# 物理学基礎１　第６回
## （２）ニュートンの運動の法則（続）

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

May 17, 2023

# 第３法則：作用・反作用の法則

1. 外力を受け，さらに互いに力をおよぼし合う２つの物体
2. $\vec{F}_1, \vec{F}_2$: 物体 1, 2 にはたらく外力
3. $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ 物体 2 が 1 におよぼす力と 1 が 2 におよぼす力

## 運動方程式

$$m_1 \dot{\vec{v}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \tag{1}$$

$$m_2 \dot{\vec{v}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \tag{2}$$

辺々加えて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \tag{3}$$

# 第３法則：作用・反作用の法則

外力がはたらかない場合 ($\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$)

**運動量保存則**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \tag{4}$$

が成り立つ必要があるので，(3) 式と (4) 式より

**作用・反作用の法則**

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{5}$$

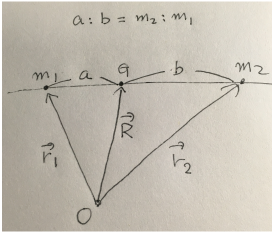
３個以上の物体からなる系に対しても同様の関係が成り立つ．

# 重心（質量中心）

物体 1 および 2 の位置ベクトルを $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ とするとき，

重心の位置: $$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{6}$$

重心の速度: $$\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$




⇒ 全運動量: $$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{V} \tag{8}$$

⇒ 全質量が重心に集まり，重心の速度 $\vec{V}$ で運動するときの運動量

# 重心（質量中心）

運動方程式 (3)，作用・反作用の法則 (5)，(8) 式から，

## 重心の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\vec{P}} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{V}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{9}$$

- 重心の運動は，全質量が重心に集まり，そこに外力が集中した場合と同じものとなる．
- 外力がゼロなら，重心は（静止も含め）等速度直線運動する．

## 質量の比較

2 つの物体が互いに力をおよぼし合って加速度 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$（大きさ $a_1, a_2$）を生じたとする．(4) 式の運動量保存則を変形してベクトルの大きさの等式は

$$\left| m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} \right| = \left| -m_2 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} \right| \quad \Rightarrow \quad m_1 \left| \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} \right| = m_2 \left| \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} \right| \tag{10}$$

と書ける．$|\mathrm{d}\vec{v}_1/\mathrm{d}t| = a_1$, $|\mathrm{d}\vec{v}_2/\mathrm{d}t| = a_2$ を代入すると

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \tag{11}$$

となる．したがって加速度の比がわかれば質量の比がわかる．

# 力積

運動方程式 $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$ の両辺を時間で積分すると

## 力積

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')\mathrm{d}t' = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) \tag{12}$$

- 積分型の運動方程式．
- 第２法則の別表現：ある時間内における質点の運動量の変化は，その時間内に質点に作用した力積に等しい（プリンキピアの表現はこれに近い）．
- 撃力のように短時間に急激に力が変化する場合にも使える．

# 衝突

質量 $m$ のボールが速さ $v(>0)$ で飛んできて静止した壁に垂直にあたり，速さ $v'(>0)$ ではねかえる場合，ボールは壁から撃力を受ける．

- 衝突前の運動量：$p = mv$
- 衝突後の運動量：$p' = -mv'$
- 壁がボールにおよぼした力積：$I = p' - p = -m(v + v')$

  壁がボールにおよぼした力の詳細がわからなくてもその積分はわかる．

## はねかえり（反発）係数

$$e \equiv v'/v \quad \text{（通常の場合 } 0 \leq e \leq 1\text{）}$$

- $e = 1$：完全弾性衝突．
- $e = 0$：完全非弾性衝突．

# 演習問題

1[m] の高さから毎秒 1[kg] の砂を床に落とす．砂は床に落ちたら跳ね返らず静止すると仮定する．砂が床に当たることにより床におよぼす力を求めよう．重力加速度は一定 $g = 9.8[m/s^2]$ とする．

1. 砂が床にあたるときの速さを求めよ．
2. 砂は床で止まるのではねかえり係数は $e = 0$ である．このことをもちいて，力積についての式 (12) を書き，１秒間の力の平均もしくは１秒間分の力積を求めよ．

[答]

1. エネルギー保存則 $(1/2)mv^2 = mgh$ から，$v = \sqrt{2gh} = 4.4[m/s]$
2. 式 (12) は $Ft = mv$ で，$t = 1[s], m = 1[kg]$ を代入して，$F = 4.4[N]$

# 角運動量と力のモーメント

運動方程式 $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$ と位置ベクトル $\vec{r}$ の外積をとると

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \tag{13}$$

ここで，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) \tag{14}$$

において，$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ と $\vec{p} = m\vec{v}$ は平行なので外積は $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$ である．このことから，(13) 式は

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) \tag{15}$$

と書き直すことができる．

# 角運動量と力のモーメント

## 角運動量と力のモーメント

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

- $\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$：（原点に関する）力 $\vec{F}$ のモーメント (moment)
- $\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$：角運動量 (angular momentum)
- 運動する質点の角運動量の時間変化は，質点にはたらく力のモーメントに等しい．

# 中心力による力のモーメントと角運動量保存則

- 中心力：$\vec{r}$ と $\vec{F}$ が平行
  - $\vec{N} = 0$.
  - 万有引力やクーロン力
  - $\vec{\ell}$：一定　$\Rightarrow$　角運動量保存則
  - $\vec{\ell}$ は $\vec{r}$ と $\vec{p} = m\vec{v}$ の両方に垂直
  - $\vec{\ell}$ の方向が一定 $\Rightarrow \vec{r}$ と $\vec{v}$ を含む平面が一定に保たれる.

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}$$

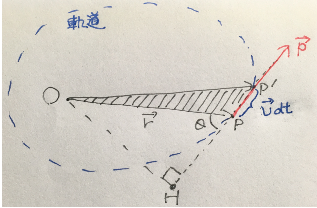
中心力を受ける質点の軌道はつねに力の中心を含む同一平面内にある.　$\Rightarrow$　惑星の軌道は平面上にある.

# 面積速度

質量 $m$ の質点 P が原点 O から中心力を受けて運動している．

- $P \to P'$：微小時間 $\mathrm{d}t$ の間の変位 $= \vec{v}\mathrm{d}t$
- 三角形 $OPP'$ の面積 $= \triangle OPP' = \vec{r}$ が $\mathrm{d}t$ の間に掃過（通過）する面積
- 面積速度 $= s \equiv \dfrac{\triangle OPP'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}|\vec{v}| \times \overline{OH}$
- 角運動量の大きさ

$$
\begin{aligned}
&= |\vec{\ell}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = rp\sin\theta = p\overline{OH} \\
&= mv\overline{OH} \\
&\therefore \quad s = \frac{|\vec{\ell}|}{2m} = (\text{一定})
\end{aligned}
$$




中心力を受ける質点の面積速度は一定（ケプラーの第２法則）