費して質量が減っていくためそのような仮定が使えないことは憶えておいてほしい．(3) 式や (4) 式に，質点の座標（位置ベクトル，軌道）を用いた加速度の定義 $\vec{a}(t) \equiv \mathrm{d}\vec{v}(t)/\mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}^2\vec{r}(t)/\mathrm{d}t^2$ を代入すると，

$$
m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(t) \tag{5}
$$

となる．より一般的には，質点に働く力は，時間 t 以外にも質点の位置 $\vec{r}(t)$ や速度 $\mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t$ にも依存するので，そのことを明示的に表現して

$$
m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) \tag{6}
$$

と書かれる．

(2)∼ (6) 式が，ニュートンの運動の第 2 法則の解析的表現であり，**運動方程式**（equation of motion）と呼ばれるものである．(6) 式の左辺には，質点の位置ベクトル（軌道）$\vec{r}(t)$ の時間 t に関する 2 階微分があり，かつ t のみの微分であることから，(6) 式の運動方程式は，$\vec{r}(t)$ についての，**２階の常微分方程式**の形をしている．(6) 式の右辺の具体的な関数形は問題ごとに異なるが，その式が具体的に与えられれば，あとはこの微分方程式を解くことにより，質点の軌道が得られる（微分方程式が解ける場合には）．つまり，任意の時刻にその質点がどこにいて，どのような速度や加速度をもって運動しているかを予測することができる．注意してほしいのは，ニュートンの時代には微分方程式という概念はなく，ニュートンは (2) 式に対応する幾何学的な表現により軌道の式を求めていたということである．

運動方程式が，質点の質量とそれにはたらく力を定義しているということにも注意しよう．この方程式が，例えば，月の運動を表すとして，当時得られていたデータは，（地球の周りを等速円運動しているという）その軌道 $\vec{r}(t)$ の値だけである．当時は月の質量など知るべくもなく，それにはたらく力（万有引力）に至ってはその実在自体が大きな謎だった．そもそもニュートンがプリンキピアの中で述べたのは，(2) 式のように，「運動量が変化するときには，物体には何かが作用しており，その何かを「力」と呼ぶことにしよう」という力の定義であって，ニュートンは質量（慣性）と力を同じ単語で呼んで区別していなかった．(3)∼ (6) 式は，それらを物体固有の性質（質量）m と，物体の外からはたらく（物体固有の性質とは独立な）力 $\vec{F}(t)$ に分けて表記する，現代的な質量と力の定義を示す式である．

以下では，簡単な例から始めて，さまざまな例について運動方程式を解いていくことにしよう．それらの解析のシンプルさとプリンキピアにおけるニュートンの議論の複雑さを比べれば，微分方程式がどれほど便利なツールであるかがよくわかると思う．

3．運動方程式とその解：質点に力がはたらかない場合

まずは，高校生でも計算せずに即答できる問題を，あえて運動方程式を使って解析してみよう．それは，質点に力がはたらいていない場合である．この場合には，明らかにニュートンの運動の第１法則が得られるはずである．このようなトリビアルな問題をわざわざ取り上げる理由は，以下の解析（積分を２回実行する）が古典力学のエッセンスだからである．この授業の終わりの頃には，ほぼ全ての古典力学の問題を解くことが，以下の作業のバリエーションにすぎないことがわかるだろう．

運動方程式は，力がゼロ $\vec{F}(t) = 0$ であるから，

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = 0 \tag{7}$$

である．この授業では，時間 t の関数であることが明らかな場合，引数 t を省略して $\vec{r}$ などと表記することにする．速度や加速度も (t) を省略することがあると憶えておいてほしい．また，(7) 式はベクトルの式であることに注意（右辺の 0 は $\vec{0}$ の意味）．(7) 式が，ニュートンの運動の第１法則と第２法則の両方を表していることに注意しよう．外から力がはたらかないとき運動量の変化はゼロ，すなわち運動量は保存しており，さらに質点は静止状態を続けるか，等速直線運動を続けるかのどちらかであるからである．

