2023 年度物理学基礎１（時田）

演習問題：単振動の一般解と減衰振動　ver.20230524

ここでは前回扱った単振動の微分方程式を一般的に解く方法を考え，さらに減衰振動について考える．一般的な微分方程式の解法については２年前期の「計算情報学１」で扱う．

１．数学的準備

問 1　指数関数 e^x，三角関数 $\cos\alpha, \sin\alpha$ のマクローリン展開をそれぞれ書け．

問 2　問 1 の e^x の展開に虚数 $x = \pm\mathrm{i}\alpha$ を機械的に代入し，$\mathrm{i}^2 = -1$ をもちいて実部と虚部に分けて，三角関数のマクローリン展開と比べることによって，**オイラーの公式**

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha \tag{1}$$

を導け．さらに，$\sin\alpha, \cos\alpha$ について解いて，三角関数を虚数の指数関数で表す式

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}} \tag{2}$$

を求めよ．

問 3　問 2 の関係式をもちいて単振動の微分方程式

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{3}$$

の一般解を得るために，まず $x = \mathrm{e}^{pt}$ という形の解の候補を微分方程式に代入して，それが解となる p の条件を求めよ．

問 4　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ と $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ は**一次独立**（一方を他方の定数倍で表せない）であるから，任意定数（複素数）A と B をもちいた**一次結合**

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{4}$$

が**一般解**（初期条件や境界条件を代入して A, B を決定することにより単振動の任意の運動を表すことができる解）ということになる．(1) 式をもちいて，解 (4) が

$$x(t) = (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \tag{5}$$

とも書けることを示せ．ここで，$C_1 \equiv A+B$, $C_2 \equiv \mathrm{i}(A-B)$ を実数として，さらに図 1 のように $C_1 = a\cos\phi$, $-C_2 = a\sin\phi$ と極座標変換することにより，

$$x(t) = a\cos(\omega t + \phi) \tag{6}$$

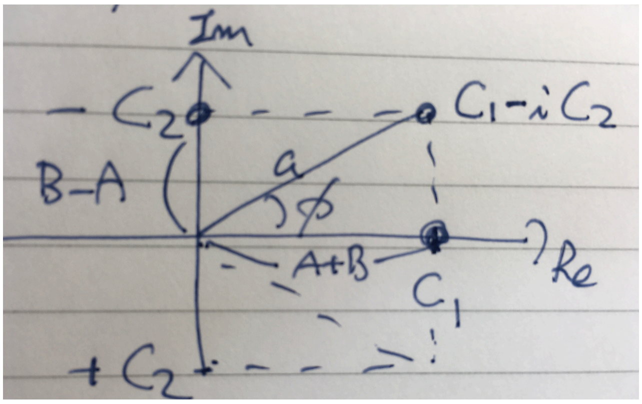

図 1　複素数の極座標変換

の形式の実数の一般解が得られることを示せ．

問 5　適当な初期条件（たとえば $x(0)=0, \dot{x}(0)=v_0(>0)$ などの）により A, B を定めよ．バネの図を描いてどのような運動かを説明せよ．

2．減衰振動

現実の物体の運動には必ず抵抗があり，振動はいつかは必ず停止する．そのような場合のひとつで，厳密に解くことができるのが，速度に比例する抵抗が単振動に加わったときの運動である．

問 6　質量 m の質点がばね定数 k をもつばねの一端に取り付けられ，ばねの他端は固定されているとする．質点に速度に比例する抵抗（比例定数を $B(>0)$ とする）がかかるときの運動方程式を書け．さらに，$k/m=\omega_0^2, B/m=2\gamma$ とおいて，運動方程式を書き換えよ．

問 7　解を $x=\mathrm{e}^{pt}$ と仮定して，運動方程式に代入し，p の満たすべき条件を求めよ．ただし，$\mathrm{e}^{pt}>0$ と仮定してよい．

問 8　$\gamma<\omega_0$ の場合について，運動方程式の一般解，特に問 4 と同様な形式の実数の一般解を求めよ．

問 9　問 8 における実数の一般解が単振動の解 (6) と異なるのは，t が増すと次第に減少する因子 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ がかかっていること，および角振動数が $\omega=\sqrt{k/m}$ でなく，$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ に減っていることである（回転が遅い）．このような運動を**減衰振動**（damped oscillation），γ を**減衰定数**という．パラメータの値を $\gamma=1, \omega'=5$

として，初期条件 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ のもとでの，横軸 t，縦軸 $x(t)$ の $t=0\sim5$ のグラフを WolframAlpha に描かせてみよ．

問 10　減衰振動で速度 $\dot{x}$ が 0 となる時刻は，$\dot{x}(t)=0$ から，$\tan(\omega' t+\phi)=-\gamma/\omega'$ を満たす t である．そのような t を $t_1, t_2, t_3, \cdots$ とすると，$t_{n+1}-t_n=\pi/\omega'$（半周期）であり，そのときの x を $x_1, x_2, x_3, \cdots$ とすると，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=-\mathrm{e}^{-\pi\gamma/\omega'} \tag{7}$$

が成り立つことを示せ.

