

演習問題：抵抗をおよぼす媒質中での物体の運動 ver.20230628

気体や流体などの抵抗を及ぼす媒質中での物体の運動について考えよう。これはニュートンがプリンキピアの第 II 編 Section 1 および 2 の中で扱った内容である。例によってニュートンは幾何学的方法を使ってこの問題を議論したが、ここではその結果をもちいて媒質中の質点の運動方程式を立て、それを解く。

媒質中での物体が受ける抵抗は (物体の形状にも依存し、かつ、乱流などの影響もあって) 大変複雑であるが、物体の速さ ($v(t) = |\vec{v}(t)|$) が十分小さいときには、 $B > 0$ を定数として $-B\vec{v}(t)$ でよく近似されることが知られている。このような抵抗を**粘性抵抗**と呼ぶ。これは物体が単位時間あたり v に比例する量の媒質を引きずることによって媒質の運動量の変化が起こり、その反作用が物体に働くことによる (これは非常に荒い議論なので詳細は流体力学の教科書を参照のこと)。第 7 回授業の「演習問題：単振動の一般解と減衰振動」における減衰振動は、単振動する質点に粘性抵抗がはたらく場合である。

一方、物体の速さがある程度の大きさに達すると v の 2 乗に比例した大きさの抵抗を受ける。これを**慣性抵抗**と呼ぶ。プリンキピアにおいては粘性抵抗や慣性抵抗といった言葉は使われていないが、ニュートンは「粘性をもたない媒質中で物体が受ける抵抗は、速さの 2 乗に比例する」と記述している。媒質の密度を ρ 、速度の方向に直交する物体の断面積を S とすると、物体が媒質中でかきわける媒質の質量は、 $M = \rho Sv$ である。その質量分の媒質が速さ v で押しのけられるので、媒質が単位時間あたりに受ける運動量の変化は Mv に比例すると考えられる。その反作用として物体は単位時間あたり $Mv = \rho Sv^2$ の運動量変化 (力積) を受ける。つまり、物体が受ける力は v^2 に比例する。この力は、媒質の慣性質量 M にもとづくので、慣性抵抗と呼ばれる。これも非常に荒い議論なので、詳細に興味がある人は流体力学の授業を受けることをお勧めする。

現実の媒質中での物体の運動を考える場合は、粘性抵抗と慣性抵抗の両方を考慮して議論する必要があるが、以下では、まず粘性抵抗のみがはたらく場合を考えよう。

1. 粘性抵抗：速度に比例する抵抗がはたらく場合

ここでは、粘性の大きな水やグリセリンなどの媒質中を、質点が十分小さな速さ $v(t)$ で運動する状況を考える。つまり、粘性抵抗 \gg 慣性抵抗の場合、すなわち慣性抵抗の効果が無視できる場合を考える。簡単のため、 y 軸の負の方向に重力 (重力加速度を定数 g とする) がはたらく 2 次元平面 (x, y) 内での運動を考える。この場合、質点にはたらく粘性抵抗は、上で述べた通り、 $-B\vec{v}(t)$ である。

問 1 時刻 t における質量 m の質点の位置ベクトルを $\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$ および速度ベクトルを $\vec{v}(t)$ として、重力も考慮した運動方程式をベクトルの式で書け。

問 2 $b \equiv B/m$ として、成分ごとに運動方程式を書きかえて、 x と y の微分方程式を導け。

x と y の微分方程式 (16), (17) 式はそれぞれ x もしくは y だけの微分方程式なので、それぞれ独立に解くことができる。まず x の微分方程式を解こう。

問 3 x の微分方程式 (16) を $v_x(t)$ の微分方程式に書きかえよ。

問4 v_x の微分方程式を解いて、初期条件 $v_x(0) = v_{x0}$ (定数) のもとでの $v_x(t)$ の一般解を求めよ. 一般解が微分方程式を満たすことを代入して検算すること.

問5 $t \rightarrow \infty$ での $v_x(t)$ の値, すなわち質点の**終端速度**の x 成分の値を求めよ.

問6 問4で得られた v_x に関する式を $x(t)$ の微分方程式に書きかえて, 初期条件 $x(0) = x_0$ (定数) のもとでの一般解を求めよ. 一般解が微分方程式を満たすことを代入して検算すること.