運動方程式の両辺を m で割った $\ddot{\vec{r}} = 0$ の両辺を t で積分すると，

$$\dot{\vec{r}} = \vec{C}_1 \tag{8}$$

となる．$\vec{C}_1$ は積分定数（のベクトル）である．この式は $\vec{v} = \vec{C}_1$ のように速度の式に書き直すことができるので，質点の速度が時間に依らず一定であることがわかる．その一定値を $\vec{C}_1 = \vec{v}_0$（時刻 $t = 0$ における質点の速度もしくは**初速度**） と書くことにすると，(8) 式は，$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$ と書くことができるので，その両辺をもう一度 t で積分すると，

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{C}_2 \tag{9}$$

となる（$\vec{C}_2$ は積分定数）．時刻 $t = 0$ における質点の初期位置を $\vec{r}_0$ であるとすると，$\vec{r}_0 = \vec{C}_2$ である．よって，運動方程式の解，すなわち質点の軌道（任意の時刻における質点の位置）

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{10}$$

が得られた．$\vec{v}_0$ が定ベクトルであるから，質点は等速直線運動をすること（$\vec{v}_0 = 0$ なら $\vec{r}_0$ に静止したまま），すなわちニュートンの運動の第１法則が得られたことになる．

上記の解析の途中で, 積分定数が２つ出てきたことに注意してほしい．一般に２階の常微分方程式を解くと２つの積分定数が出てくる．それらの定数は，２つの初期条件（$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$）または２つの境界条件（$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$, $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$）もしくはそれらのうちの２つを代入することで，軌道が具体的に得られる．そのため，初期条件が与えられた微分方程式を解く問題を初期値問題，境界条件が与えられた微分方程式を解く問題を境界値問題と呼ぶ．数学的には，一般に，n 階の常微分方程式に対して、n 個の独立な任意定数を含む解を**一般解**と呼び、それらの任意定数が初期値など特定の値をとったものを**特殊解**と呼ぶ。ここでは微分方程式 (7) が解けて，一般解 (10) が得られたことになる．具体的に $\vec{v}_0, \vec{r}_0$ の値が定まれば特殊解を用いて任意の時刻における質点の位置を予測することができる．

さらに，ベクトルを用いることにより，式をコンパクトに表現できたことにも注意してほしい．ベクトルを使わないと本質的に同じ式を３つずつ書く必要がある．たとえば，(10) 式の解は，３次元直交座標系の成分で表すなら

$$x(t) = v_{0,x}\, t + r_{0,x}, \quad y(t) = v_{0,y}\, t + r_{0,y}, \quad z(t) = v_{0,z}\, t + r_{0,z} \tag{11}$$

などと書く必要がある．

４．エネルギー保存則：質点に力がはたらかない場合

ニュートンの運動の第１法則がエネルギー保存則とも呼ばれる理由をここで確認してみよう．質点に力がはたらいていない場合の運動方程式 (7) の両辺と $\dot{\vec{r}}$ との内積をとると，

$$m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = 0 \tag{12}$$

である（この式はスカラーの式であり，右辺はスカラーの 0 であることに注意）．ここで，左辺の $\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$ が

$$\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} \tag{13}$$

の時間 t による微分に等しいことに注意しよう（$\vec{v}$ は質点の速度ベクトルであり，ここでも時間の関数であるが，(t) は省略している）．各自 (13) 式を微分して $\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$ になることを確認してみてほしい（ベクトル関数の内積の微分は，２つのスカラー関数の積の微分と同様に行うことができる．資料「微積分」の (8) 式参照）．このことは今後何度も使うので，「$\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$ を見たら (13) 式の微分」と憶えておいてほしい．よって，(12) 式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = 0 \tag{14}$$

と書き換えることができる．これの左辺のかっこの中をベクトルの成分 $\vec{v} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ を使って書き直すと

$$\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2) \tag{15}$$

となる．つまり (15) 式は質点の**運動エネルギー**であることがわかる．(14) 式は，運動エネルギーの時間微分がゼロであることを表している．つまり，質点に力がはたらかない場合は，運動エネルギーが時間的に変動しないこと，すなわちエネルギー保存則が得られた．

５．運動方程式とその解：質点に一定の力がはたらく場合

次に簡単な例題として，質点に一定の力（外力）がはたらく場合の運動方程式を考えよう．運動方程式 (6) の右辺が時間に依存しない定ベクトル $\vec{F}$ の場合は，微分方程式

