楕円　ver.20230531

１．円錐曲線

人類史上最強の「占星術師」ティコ・ブラーエに弟子入りしたケプラーは，ティコがまとめた惑星の運動のデータを解析し，惑星の軌道が太陽を焦点とする楕円であることを発見した（ケプラーの第１法則)[1]．楕円は，円錐を平面で切ることにより切り口に現れる「円錐曲線」の一種である．図１に示すように，底面が x, y 平面と平行な円錐を，(a) 底面にかかる母線に平行でない平面で切るとその切り口は双曲線に，(b) 母線に平行な平面で切るとその切り口は放物線に，そして，(c) 底面にかからない平面で斜めに切るとその切り口は楕円になる．

ギリシャの数学者・天文学者アポロニウス（B.C.262 頃 - B.C.190 頃）は，その著書「円錐曲線 ($K\omega\nu\iota\kappa\acute{\alpha}$)」において，「２定点からの距離の和が一定の曲線は楕円であり，差が一定の曲線は双曲線である」と記している．今後の授業ではケプラーの法則からニュートンによる万有引力の法則を導く予定であるが，その過程で用いる楕円の極座標表示と媒介変数表示を以下で導いておこう．

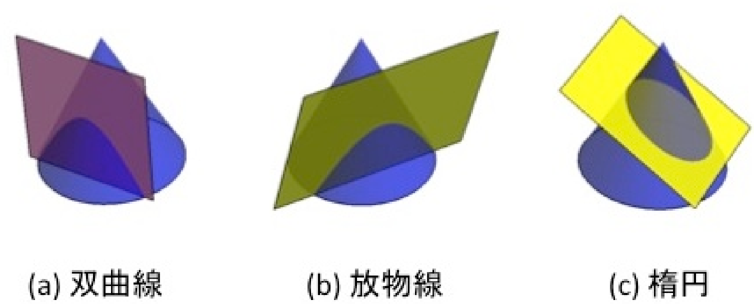

Figure 1: 円錐曲線

２．楕円

図２のような，原点を中心とする長軸半径が a，短軸半径が $b(<= a)$ の楕円を考える．点 $\mathrm{P}(x, y)$ は楕円上の任意の点とする．点 F および F' は楕円の焦点であり，アポロニウスが言った「２定点」とはこれら２つの焦点に他ならない．焦点間の距離を FF'$= 2c$ とする．F'P$= r'$, FP$= r$ とすると，

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{1}$$

である．これらをもちいて，アポロニウスの楕円の定義を式で表すと，

$$r + r' = (\text{一定}) = 2a \tag{2}$$

となる．「一定」の値が $2a$ であることは，点 P が x 軸上 $(a, 0)$ にあるときを考えれば明らかであろう．図より $a > c$ であることにも注意しておこう．

[1] このことはデータサイエンス全盛の現代にあっても大きな教訓として，特に情報学部の学生は心に刻んでおく必要がある．データをどんなに充実させても数学を知らなければ「神の御意（惑星の動きをつかさどる法則)」には到達できないということだ．

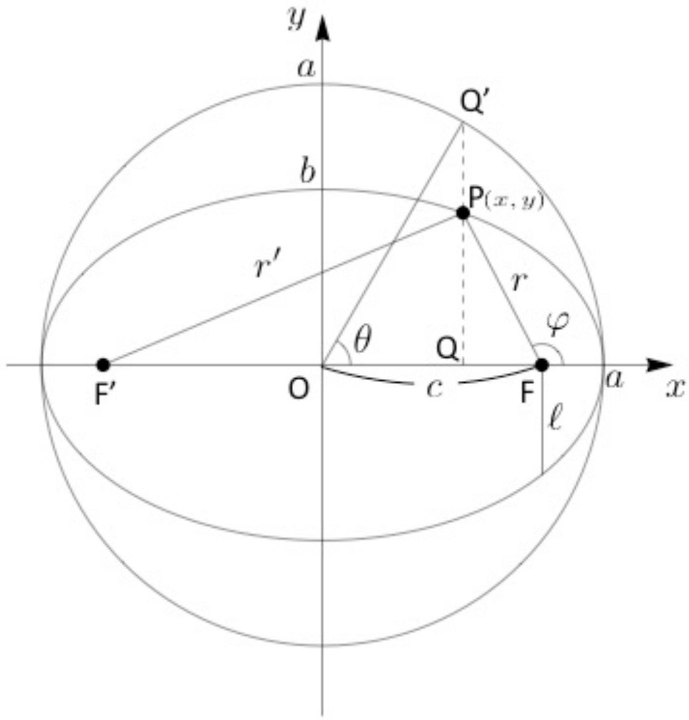

Figure 2: 楕円

(2) 式に (1) 式を代入して，両辺を２乗することにより，

$$(x-c)^2+y^2+2\sqrt{\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}}+(x+c)^2+y^2=4a^2 \tag{3}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-(2a^2-c^2)=-\sqrt{\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}} \tag{4}$$