問 11　$\gamma>\omega_0$ の場合の一般解を求め，パラメータの値を $\gamma=\sqrt{2}, \omega_0=1$ として，初期条件 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ のもとでの，横軸 t，縦軸 $x(t)$ の $t=0\sim10$ のグラフを WolframAlpha に描かせてみよ．

問 12　$\gamma=\omega_0$ の場合の一般解を求めよう．このとき (23) 式で $p_1=p_2$ としても独立な定数を 2 個入れる余地がなくなり，一般解は得られない．しかし，$p_1=p_2=p$ とした $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ の他に，$t\mathrm{e}^{-\gamma t}$ も運動方程式 (13) を満たすことを代入して確認せよ.

問 13　問 12 より，$\gamma=\omega_0$ の場合の一般解は

$$x(t)=(C+Dt)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{8}$$

という形になる．このような運動を**臨界減衰**（critical damping）という．ドアの上に付いている「ドアチェック」という装置は，ドアの開く角度の時間変化が (8) 式に従うようにダンパーが設計されており，ドアが閉まるときに音がしないようになっている．パラメータの値を $\gamma=1$ として，初期条件 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ のもとでの，横軸 t，縦軸 $x(t)$ の $t=0\sim10$ のグラフを WolframAlpha に描かせてみよ.

[解答例]

問 1　第１回講義資料「微積分」などを参照。

問 2　略.

問 3　$x = \mathrm{e}^{pt}$ を２回微分して単振動の微分方程式に代入すると，$p^2\mathrm{e}^{pt} = -\omega^2\mathrm{e}^{pt}$ となるから，$p = \pm\mathrm{i}\omega$ とすれば微分方程式を満たす**特解**となる．特解とは微分方程式を満たす特別な解のことで，一般には複数存在する（微分方程式に解が存在する場合は）.

問 4

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \tag{9}$$
$$= (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \tag{10}$$

このとき，$C_1 = A + B, C_2 = \mathrm{i}(A - B)$ として，C_1, C_2 が両方とも実数であれば $x(t)$ も実数となる．$A = (1/2)(C_1 - \mathrm{i}C_2)$, $B = (1/2)(C_1 + \mathrm{i}C_2)$ だから，$A = B^*$（B^* は B の複素共役）が，$x(t)$ が実数となる条件である．任意定数を $C_1 = a\cos\phi, -C_2 = a\sin\phi$ と極座標変換すると，

$$x(t) = a(\cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi) \tag{11}$$
$$= a\cos(\omega t + \phi) \tag{12}$$

のように実数の一般解を表すこともできる.

問 5　略．初期条件を満たすことを検算すること.

問 6

$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x}, \qquad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{13}$$

問 7　$x = \mathrm{e}^{pt}$ と仮定して運動方程式に代入すると $(p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2)\mathrm{e}^{pt} = 0$ となるが，$\mathrm{e}^{pt} \neq 0$ だから両辺を e^{pt} で割って，二次方程式 $p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$ が，p が満たすべき条件である．これを解いて，

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{14}$$

問 8　$\omega'^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ とおけば，(14) 式の２つの解は，$p = -\gamma \pm \mathrm{i}\omega'$ となるから，$\mathrm{e}^{-\gamma t + \mathrm{i}\omega' t}$ と $\mathrm{e}^{-\gamma t - \mathrm{i}\omega' t}$ が一次独立な解であり，一般解はそれらの一次結合

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t + \mathrm{i}\omega' t} + B\mathrm{e}^{-\gamma t - \mathrm{i}\omega' t} \tag{15}$$
$$= \mathrm{e}^{-\gamma t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}) \tag{16}$$

で与えられる．$\mathrm{e}^{-\gamma t}$ は実数だから，問 4 と同様にして，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\mathrm{e}^{-\gamma t}(\cos\omega' t\cos\phi - \sin\omega' t\sin\phi) &(17)\\
&= a\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\phi) &(18)
\end{aligned}
$$

のように実数の一般解を表すことができる．

問 9　位置に関する初期条件 $1 = x(0) = a\cos\phi$ より，$a = 1/\cos\phi$．また，速度に関する初期条件 $0 = \dot{x}(0) = -a\gamma\cos\phi - a\omega'\sin\phi$ から，$\tan\phi = \sin\phi/\cos\phi = -\gamma/\omega' = -1/5$．これらの条件を満たす a,ϕ の値を使ってグラフを描けばよい．図 2 は，WolframAlpha に

```
Plot[1/(Cos[Arctan[-1/5]])*Exp[-t]*Cos[5*t+Arctan[-1/5]],{t,0,5},{y,-1,1}]
```