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{16}$$

を解けばよい．この両辺を m で割ってから t で積分すると，

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}t + \vec{C}_1 = \frac{\vec{F}}{m}t + \vec{v}_0 \tag{17}$$

と書くことができる．$\vec{C}_1$ は積分定数であるが，(8) 式以下の議論と同様にして，初期速度 $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$ を使って書き換えた．この式の両辺をもう一度積分すると

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}}{2m}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C}_2 = \frac{\vec{F}}{2m}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{18}$$

となる．$\vec{C}_2$ は積分定数だが，$\vec{C}_1$ と同様に，初期位置 $\vec{r}(0)=\vec{r}_0$ で置き換えた．ここでも，運動方程式の両辺を 2 回積分することで，質点の軌道 $\vec{r}(t)$ が得られたことに注意してほしい．

６．エネルギー保存則：質点に一定の力がはたらく場合

質点に一定の力がはたらく場合のエネルギー保存則を確認しよう．(12) 式と同様に，運動方程式 (16) の両辺と $\dot{\vec{r}}$ との内積をとると，

$$m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F} \tag{19}$$

となる．これは，(14) 式と同様に，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\cdot\vec{F}\right) \tag{20}$$

と書き直せる．右辺の変形では，$\vec{F}$ が時間に依存しない定ベクトルであること（$\dot{\vec{F}}=0$）を使った．(20) 式のかっこの中を微分して (19) 式の右辺になることを確認してみてほしい．(20) 式の両辺を $t=0$ から $t=t_1$ まで積分すると

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\cdot\vec{F}\right)\mathrm{d}t\\
\Rightarrow\quad&\left[\frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2\right]_0^{t_1}=\left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right]_0^{t_1}\\
\Rightarrow\quad&\frac{1}{2}m|\vec{v}(t_1)|^2-\frac{1}{2}m|\vec{v}(0)|^2=\vec{r}(t_1)\cdot\vec{F}-\vec{r}(0)\cdot\vec{F}=(\vec{r}(t_1)-\vec{r}(0))\cdot\vec{F}
\end{aligned} \tag{21}$$

となる．左辺は時刻 $t=0$ から $t=t_1$ までの質点の運動エネルギーの変化量を表している．一方，$\vec{r}(t_1)-\vec{r}(0)$ が時刻 $t=0$ から $t=t_1$ までの質点の変位であるから（ベクトルの矢印を描いてみよう），右辺は力が質点にした仕事である（ベクトルの各成分を使って書いてみよう．仕事の定義，すなわち [変位 $\times$ 力の大きさ] になっていることがわかるだろう）．つまり，(21) 式も，質点の運動エネルギーはされた仕事の分しか変化しないこと，すなわち，運動している最中にどこかへエネルギーが逃げてしまったり（そのような状況を力学では「散逸」と呼ぶ），力による仕事以外の何かエネルギーが外から入ってくることはないこと，すなわちエネルギー保存則を表している．

７．エネルギー保存則：質点にはたらく力が保存力の場合

ここでは，力が位置の関数の場合を考えよう．例えば，一端が固定されたバネの先に質点が付いている場合，質点にはたらくバネの力は質点の位置（バネの伸び）に比例する．また，太陽を原点に固定したときに，惑星にはたらく万有引力も惑星の位置（太陽との距離）に依存する．ここでは簡単のため，１次元の場合を考える．この場合，位置 x に依存する力 $f(x)$ をもちいて運動方程式は

$$m\ddot{x}=f(x) \tag{22}$$

となる（力を表す変数エフが小文字 f になっているのには大した意味はなく F でも全く問題ない）．この場合にも，エネルギー保存則が成り立つことを確認しよう（実はあとで示すように，

この場合には運動方程式を解いて一般解を求めるのは１次元でも難しい)．運動方程式の両辺に $\dot{x}$ をかけて積分すると

$$
\begin{aligned}
& m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}f(x) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow \quad & \int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \quad & \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^{t_1} = \int_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{2}m(v(t_1))^2 - \frac{1}{2}m(v(0))^2 = \int_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{23}
$$