さらに両辺を２乗して

$$\begin{aligned}\{x^2+y^2-(2a^2-c^2)\}^2 &= (x-c)^2(x+c)^2+(x-c)^2y^2+(x+c)^2y^2+y^4 &(5)\\ &= (x^2-c^2)^2+2(x^2+c^2)y^2+y^4 &(6)\\ &= x^4-2c^2x^2+c^4+2(x^2+c^2)y^2+y^4 &(7)\\ &= x^4+y^4+c^4+2x^2y^2+2x^2c^2+2c^2y^2-4c^2x^2 &(8)\\ &= (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2 &(9)\end{aligned}$$

となる．展開すると両辺に現れる x^4, y^4 の項は互いにキャンセルするので，

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{10}$$

という式が得られるが，両辺を $a^2(a^2-c^2)$ で割って，$b^2=a^2-c^2$（これは点 P が y 軸上 $(0,b)$ にあるときの直角三角形 POF における三平方の定理より明らか）を使うと，

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{11}$$

という直交座標 x, y をもちいた楕円の式が得られる．

３．楕円の極座標表示

ここで，楕円の離心率を

$$\varepsilon \equiv \frac{c}{a} \tag{12}$$

と定義する．これは２つの焦点 F と F' が離れている度合いである．$\varepsilon = 0$ ならば，円（$a = b$）となる．焦点 F と P との距離 r と，FP が x 軸となす角 φ による極座標 (r, φ) をもちいると，三角形 F'PQ(Q は P から x 軸におろした垂線と x 軸との交点) に三平方の定理を適用して，

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{(2c + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} && (13) \\ &= \sqrt{(2c)^2 + 4cr\cos\varphi + r^2} && (14) \end{aligned}$$

となる（図の φ の場合 $r\cos\varphi < 0$ ゆえ F'Q$= 2c + r\cos\varphi$ であることに注意）．$r + r' = 2a$ より $r' = 2a - r$ なので，上式は $2a - r = \sqrt{(2c)^2 + 4cr\cos\varphi + r^2}$ と書ける．この両辺を２乗して，

$$\begin{aligned} & (2a - r)^2 = (2c)^2 + r^2 + 4cr\cos\varphi && (15) \\ \therefore\quad & (2a)^2 - 4ar + r^2 = (2c)^2 + r^2 + 4cr\cos\varphi && (16) \\ \therefore\quad & r(a + c\cos\varphi) = a^2 - c^2 = b^2 && (17) \end{aligned}$$

ここで，$\varphi = \pi/2$ のときの r の値を ℓ とする（図２では見やすさのために $\varphi = 3\pi/2$ の時の r を ℓ としている）．ℓ は半直弦とよばれる．(17) 式に $r = \ell, \varphi = \pi/2$ を入れて ℓ について解くと

$$\ell = \frac{b^2}{a} \tag{18}$$

となる．よって，半直弦 ℓ が a, b で表されたので，(17) 式を書き換えた

$$r\left(\frac{a}{b^2} + \frac{c}{b^2}\cos\varphi\right) = 1 \tag{19}$$

に，(18) 式と $\frac{c}{b^2} = \frac{a}{b^2}\frac{c}{a} = \frac{\varepsilon}{\ell}$ を代入すると，楕円の極座標表示の式

$$\begin{aligned} & r\left(\frac{1 + \varepsilon\cos\varphi}{\ell}\right) = 1 && (20) \\ \therefore\quad & \boxed{r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} && (21) \end{aligned}$$

が得られる．

ここでは (12) 式から，$0 \leq \varepsilon < 1$ を仮定して楕円について考えたが，(21) 式は $\varepsilon = 1$ のときは放物線を表し，$\varepsilon > 1$ のときは双曲線を表す．このことは，(21) 式を，焦点 F を原点とする直交座標 $x' = r\cos\varphi, y' = r\sin\varphi$ に変換すると高校数学でもよく目にする二次曲線の式になることにより確認できる．

４．楕円の媒介変数表示

楕円の方程式 (11) 式は書き直すと

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \tag{22}$$

となるので，$x = \xi$, $(a/b)y = \eta$ とおくと，$\xi^2 + \eta^2 = a^2$ となる．これは ξ と η の座標による円の方程式である．つまり，楕円は円を y 方向に b/a の割合で長さを変えたものとみなすことができる．このことから，図 2 を見ると，媒介変数 θ をもちいて $y = a\sin\theta \times b/a = b\sin\theta$ と書けることがわかる．このことは，$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ が (11) 式を満たすことからも明らかである．よって，直角三角形 PQF における三平方の定理より

$$\begin{aligned}
r^2 &= (a\varepsilon - a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 && (23)\\
&= a^2\left\{(\varepsilon - \cos\theta)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2\theta\right\} && (24)\\
&= a^2(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta - \varepsilon^2\sin^2\theta) && (25)\\
&= a^2(1 - 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2\cos^2\theta) && (26)\\
&= a^2(1 - \varepsilon\cos\theta)^2 && (27)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{r = a(1 - \varepsilon\cos\theta)} \tag{28}$$