を入力した結果である．

問 10

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{a\mathrm{e}^{-\gamma t_{n+1}}\cos(\omega' t_{n+1}+\phi)}{a\mathrm{e}^{-\gamma t_n}\cos(\omega' t_n+\phi)} = \mathrm{e}^{-\gamma(t_{n+1}-t_n)}\frac{\cos(\omega' t_n+\phi+\pi)}{\cos(\omega' t_n+\phi)} &(19)\\
&= \mathrm{e}^{-\gamma\pi/\omega'}\frac{-\cos(\omega' t_n+\phi)}{\cos(\omega' t_n+\phi)} &(20)\\
&= -\mathrm{e}^{-\gamma\pi/\omega'} &(21)
\end{aligned}
$$

この式の対数を取ると，

$$
\frac{2\pi\gamma}{\omega'} = 2\log\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \tag{22}
$$

となるが，この量を**対数減衰度**ということもある．

問 11　$\gamma > \omega_0$ の場合，p の 2 つの解はどちらも負の実数であり，

$$
p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2},\quad p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \tag{23}
$$

であるから，一般解は

$$
x(t) = C_1\mathrm{e}^{p_1 t} + C_2\mathrm{e}^{p_2 t} \tag{24}
$$

で与えられる．この場合を**過減衰**という．位置に関する初期条件 $1 = x(0) = C_1 + C_2$, 速度に関する初期条件 $0 = \dot{x}(0) = C_1 p_1 + C_2 p_2$ を C_1, C_2 について解

くと,

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right)(> 0) \tag{25}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right)(< 0) \tag{26}$$

となるので，解は

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right)\mathrm{e}^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right)\mathrm{e}^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} \tag{27}$$

これに $\gamma = \sqrt{2}, \omega_0 = 1$ を入れたもののグラフを描く．図 3 は，WolframAlpha に
`Plot[(1/2)(1+Sqrt[2])Exp[(-Sqrt[2]+1)t]+(1/2)(1-Sqrt[2])Exp[(-Sqrt[2]-1)t],{t,0,10}]`
を入力した結果である．

問 12　略

問 13　位置に関する初期条件 $1 = x(0) = C$，速度に関する初期条件 $0 = \dot{x}(0) = D - C\gamma$ より，$C = 1, D = \gamma$ となるので,

$$x(t) = (1 + \gamma t)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{28}$$

に，$\gamma = 1$ を入れたもののグラフを描く．図 4 は，WolframAlpha に
`Plot[(1+t)Exp[-t],{t,0,10}]`
を入力した結果である．

なお，このノートには，間違い，事実誤認，不正確な表現，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください．

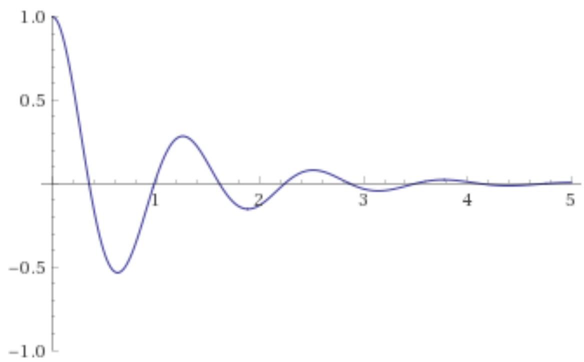

図 2　減衰振動

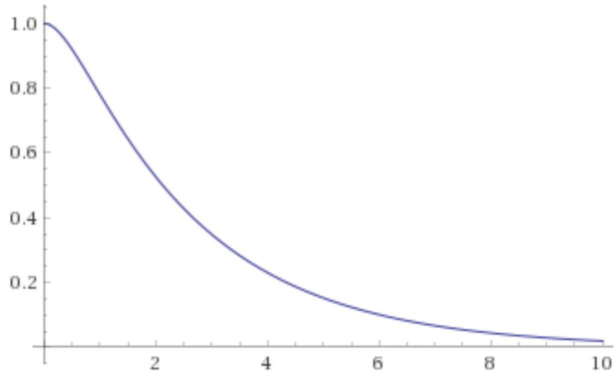

図 3　臨界減衰

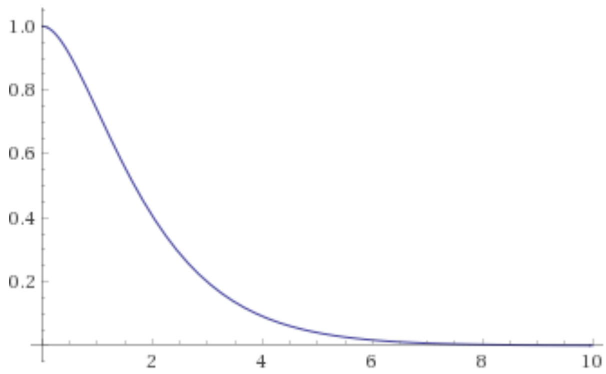

図 4　過減衰