となる．ただし，時刻 $t = 0, t_1$ における質点の位置をそれぞれ $x = 0, x_1$ とした．

ここで，

$$
U(x) \equiv -\int_0^x f(x')\mathrm{d}x' \tag{24}
$$

とする．右辺の x'（エックスダッシュ）は積分変数であり，微分（ラグランジュの記法）ではないことに注意．つまり，逆に

$$
f(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} \tag{25}
$$

である．(25) 式を (23) 式右辺に代入すると，

$$
\int_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\int_{U(0)}^{U(x_1)}\mathrm{d}U(x) = -\left[U(x)\right]_{U(0)}^{U(x_1)} = U(0) - U(x_1) \tag{26}
$$

であるから，(23) 式は以下のように書き換えることができる．

$$
\frac{1}{2}m(v(t_1))^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}m(v(0))^2 + U(0) \tag{27}
$$

このとき，$K = \frac{1}{2}m(v(t_1))^2$ は時刻 t_1 における質点の運動エネルギーであり，$U(x_1)$ を質点の**位置エネルギー**もしくは**ポテンシャルエネルギー**という．右辺は初期値で決まる定数であるから，上式は，エネルギー保存則

$$
\frac{1}{2}m(v(t))^2 + U(x) = E \quad (\text{一定}) \tag{28}
$$

を表している．この式を**エネルギー積分**という．

(25) 式からわかるように，力が位置だけで決まる１次元の運動では，力はポテンシャルエネルギー $U(x)$ の微分により導かれる．このような力を**保存力**という．

軌道については，$E - U(x) > 0$ の場合には，(28) 式を v について解いて積分することにより

$$
\begin{aligned}
& v^2 = \frac{2(E - U(x))}{m} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t) = \pm\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}} \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{\mathrm{d}x}{\pm\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}} = \int \mathrm{d}t = t + C_1
\end{aligned} \tag{29}
$$

となり，時間 t と質点の位置 x の関係が得られる（C_1 は初期値で決まる積分定数）．(29) 式が**変数分離形**（左辺が x のみの関数，右辺が t のみの関数に分離されてそれぞれ独立に積分できる形になっている）になっていることに注意しよう．これに初期値などを入れることで，積分定数 C_1 が具体的に定まり，保存力がはたらく質点の運動方程式の一般解が得られる．これ以上は $U(x)$ もしくは力 $f(x)$ の具体的な関数形が与えられなければ計算は進められない．さらに左辺の積分が実行できたとしても，x について解く必要があるが，一般には，１次元の問題でも限られた場合にしかそれはできない．万有引力も保存力であるから，惑星の運動を表す運動方程式の一般解も (29) 式のような形になることをここでは予告しておこう．

(29) 式を見ると，微分方程式を使ってもあまり得した気分にならないかも知れない．確かに，古典力学の授業では，解ける微分方程式しか扱わないことが多い．しかし，数学者たちはさまざまな種類の微分方程式の理論を体系化してきており，物理のみならず多くの科学技術を研究するうえで非常に有用な微分方程式とその解法が研究されてきた．それらを駆使して，次回以降も，古典力学のさまざまな問題を表す微分方程式を解いていく．それを通して微分方程式の威力とありがたみがわかっていくと思う．さらに，近年では，解析的に解を導出する方法が発見されていない（手で解く方法が発見されていない）**非線形**の微分方程式（たとえばカオスを生み出すような）をコンピュータをもちいて数値的に解く方法（**数値解法**，**シミュレーション**）が発展してきており，そのような従来の物理学の理論では扱いが困難であった**複雑系科学**のさまざまな問題の研究が発展してきている．微分方程式の分類と解法については，情報学部自然情報学科では，２年次の計算情報学１，特に数値解法については計算情報学２などで詳しい授業が行われるので，興味のある人はぜひ履修してみてほしい．