次に y の微分方程式 (17) を解く.

問7 問2で得られた y の微分方程式 (17) を $v_y(t)$ の微分方程式に書き換えよ.

問8 $\tilde{v}_y \equiv v_y + g/b$ と変数変換して, 問7で得られた微分方程式を \tilde{v}_y の微分方程式に書き換えよ. それを解いて v_y の式に戻して, さらに問6と同様に積分して, 初期条件 $y(0) = y_0, v_y(0) = v_{y0}$ (定数) のもとでの $y(t)$ の一般解を求めよ.

問9 $t \rightarrow \infty$ での質点の終端速度の y 成分の値を求め, $t \rightarrow \infty$ で軌道 $y(t)$ は (t, y) 平面上のどのような直線に漸近していくか (近づいていくか) を答えよ.

問10 $g = 1, b = 1, v_{x0} = 1, v_{y0} = 1, x_0 = 1, y_0 = 1$ として, t の関数としての, $x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)$ のグラフを Wolfram Alpha に描かせてみよ. 問9で求めた漸近直線も $y(t)$ のグラフと一緒に描いて, $y(t)$ が漸近していく様子を確認せよ. (x, y) 平面上での軌道も描かせてみよ.

問11 $m = 1, g = 1, b = 1, v_{x0} = 1, v_{y0} = 1, x_0 = 1, y_0 = 1$ として, 時刻 $t = 0$ と $t = 6$ のときの質点の力学的エネルギー (運動エネルギー + 位置エネルギー) の差を計算し, 質点の力学的エネルギーが保存していないことを示せ. エネルギー積分しなくてよい. また, $v_x(6) = 0$ としてよい. 力学的エネルギーの差はどこへ行ったのか?

2. 慣性抵抗: 速度の2乗に比例する抵抗がはたらく場合

粘性抵抗 $-B\vec{v}(t)$ は $\vec{v}(t)$ に比例するので, 運動方程式は**線形**の常微分方程式だった. 慣性抵抗は $\vec{v}(t)$ の2乗に比例するため運動方程式は**非線形**の常微分方程式

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -\gamma |\vec{v}(t)|^2 \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} - mg \vec{e}_y \quad (1)$$

になる. この場合, 質点の速度の x, y 成分をそれぞれ $v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}$, 質点の速さを $v(t) \equiv |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ とすると, 慣性抵抗の x, y 成分は

$$R_x(t) = -\gamma v(t) v_x(t) = -\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x = -\gamma \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \dot{x}(t) \quad (2)$$

$$R_y(t) = -\gamma v(t) v_y(t) = -\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y = -\gamma \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \dot{y}(t) \quad (3)$$

となり, 運動方程式の x (y) 成分に $\dot{y}(t)$ ($\dot{x}(t)$) が入ってきてしまい, x, y 成分を独立として解くことができない. そこで, ここでは簡単のため1次元に問題を限って, y 軸負の方向の落下運動を考えることにする. 1次元の場合には慣性抵抗を含む運動方程式を解くことができる.

問12 $\gamma = mc$ ($c > 0$ は定数) として, 運動方程式に相当する $y(t)$ の微分方程式を書き, 速度 $v_y(t) = \dot{y}(t)$ の微分方程式に書き換えよ.

問 1 3 終端速度を v_∞ とすると, $v_y = v_\infty$ のときに微分方程式の右辺がゼロになって速度が変化しなくなるはずなので, 微分方程式は

$$\dot{v}_y = -c(v_\infty^2 - v_y^2) \quad (4)$$

と書き換えることができる. 終端速度を c, g をもちいて表せ. ただし, ここではあらゆる時刻で $v_\infty^2 > v_y^2$ とする.

問 1 4 微分方程式を,

$$\frac{1}{v_\infty^2 - v_y^2} \dot{v}_y = -c \quad (5)$$

と変形すると, **変数分離形** (左辺は v_y の関数, 右辺は t の関数) になっていることがわかる. 両辺を t で積分すると,

$$\int \frac{1}{v_\infty^2 - v_y^2} dv_y = -c \int dt \quad (6)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v_\infty^2 - v_y^2} dv_y = -ct + C_1 (\text{積分定数}) \quad (7)$$

とすることができる. 左辺は v_y を t とは独立な積分変数とみなして積分してよい. ここで,

$$\frac{d}{dv_y} \left(-\frac{1}{2v_\infty} \log \left(\frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y} \right) \right) = -\frac{1}{2v_\infty} \frac{1}{\frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y}} \frac{d}{dv_y} \frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y} \quad (8)$$

$$= -\frac{1}{2v_\infty} \frac{1}{\frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y}} \frac{-(v_\infty + v_y) - (v_\infty - v_y)}{(v_\infty + v_y)^2} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{v_\infty^2 - v_y^2} \quad (10)$$

であることを使って, (7) 式左辺を積分して, 初期条件 $v_y(0) = 0$ をもちいて $v_y(t)$ の一般解を求めよ. さらに, $c = g = 1$ として, WolframAlpha に $v_y(t)$ のグラフを描かせてみよ.

問 1 5 問 1 4 で得られた $v_y(t)$ の式を t で積分すれば軌道 $y(t)$ が求まる.

$$v_y(t) = v_\infty \frac{1 - e^{2cv_\infty t}}{1 + e^{2cv_\infty t}} \quad (11)$$

$$= v_\infty \left(\frac{1 + e^{2cv_\infty t}}{1 + e^{2cv_\infty t}} + \frac{-2e^{2cv_\infty t}}{1 + e^{2cv_\infty t}} \right) \quad (12)$$

$$= v_\infty - \left(\frac{1}{c} \right) \frac{2cv_\infty e^{2cv_\infty t}}{1 + e^{2cv_\infty t}} \quad (13)$$

と書き直せること, および

$$\frac{d}{dt} \left(\log \left(\frac{1 + e^{2cv_\infty t}}{2} \right) \right) = \frac{2cv_\infty e^{2cv_\infty t}}{1 + e^{2cv_\infty t}} \quad (14)$$

をもちいて, 初期条件 $y(0) = h$ のもとでの $y(t)$ の一般解を求めよ. 解はどのような直線に漸近するか. $c = g = h = 1$ として WolframAlpha に両者のグラフを描かせてみよ.

[答]

以下紛れがないときは時間 t の関数であることを明示する (t) を省略する.

問1 $\vec{e}_y = (0, 1)$ を y 方向の基本ベクトルとして,

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -B\vec{v}(t) - mg\vec{e}_y \quad (15)$$

問2 速度の x, y 成分をそれぞれ v_x, v_y として,

$$\ddot{x} = -bv_x = -b\dot{x} \quad (16)$$

$$\ddot{y} = -bv_y - g = -b\dot{y} - g \quad (17)$$

問3

$$\dot{v}_x = -bv_x \quad (18)$$

問4 v_x の微分方程式の解は明らかに指数関数である ($v_x(t)$ を t で微分すると (左辺), $v_x(t)$ 自身が出てくるから (右辺)). ゆえに積分定数を C_1 として, 解は

$$v_x(t) = C_1 e^{-bt} \quad (19)$$

となるが, 初期条件を入れると積分定数が $C_1 = v_{x0}$ と定まり, $v_x(t)$ の一般解は

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-bt} \quad (20)$$

となる.

問5 解 (20) の右辺は $t \rightarrow \infty$ で明らかにゼロである. つまり終端速度の x 成分はゼロである.

問6 $x(t)$ についての微分方程式は

$$\dot{x}(t) = v_{x0} e^{-bt} \quad (21)$$

である. この両辺を t で積分すると

$$\int \dot{x} dt = v_{x0} \int e^{-bt} dt \quad (22)$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{v_{x0}}{b} e^{-bt} + C_2 \quad (23)$$

となる (両辺の積分定数は右辺の C_2 にまとめた). 初期条件を入れると, $x_0 = -v_{x0}/b + C_2$ となるので, $C_2 = x_0 + v_{x0}/b$ となり, 結局質点の軌道の x 成分が

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{x0}}{b} (1 - e^{-bt}) \quad (24)$$

と求まる.

問7

$$\dot{v}_y = -bv_y - g = -b\left(v_y + \frac{g}{b}\right) \quad (25)$$

問8 $dv_y/dt = (d/dt)(\tilde{v}_y - g/b) = d\tilde{v}_y/dt$ だから, $\tilde{v}_y(t)$ の微分方程式は

$$\frac{d\tilde{v}_y(t)}{dt} = -b\tilde{v}_y \quad (26)$$

となる. これは (18) 式と同じ形をしているので, 解も同様に

$$\tilde{v}_y(t) = \tilde{v}_{y0}e^{-bt} \quad (27)$$

となる (\tilde{v}_{y0} は変換された初期速度の y 成分). これを $v_y(t)$ に戻せば,

$$v_y(t) + \frac{g}{b} = (v_{y0} + \frac{g}{b})e^{-bt} \quad (28)$$

となる. (28) 式の両辺を t で積分すると,

$$y(t) + \frac{g}{b}t = (v_{y0} + \frac{g}{b})(-\frac{1}{b})e^{-bt} + C_3 \quad (29)$$

となる (両辺の積分定数は右辺の C_3 にまとめた). 初期条件 $y(0) = y_0$ を入れると,

$$y_0 = -\frac{1}{b}(v_{y0} + \frac{g}{b}) + C_3 \quad (30)$$

となるので, 積分定数 C_3 が,

$$C_3 = y_0 + \frac{1}{b}(v_{y0} + \frac{g}{b}) \quad (31)$$

と定まり, 結局質点の軌道の y 成分が,

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{b}t + \frac{1}{b}(v_{y0} + \frac{g}{b})(1 - e^{-bt}) \quad (32)$$

と求まる.

問9 (28) 式右辺は $t \rightarrow \infty$ でゼロとなるから, 質点の終端速度の y 成分の値は $v_y(\infty) = -g/b$ である. $t \rightarrow \infty$ で (32) 式は

$$y(t) = At + B \quad (33)$$

と書くことができるが ($A = -g/b, B = y_0 + (v_{y0} + g/b)/b$), これは (t, y) 平面上で軌道 $y(t)$ が漸近する直線の方程式である.

問10

図1は `Plot[Exp[-t], {t, 0, 10}, {y, 0, 1}]` と入力したときの $v_x(t)$ のグラフ.

図2は `Plot[1+(1-Exp[-t]), {t, 0, 10}, {y, 0, 2}]` としたときの $x(t)$ のグラフ

図3は `Plot[2*Exp[-t]-1, {t, 0, 10}, {y, -1.1, 1.1}]` としたときの $v_y(t)$ のグラフ

図4は `Plot[{1-t+2*(1-Exp[-t]), -t+3}, {t, 0, 6}, {y, -4, 4}]` としたときの $y(t)$ と漸近直線 $y(t) = -t + 3$ のグラフ

図5は `ParametricPlot[{1+(1-Exp[-t]), 1-t+2*(1-Exp[-t])}, {t, 0, 6}]` として描いた (x, y) 平面上での軌道.

図3, 図4, 図5からある程度時間がたつと質点は等速直線運動 (一定速度での落下) に移行することがわかる.

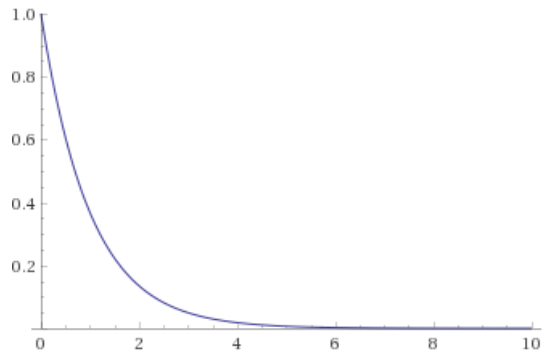


Figure 1: $v_x(t)$ のグラフ

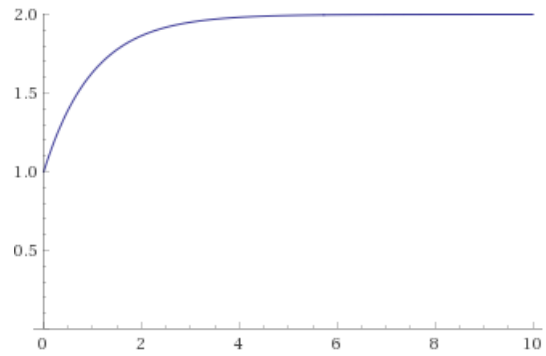


Figure 2: $x(t)$ のグラフ

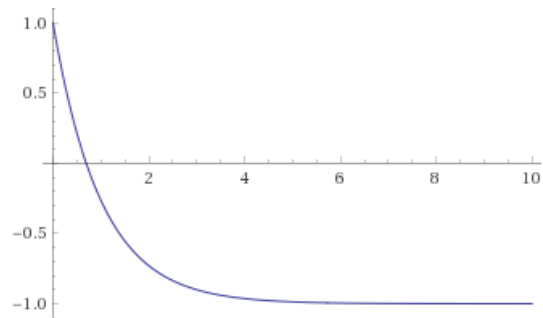


Figure 3: $v_y(t)$ のグラフ

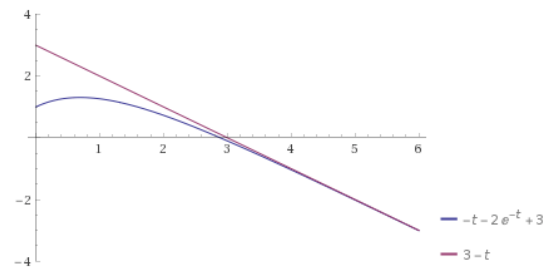


Figure 4: $y(t)$ と漸近直線のグラフ

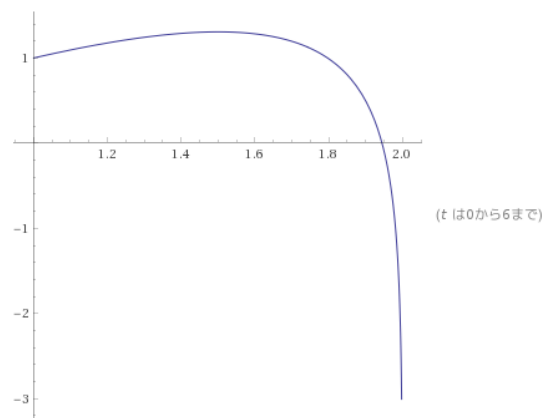


Figure 5: (x, y) 平面上での軌道

問11 時刻 $t = 6$ と $t = 0$ での力学的エネルギーの差 ΔE は、質点の速さを $v(t)$ 、位置エネルギーの基準点を $y = 0$ として、各時刻における質点の運動エネルギー、位置エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv(6)^2 \simeq \frac{1}{2}mv_y(6)^2 = \frac{1}{2}m \left(-\frac{g}{b} + (v_{y0} + \frac{g}{b})e^{-b \times 6} \right)^2 \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + 2e^{-6})^2 \simeq 0.5 \quad (35)$$

$$mgy(6) = mg(y_0 - \frac{g}{b} \times 6 + \frac{1}{b}(v_{y0} + \frac{g}{b})(1 - e^{-b \times 6})) \quad (36)$$

$$= 1 - 6 + 2(1 - e^{-6}) \simeq -3.0 \quad (37)$$

$$\frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2}m(v_x(0)^2 + v_y(0)^2) = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \quad (38)$$

$$mgy(0) = 1 \quad (39)$$

だから、

$$\Delta E \simeq 0.5 + (-3.0) - (1 + 1) = -4.5 \quad (40)$$

となり、質点の力学的エネルギーは 4.5 失われており、力学的エネルギーが保存していないことがわかる。質点が失った力学的エネルギーの大部分はまさつ熱（媒質分子の運動エネルギーの増加）に変わった。残りは媒質分子の位置エネルギーを増加させたり、質点と媒質の衝突により電磁波が発生した場合にはそのエネルギーにも変わった。