と楕円の媒介変数表示が得られる．途中, (10) 式下の $b^2 = a^2 - c^2$ を $(b/a)^2 = 1-(c/a)^2 = 1-\varepsilon^2$ と変形したものや $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ などを使った.

５．離心率

離心率については、高校で、

$$\varepsilon \equiv \frac{r(\text{焦点 F から円錐曲線上の任意の点 P までの距離})}{\text{P から準線までの距離}} \tag{29}$$

という定義を聞いたことがあるかも知れない（実は、現代的には、上記の量が一定の曲線を円錐曲線と定義する)。図 2 の設定では、準線の方程式は $x = a^2/c$ であり、(29) 式の定義でも $\varepsilon = c/a$ となることを確認することができる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{r}{a^2/c - x} = \frac{\sqrt{(c-x)^2 + y^2}}{a^2/c - x} = \frac{\sqrt{(c-x)^2 + (b^2/a^2)(a^2 - x^2)}}{a^2/c - x} && (30)\\
&= \frac{c}{a}\frac{\sqrt{a^2 - 2cx + (c/a)^2x^2}}{a - (c/a)x} = \frac{c}{a}\frac{\sqrt{\{a - (c/a)x\}^2}}{a - (c/a)x} && (31)\\
&= \frac{c}{a} && (32)
\end{aligned}$$

途中 (11) 式や $b^2 = a^2 - c^2$ などを使って y や b を消去した。

演習問題

問 1 質量 m の質点がばね定数 $k > 0$ のばねにとりつけられて単振動するときの，ばねののび x と質点の速度 $v = \dot{x}$ に関するエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E\,(> 0, \text{定数}) \tag{33}$$

をもちいて，単振動の軌道が相平面 $(x, \dot{x})$ 上で楕円となることを示せ．同じことを，解 $x = a\cos(\omega t)$ と $\dot{x}$ の式からも示せ．

問 2 $c = a\varepsilon$ と (18) 式 $\ell = b^2/a$，$b^2 + c^2 = a^2$ などを使って，半直弦 ℓ が a, b, ε により

$$\ell = a(1 - \varepsilon^2) = b\sqrt{1 - \varepsilon^2} \tag{34}$$

と表されることを示せ．

問 3 (11) 式を使って，長軸半径を $a = 2$，短軸半径を $b = 1$ として，楕円の図を WolframAlpha に描かせてみよ．

問 4 長軸半径を $a = 2$，短軸半径を $b = 1$ として，ℓ や ε を計算して (21) 式をそのまま WolframAlpha に入れても問 3 と同じ図は描いてくれない．(21) 式を使って直交座標 $(x(\varphi), y(\varphi))$ に戻して，`ParametricPlot` を使って楕円の図を WolframAlpha に描かせてみよ．

問 5 (28) 式についてもそのまま WolframAlpha に入力しても楕円を描いてはくれない．$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ を使って，長軸半径が $a = 2$，短軸半径が $b = 1$ のときの楕円の図を WolframAlpha に描かせてみよ．

問 6 任意の値の ℓ, ε に対する (21) 式は点 F を原点とする二次曲線を表す．(21) 式および焦点 F を原点とする直交座標 (x', y') 上の点 P の座標 $(x', y') = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ をもちいて，$\ell = 1, \varepsilon = 1$ のときに WolframAlpha に図を描かせて，それが放物線になることを確認せよ．

問 7 問 6 と同様にして，$\ell = 1, \varepsilon = 2$ のときに WolframAlpha に図を描かせて，それが双曲線になることを確認せよ．

解答例

問 1 エネルギー保存則は

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \tag{35}$$

と変形できるが，これは相平面 $(x, \dot{x})$ 上の楕円の方程式 (11) に他ならない（$k < m$ なら，長軸半径，短軸半径が $\sqrt{2E/k}, \sqrt{2E/m}$）．解を微分すると $v = \dot{x} = -a\omega\sin(\omega t)$ なので，

$$1 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{(a\omega)^2} \tag{36}$$

となり，解が，長軸半径，短軸半径が $a, a\omega$（$\omega < 1$ のとき）の楕円になることがわかる．

問 2 $c = a\varepsilon$ と (18) 式 $\ell = b^2/a$ を $b^2 + c^2 = a^2$ に代入して，

$$(a\varepsilon)^2 = a^2 - b^2 = a^2 - a\ell \ \Rightarrow \quad \ell = a(1-\varepsilon^2) \tag{37}$$

$$b^2 = a\ell = a^2(1-\varepsilon^2) \ \Rightarrow \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \ \Rightarrow \quad a = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{38}$$

$$\Rightarrow \quad \ell = a(1-\varepsilon^2) = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(1-\varepsilon^2) = b\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{39}$$

問 3 図 3 は，`Plot[x^2/2^2+y^2/1^2=1]` と入力した結果.