８．まとめ：ニュートンの運動の３法則がもたらしたもの

質点にはたらく力と初期条件が与えられれば，運動方程式を解くことにより，任意の時刻の軌道が決まるということがわかった．これは初期状態によって未来（運命）が決まることを表している．たとえば，ボーリングは投げた瞬間にストライクになるかどうか，どのピンが倒れるか，運命は確定している．実は，ある種の運動に関しては，現在の状態から過去を知ることもできる．たとえば惑星の周期的な運動などでは，現在の惑星の位置がわかれば過去のある任意の時刻における位置も確定する．これはカレンダーと一緒である（今日の曜日がわかれば過去未来任意の日付の曜日が確定する）．これを古典力学における**因果律**という．これにより，森羅万象が神の摂理で決まると信じていた人々に，**世界観の根本的な変革**をもたらした．ニュートンの運動の３法則の最大の意義は，このような新たな世界観を確立したことであるともいえよう．もっともこのような世界観は，のちに**量子力学**や**カオス**の発見によって覆されてしまうのだが（アインシュタインは「神はサイコロを振らない」と言って最後まで量子力学を受け入れなかったとされる）．

演習問題

以下では，質量 m の質点の運動を考える．空気抵抗は考えない．

問１ 質点が１次元 x 軸上を一定の力 F を受けて運動している．この場合の運動方程式を立てて，初期条件 $x(0) = 0, v(0) = 0$ のもとでの初期値問題を解いて，一般解を求めよ．解が初期条件を満たすことを検算すること．

問２ 上の場合の運動方程式について，境界条件 $x(0) = x_0, x(t_1) = x_1$ のもとでの境界値問題を解いて，一般解を求めよ．解が境界条件を満たすことを検算すること．

問 3 質点を初速度 $\vec{v}_0 = (v_{0,x}, 0, v_{0,z})\,(v_{0,x}, v_{0,z} > 0)$ で原点から投げ上げる．z 軸下向きに重力加速度 g の重力がはたらいているとする．運動方程式を成分ごとに書くと

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg \tag{30}$$

となる．この初期値問題を解け．また，解 $x(t)$ と $z(t)$ を連立させて t を消去することにより，質点の軌道が xz 平面上の放物線になることを示せ．　このことから，最高点の x 座標が $x_A = v_{0,z}v_{0,x}/g$，最高点の z 座標が $z_A = v_{0,z}^2/(2g)$ であることがわかる．初速ベクトル（大きさを v_0 とする）と x 軸のなす角を α とすると，$v_{0,x} = v_0 \cos\alpha, v_{0,z} = v_0 \sin\alpha$ である．到達距離（質点が $z = 0$ に落ちてきたときの x 座標）$x_B = 2x_A$ を α の関数として求めよ．到達距離を最大にする α の値を求めよ．

問 4 **問 3** の問題を，異なる初期条件（$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = h(> 0), v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0, v_z(0) = 0$）のもとで解け．軌道の方程式も求めよ．また，プロ野球投手が初速 $v_0 = 40[\mathrm{m/s}](\fallingdotseq 140[\mathrm{km/h}])$ でボールを投げたとき，打者の前 $x = 18[\mathrm{m}]$ に到達するまでに z 方向下向きに落下する距離 Δz を求めよ．重力加速度は $g = 9.8[m/s^2]$ とせよ．

略解

問 1 $x(t) = \frac{F}{2m}t^2$

問 2 $x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + \left(\frac{x_1}{t_1} - \frac{F}{2m}t_1 - \frac{x_0}{t_1}\right)t + x_0$

問 3 $x(t) = v_{0,x}t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2$．ベクトルで書くと，$\vec{r}(t) = v_{0,x}t\vec{e}_x + (v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{e}_z$．軌道は

$$z = -\frac{g}{2v_{0,x}^2}\left(x - \frac{v_{0,z}v_{0,x}}{g}\right)^2 + \frac{v_{0,z}^2}{2g}, \quad y = 0. \tag{31}$$

$x_B = (v_0^2/g)\sin(2\alpha)$．$\alpha = \pi/4$.

問 4 $x(t) = v_0 t, y(t) = 0, z(t) = -(g/2)t^2 + h$．軌道の式は，$z = -(g/2)(x/v_0)^2 + h = h - \Delta z$ および $y = 0$．$\Delta z \fallingdotseq 0.99$[m]，約 1[m] 落ちる．

なお，このノートには，間違い，事実誤認，不正確な表現，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください