万有引力の法則からケプラーの法則へ　ver.20230621

以下では，ニュートンの第２法則（運動方程式）および万有引力の法則から逆にケプラーの３つの法則を導く．これにより，惑星の運動に関しては万有引力の法則がケプラーの３法則より基礎的な法則であることを確認することができる．以下でも太陽は焦点にあって動かず，惑星の位置を２次元極座標 (r,φ) で表すことにする．

１．楕円軌道

第９回授業資料 (17)(20) 式と第１０回授業資料 (19) 式の万有引力の法則をもちいると，惑星の運動方程式の２次元極座標表示は

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -G\frac{M}{r^2} \tag{1}$$

$$r^2\dot{\varphi} = h \tag{2}$$

と変形することができるが，すでに示したように方位角方向の式 (2) は面積速度一定（ケプラーの第２法則）を示している．惑星の運動を求めるためには，第４回授業資料４ページ以下や，第７回 [演習問題「抵抗をおよぼす媒質中での物体の運動」のときにやったように，上の式から $\dot{\varphi}$ を消去した r に関する微分方程式を２回積分して，$r = r(t)$ を求め，それをもとに $\varphi = \varphi(t)$ を求めればよい．さらにそれらから時間 t を消去することにより軌道の式 $r = r(\varphi)$ を求めればよい．しかしながら，後で示すように，$r(t), \varphi(t)$ は初等関数をもちいた簡単な形では求まらないため，以下ではまず軌道の式が楕円の方程式になること，すなわちケプラーの第１法則をダイレクトに導こう．

まず，r は φ を通して時間 t の関数であると考えると，(2) 式を用いて，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{h}{r^2} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \tag{3}$$

と書くことができる．ただし，$u \equiv 1/r$ であり，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi = (\mathrm{d}u/\mathrm{d}r)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi) = -(1/r^2)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi)$ を使った．さらにもう一度 t で微分して，(2) 式を用いると

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\dot{\varphi} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} \tag{4}$$

となり，これと (2) 式を (1) 式に代入することにより，

$$-\frac{h^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{h^2}{r^3} = -G\frac{M}{r^2} \tag{5}$$

となる．この両辺に $-r^2/h^2$ をかけることにより，u に関する線形２階非同次常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} \tag{6}$$

が得られる．非同次項 (GM/h^2) のない（右辺がゼロの）同次方程式は単振動の微分方程式と同等であり，一般解 $u_0 = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ をもつ（A, φ_0 は定数）（第７回授業演習問題「単振動の一般解と減衰振動」の「１．数学的準備」参照）．さらに，$u' \equiv GM/h^2$（定数）は微分方程式 (6) を満たす特解であるので（代入すれば満たすことは明らか），非同次線形常微分方程式 (6) の解は

$$u = u_o + u' = A\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{h^2} \tag{7}$$

となる（ただし $A \geq 0$ とする）（非同次線形常微分方程式の一般解が，その特解と同次微分方程式の一般解との和で表されることは，応用解析や微分方程式の教科書を参照して欲しい．また，このことは２年生向けの「計算情報学１」で解説します）．$u = 1/r$ より r の式に戻すと，

$$r = \frac{1}{GM/h^2 + A\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{8}$$

$$= \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{9}$$

と書くことができる．これは楕円軌道の極座標表示であり，ケプラーの第１法則が導かれたことになる．ただし，ここで $\ell = h^2/(GM), \varepsilon = (h^2/GM)A$ である．ε は離心率であり，楕円になるためには $\varepsilon < 1$ である必要がある．また，φ_0 は楕円軌道における長軸方向を表し，この方向を $\varphi = 0$ にとれば $\varphi_0 = 0$ となる．第８回授業資料「楕円」でも $\varphi_0 = 0$ の式を導いた．

２．周期

惑星が楕円軌道をえがくとき，周期は

$$T = \frac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}} = \frac{\pi ab}{h/2} \tag{10}$$

で与えられる．資料「楕円」の (18) 式 $b = \sqrt{a\ell}$ と，上の ℓ の式を h について解いた $h = \sqrt{GM\ell}$ を代入して

$$T = \frac{\pi a\sqrt{a\ell}}{\sqrt{GM\ell}/2} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{11}$$

と書けるので，ケプラーの第３法則（$T^2 \propto a^3$）も導かれた．

ケプラーは実際のデータから「周期の２乗が長軸半径の３乗に比例する」という第３法則を発見したが，その比例定数が万有引力定数 G や太陽の質量 M で決まることまでは解明できなかった．その比例定数がニュートンの万有引力の法則の発見によって確定したことからも，万有引力の法則の重要性がわかる．

上記により，ニュートンの第２法則（運動方程式）および万有引力の法則から逆にケプラーの３法則が導かれることがわかった．

３．エネルギー保存則

第９回授業資料の中でやったことの繰り返しだが，運動方程式 (1)，(2) を積分して惑星の運動においてもエネルギーが保存していることを確認しよう．(2) 式を（両辺に m をかけた）(1) 式に代入して $\dot{\varphi}$ を消去すると，r に関する微分方程式

$$m\ddot{r} = \frac{mh^2}{r^3} - G\frac{mM}{r^2} \tag{12}$$

が得られる（第９回授業資料の (28) 式と同じであることを確認して欲しい）．例によって両辺に $\dot{r}$ をかけると

$$m\dot{r}\ddot{r} = \left(\frac{mh^2}{r^3} - G\frac{mM}{r^2} \right) \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

となり，$\dot{r}\ddot{r} = (1/2)\mathrm{d}(\dot{r}^2)/\mathrm{d}t$ を使って両辺を積分すると

$$\int \frac{m}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}^2)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{mh^2}{r^3} - G\frac{mM}{r^2} \right) \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$\therefore \quad \frac{m}{2}\dot{r}^2 = -\frac{mh^2}{2r^2} + G\frac{mM}{r} + E(\text{積分定数}) \tag{15}$$

となる．整理して

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) - G\frac{mM}{r} = E \tag{16}$$

となるが，ここで (2) 式を代入して $\dot{\varphi}$ の項に書き換えると，$h^2/r^2 = (r\dot{\varphi})^2$ であるから，

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - G\frac{mM}{r} = E \tag{17}$$

となる (第９回授業資料 (43) 式に相当)．ここで，左辺第１項を K とすると K は運動エネルギーの極座標表示であり，左辺第２項は万有引力のポテンシャルエネルギー U である（$-(\partial U/\partial r) = -GMm/r^2$）．よって，エネルギー保存則

$$K + U = E \tag{18}$$

が得られた．

４．円軌道の場合

実際の惑星の軌道は離心率が小さく円軌道に近いので，円軌道の場合には何がわかるかも見ておこう．円軌道の場合は $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ であるから，半径は定数 $r = r_0$ である．これを運動方程式

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - G\frac{mM}{r^2} \tag{19}$$

に代入して，

$$mr_0\dot{\varphi}^2 = \frac{GmM}{r_0^2} \tag{20}$$

となる．円運動の速度を v_0 とすると，第３回資料「座標と座標系」の「角速度と速さの関係」を使って，

$$v_0^2 = (r_0\dot{\varphi})^2 = G\frac{M}{r_0} \tag{21}$$

となる．このことから，軌道の半径 r_0 が小さいほど，v_0 が大きくなることがわかる．実際，水星や金星の速度は大きく，土星や海王星は比較的ゆっくりと運動している．

また，運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r_0} \tag{22}$$

であり，位置エネルギーは，

$$U = -G\frac{mM}{r_0} \tag{23}$$

となる．よって，全エネルギーは

$$E = K + U = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r_0} \tag{24}$$

となり，位置エネルギーの半分であることがわかる（第１０回授業演習問題４）．全エネルギーが負になるのは万有引力のポテンシャルが負のためである．

５．惑星の位置の時間変化

最後に惑星の位置と時間の関係（ケプラーの方程式）を導こう．エネルギーの式 (16) の左辺を分解すると，

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - G\frac{mM}{r} + \frac{mh^2}{2r^2} = E \tag{25}$$

となる．左辺第１項は r 方向の運動エネルギー，第２項は万有引力のポテンシャルエネルギー，第３項は遠心力の位置エネルギーである（第９回授業資料 (48) 式）．この第２項と第３項を合わせて $\tilde{U}(r)$ と書くことにすると，$(m/2)\dot{r}^2 + \tilde{U}(r) = E$ より，$\dot{r}^2 = (2/m)(E - \tilde{U}(r))$ だから，$E - \tilde{U}(r) \geq 0$ として，r と t の関係式

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - \tilde{U}(r))} \tag{26}$$

が得られる．第９回授業資料１７ページで考察したように，$E < 0$ のときは楕円運動になり，$E - \tilde{U}(r) = 0$ の２根 r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) の間で往復運動が起こる．すなわち，r_1, r_2 はそれぞれ惑星が近日点と遠日点にあるときの太陽からの距離である．

ちなみに，同じく第９回授業資料１７ページにより，$E = 0$ のときは放物線運動に，$E > 0$ のときは双曲線運動になり，惑星は太陽系を脱出する．惑星探査機パイオニア１０号は，1973 年 12 月 4 日に，木星へ約 20 万キロメートルまで最接近し，木星やその衛星の画像を送信するとともに，木星の強大な磁気圏やヴァン・アレン帯の観測を行った．パイオニア 10 号はこの木星への接近によって木星の重力を利用したスイングバイによりエネルギーを獲得し，太陽系を脱出する双曲線軌道へと乗った（「Wikipedia/パイオニア１０号」参照）．

さて，r_1 と r_2 は楕円軌道の方程式 $r = \ell/(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ の，$\cos\varphi = \pm 1$ のときの r の極値で，

$$r_1 = \frac{\ell}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon) \tag{27}$$

$$r_2 = \frac{\ell}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) \tag{28}$$

である．ここで，長軸半径が $a = \ell/(1-\varepsilon^2)$（第８回授業資料 (38),(39) 式）であることを使った．

ここで，(25) 式より

$$2\{E - \tilde{U}(r)\} = \frac{2Er^2 + 2GmMr - mh^2}{r^2} \tag{29}$$

であるが，第９回資料 p17 の図から左辺は $r = r_1, r_2$ でゼロ，それ以外では正であり，$E < 0$ であることを考えると，右辺の分子は

$$2Er^2 + 2GmMr - mh^2 = (-2E)(r - r_1)(r_2 - r) \tag{30}$$

のように因数分解されるはずである．このことを用いると，(26) 式は

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{(-2E)(r - r_1)(r_2 - r)}{m}}\frac{1}{r} \tag{31}$$

と書き換えることができる．これは変数分離型であり

$$\mathrm{d}t = \frac{\pm 1}{\sqrt{-2E/m}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}} \tag{32}$$

と書きかえることができる．ここまでは第４回授業資料 (29) 式や第９回授業資料 (45) 式と本質的には同じことをしていることに注意.

ここで，楕円の媒介変数表示（$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$）の θ と r の関係式（楕円軌道の式）が $r = a(1 - \varepsilon\cos\theta)$（第８回授業資料 (28) 式）であることを用いて，積分変数を r から θ に変換する．$\mathrm{d}r = a\varepsilon\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，$r - r_1 = a(1 - \varepsilon\cos\theta) - a(1 - \varepsilon) = a\varepsilon(1 - \cos\theta)$，$r_2 - r = a(1 + \varepsilon) - a(1 - \varepsilon\cos\theta) = a\varepsilon(1 + \cos\theta)$ を (32) 式に代入して，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t &= \pm\frac{a^2}{\sqrt{-2E/m}}\frac{(1 - \varepsilon\cos\theta)\varepsilon\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a\varepsilon(1 - \cos\theta)a\varepsilon(1 + \cos\theta)}} &(33)\\ &= \pm\frac{a}{\sqrt{-2E/m}}(1 - \varepsilon\cos\theta)\mathrm{d}\theta &(34)\end{aligned}$$

である．この両辺を積分すると，

$$\int_0^t \mathrm{d}t' = \pm\frac{a}{\sqrt{-2E/m}}\int_0^\theta (1 - \varepsilon\cos\theta')\mathrm{d}\theta' = \pm\frac{a}{\sqrt{-2E/m}}\left[\theta' - \varepsilon\sin\theta'\right]_0^\theta \tag{35}$$

となるが，$t = 0$ で $\theta = 0$（近日点）とすれば，$t \geq 0$ に対して (35) 式右辺の複号の正の方を考えて

$$t = \frac{a}{\sqrt{-2E/m}}(\theta - \varepsilon\sin\theta) \tag{36}$$

となる．周期 T は θ が 0 から 2π まで増す時間なので，

$$T = \frac{a}{\sqrt{-2E/m}}2\pi \tag{37}$$

である．よって，平均の角速度

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{-2E/m}}{a} \tag{38}$$

を (36) 式に用いて，

$$\boxed{\omega t = \theta - \varepsilon\sin\theta} \tag{39}$$

という，時間 t と原点から見た惑星の角度 θ の関係式が得られる．これは 1609 年にケプラーが「新天文学」の中で導いた式であり，「ケプラーの方程式」と呼ばれている．ケプラーの第１，第２法則は，この式を現代的に解釈したものである．ケプラーの方程式は代数方程式でなく，「超越方程式」と呼ばれる方程式の一種である．ケプラーの時代は，まだ運動方程式や万有引力の法則が発見されていなかったため，ケプラーの方程式を使って任意の時刻の惑星の位置を近似的に求め，当時としては圧倒的な精度の「ルドルフ星表」が作られた．惑星の運行の予測は，ニュートン以前にケプラーが可能にしていたことは特筆すべきことであろう．

現代では，ケプラーの方程式の厳密解を求める方法がいくつか開発されている．離心率 ε が小さいときは「ラグランジュの定理」が用いられる．「ベッセル関数」や「フーリエ展開」を使う方法は ε が大きくても使えることがわかっている．これらについては理学部物理学科の講義でも３年生以上の「物理数学」や「特殊関数論」などで扱う内容なので，ここでは省略する．惑星の時間 t と r や φ との関係については，現代的には，むしろ以下で示すようにエネルギー保存則から導かれる $\dot{r}$ や $\dot{\varphi}$ を表す積分を評価することで任意の精度で計算・予測することが可能である．

６．運動方程式の一般解

微積分を知っている我々は運動方程式の一般解を求めることができる．万有引力のポテンシャル $U(r)$ を用いて，(26) 式を書き換えると

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{h^2}{r^2}} \tag{40}$$

であるが，これは変数分離型であり，(36) 式を得たときと同様にして，$t \geq 0$ に対して

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{h^2}{r^2}}} + 定数 \tag{41}$$

が得られる．これは，$r(t)$ の形には書かれていないが，運動方程式の一般解であり，万有引力だけでなくポテンシャルが $(-A/r)$ 型の関数一般に対して積分が可能な形になっている．前節では r を θ に変換して積分を実行したが，WolframAlpha は直接積分してくれるので確認してみて欲しい．ケプラー方程式が超越方程式であったことからも予想されたことであるが，積分できても r について解ける形にはなっていないことがわかる．

一方，t と φ の関係については，方位角方向の運動方程式 (2) から $\mathrm{d}\varphi = (h/r^2)\mathrm{d}t$ であり，(40) 式を $\mathrm{d}t$ について解いた式を代入して，

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{h}{r^2}\mathrm{d}t = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{h^2}{r^2}}} \tag{42}$$

となるので，両辺を積分して

$$\varphi(t) = \int \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{h^2}{r^2}}} + 定数 \tag{43}$$

となる．この右辺も積分可能であり，任意の時刻 t に対して (41) 式を数値的に解いた r を代入すれば，任意の時刻における φ を任意の精度で求めることができる．

実際の惑星，小惑星，太陽を周回する彗星などの運行は，太陽系全体の運動や，太陽以外の木星や土星などの巨大な大質量の惑星からの万有引力を無視できないため，複数の惑星の運動方程式が連立する，複雑な式をコンピュータを用いて解析する必要がある．実際，地球に衝突して破滅的な被害をもたらす恐れのある小惑星などについてはスーパーコンピュータを用いた軌道の監視が行われているが，最新の観測技術をもってしても衝突よりも１年以上前に衝突コースにある小惑星を特定するのは難しいとされている．

なお，この文書にも間違いやタイポが残っている可能性があるので，それらを指摘してくれた人にはボーナスポイントを与えるので積極的にバグ取りに参加してください．わかりにくい点なども指摘してもらえると来年度の改訂の際の参考になります．

演習問題

問 1 放物線は楕円と双曲線のある極限の場合と考えることができる．原点を近日点とする楕円の方程式

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{44}$$

において，$a/b^2=2/k$ とおいて，k を有限に保って a,b の無限大の極限をとると放物線の方程式が得られることを示せ.

問 2 惑星や月は楕円軌道をえがくのに，地表でヒトが投げる物体が放物線をえがくのはなぜか.「中心力」という単語を用いて言葉で説明せよ.

問 3 双曲線は任意の 2 点からの距離の差が一定の曲線として定義される．このとき，楕円のときと同様の計算により，頂点の一方を原点にもつ双曲線の方程式は

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{45}$$

と書ける．このとき，問 1 と同様に $a/b^2=2/k$ とおいて，k を有限に保って a,b の無限大の極限をとると放物線の方程式が得られることを示せ.

答

問 1 (44) 式を書き直すと，

$$\frac{x^2}{a} + 2x + \frac{a}{b^2}y^2 = 0 \tag{46}$$

となるので，$a/b^2 = 2/k$ を有限に保ち a, b の無限大の極限をとると上式の第２，第３項が残って，放物線の方程式

$$y^2 = -kx \tag{47}$$

が得られる．すなわち，楕円の長軸半径の先端（近日点）に注目しながら，楕円を無限に細長くすれば，原点付近の曲線は放物線に近づく．

問 2 ヒトが投げる程度の初速（エネルギー）の物体の軌道の範囲では重力は鉛直方向にほとんど平行であり中心力とはみなせない．そのため物体の軌道は（途中で地面に落下してしまうこともあり）非常に細長い楕円の一部であり，ほとんど放物線とみなしうる．

問 3 頂点の一方を原点とする双曲線の方程式は

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{48}$$

であるから，

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x\left(1 + \frac{x}{2a}\right) \tag{49}$$

となり，$a/b^2 = 2/k$ を有限に保ち a, b の無限大の極限をとるとかっこの中の第２項がゼロとなり，放物線の方程式 $y^2 = kx$ が得られる．