問12 (1) 式において、 $\vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$ の y 成分は $\text{sgn}(v_y)$ (v_y の符号, $v_y > 0$ なら $\text{sgn}(v_y) = 1$, $v_y < 0$ なら $\text{sgn}(v_y) = -1$) となるが、落下の場合のみを考えて（投げ上げは考えない） $\text{sgn}(v_y) = -1$ として、

$$\ddot{y}(t) = -g + c(\dot{y}(t))^2 \quad (41)$$

$$\dot{v}_y = -g + cv_y^2 \quad (42)$$

問13

$$\dot{v}_y = -g + cv_y^2 = -c\left(\frac{g}{c} - v_y^2\right) \quad (43)$$

より、 $g/c = v_\infty^2$ なので、向きも考慮して $v_\infty = -\sqrt{g/c} (< 0)$ である。運動方程式を解くことなく、その形だけから終端速度が求まることに注意。

問14 (10) 式より (7) 式左辺の積分が実行できて、

$$-\frac{1}{2v_\infty} \log \frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y} = -ct + C_1 \quad (44)$$

となる。これに初期条件 $v_y(0) = 0$ を入れると、 $C_1 = 0$ となる。 v_y について解くと

$$\log \frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y} = 2cv_\infty t \quad (45)$$

$$\Rightarrow \frac{v_\infty - v_y}{v_\infty + v_y} = e^{2cv_\infty t} \quad (46)$$

$$\Rightarrow v_\infty - v_y = (v_\infty + v_y)e^{2cv_\infty t} \quad (47)$$

$$\Rightarrow v_y(1 + e^{2cv_\infty t}) = v_\infty(1 - e^{2cv_\infty t}) \quad (48)$$

$$\Rightarrow v_y = v_\infty \frac{1 - e^{2cv_\infty t}}{1 + e^{2cv_\infty t}} \quad (49)$$

となる。明らかに初期条件を満たし、 $t \rightarrow \infty$ で $v_y \rightarrow v_\infty$ である。

図6は `Plot[-(1-Exp[-2t])/(1+Exp[-2t]),{t,0,4}]` としたときの $v_y(t)$ のグラフ。

問15 (14)式をもちいて(13)式の右辺を積分して、初期条件を入れて積分定数を決定すると、

$$y(t) = v_\infty t - \frac{1}{c} \log \frac{1 + e^{2cv_\infty t}}{2} + h \quad (50)$$

となる。明らかに初期条件を満たす。 $t \rightarrow \infty$ では直線 $y = v_\infty t + \frac{\log 2}{c} + h$ に漸近する。

図7は `Plot[-t-Log[(1+Exp[-2*t])/2]+1, -t+Log[2]+1],{t,0,4}]` としたときの $y(t)$ と漸近直線 $y = -t + \log(2) + 1$ のグラフ。

図6, 図7から、ある程度時間がたつと質点は等速直線運動(一定速度での落下)に移行することがわかる。

なお、このノートには、間違い、事実誤認、不正確な表現、タイポが含まれている可能性がある。それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので、積極的に「バグ取り」に協力してください。

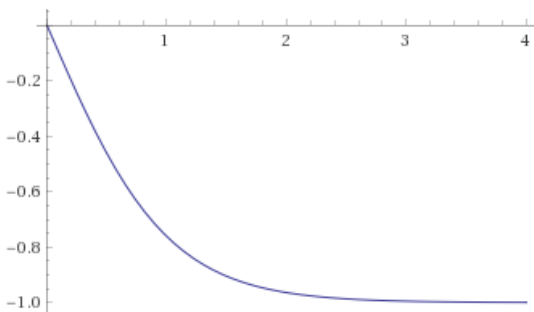


Figure 6: $v_y(t)$ のグラフ

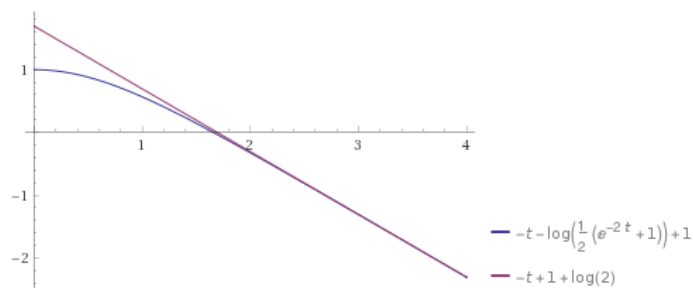


Figure 7: $y(t)$ と漸近直線のグラフ