問 4 $a = 2, b = 1$ のとき，$\varepsilon = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a = \sqrt{3}/2$，$\ell = b^2/a = 1/2$ である．これを使って，直交座標に戻すと，

$$x = c + r\cos\varphi = \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{\ell\cos\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \sqrt{3} + \frac{\cos\varphi}{2(1 + (\sqrt{3}/2)\cos\varphi)} \tag{40}$$

$$y = r\sin\varphi = \frac{\ell\sin\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2(1 + (\sqrt{3}/2)\cos\varphi)} \tag{41}$$

となることをもちいて，

```
ParametricPlot[{Sqrt[3]+Cos[p]/(2(1+Sqrt[3]Cos[p]/2)),(実際は改行なしで)
               Sin[p]/(2(1+Sqrt[3]Cos[p]/2))},{p,0,2 Pi}]
```

と入力すると，問 3 と同じ図が出力される．

問 5 $a = 2, b = 1$ のとき，`ParametricPlot[{2Cos[t],Sin[t]},{t,0,2 Pi}]` と入力すると問 3 と同じ図が出力される．

問 6 図 4 は，`ParametricPlot[{Cos[p]/(1+Cos[p]),Sin[p]/(1+Cos[p])},{p,0,2 Pi}]` と入力したときの出力．楕円のような閉曲線にならないことに注意.

問 7 図は,`ParametricPlot[{Cos[p]/(1+2*Cos[p]),Sin[p]/(1+2*Cos[p])},{p,0,2 Pi}]` と入力したときの出力．これも楕円のような閉曲線にならないことに注意.

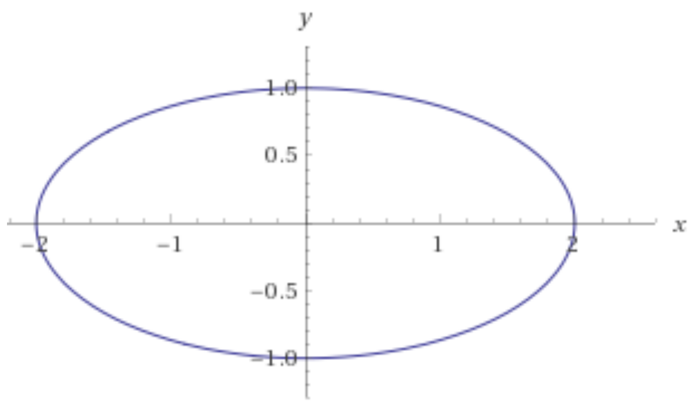

Figure 3: 楕円

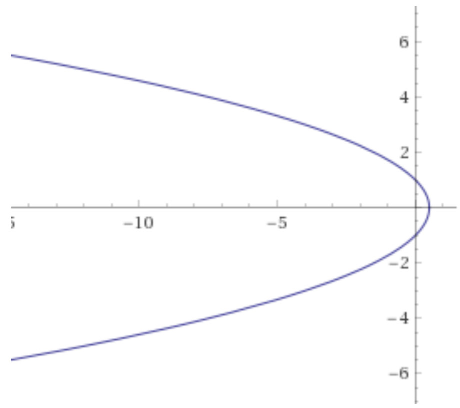

Figure 4: 放物線

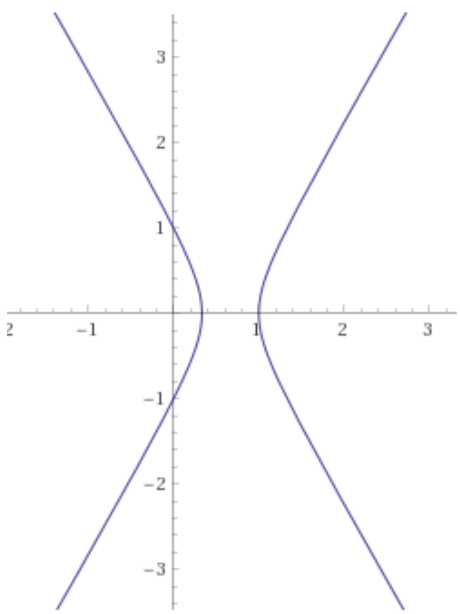

Figure 5: 双曲線