# 物理学基礎１　第１３回

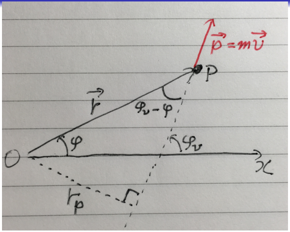
## 角運動量（再）

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

July 5, 2023

# 角運動量と力のモーメント




**運動方程式**

$$\boxed{m\dot{v}_x = F_x, \quad m\dot{v}_y = F_y} \tag{1}$$

**恒等式**

$$x\dot{v}_y - y\dot{v}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xv_y - yv_x) \tag{2}$$

**をもちいて，((1) 式第２式 $\times x$) ー ((1) 式第１式 $\times y$)**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{m(xv_y - yv_x)\} = xF_y - yF_x \tag{3}$$

$$L = m(xv_y - yv_x) = xp_y - yp_x \tag{4}$$

$$N = xF_y - yF_x \tag{5}$$

# 角運動量と力のモーメント

極座標表示

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{6}$$

速度の大きさを $v$，速度ベクトルが $x$ 軸となす角を $\varphi_v$ として

$$v_x = \dot{x} = v\cos\varphi_v, \quad v_y = \dot{y} = v\sin\varphi_v \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad xv_y - yv_x &= rv(\cos\varphi\sin\varphi_v - \sin\varphi\cos\varphi_v) && (8) \\ &= rv\sin(\varphi_v - \varphi) && (9) \end{aligned}$$

原点から質点を通るベクトル $\vec{v}$ におろした垂線の長さを $r_p$ とすると

$$r_p = r\sin(\varphi_v - \varphi) \tag{10}$$

# 角運動量と力のモーメント

(8)〜(10) 式から

$$
\begin{aligned}
xv_y - yv_x &= r_p v \qquad (11)\\
&= (\text{速度ベクトルへ原点 } O \text{ からおろした垂線の長さ}) \times (\text{速度の大きさ})\\
&= (O \text{ に関する"速度のモーメント"}) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

さらに，運動量 $p = mv$ をもちいて

$$
\begin{aligned}
L = m(xv_y - yv_x) &= r_p p \qquad (13)\\
&= (\text{原点 O に関する"運動量のモーメント"})\\
&= (\text{原点 O に関する質点の角運動量})
\end{aligned}
$$

(angular momentum)

# 角運動量と力のモーメント

力 $\vec{F}$ が $x$ 軸の正の方向となす角を $\varphi_F$ として，(3) 式右辺を極座標で書くと，力の大きさを $F$ として，(7), (8), (9) と同様にして

$$xF_y - yF_x = rF(\cos\varphi \sin\varphi_F - \sin\varphi \cos\varphi_F) \tag{14}$$
$$= rF\sin(\varphi_F - \varphi) \tag{15}$$

原点から力の作用線へおろした垂線の長さを $r_F$ とすれば

$$r_F = r\sin(\varphi_F - \varphi) \tag{16}$$

となるので，

$$N = xF_y - yF_x = r_F F \tag{17}$$

$=$ (原点に関する**力のモーメント**)

(moment of force)

# 角運動量と力のモーメント

(3), (4), (5) より

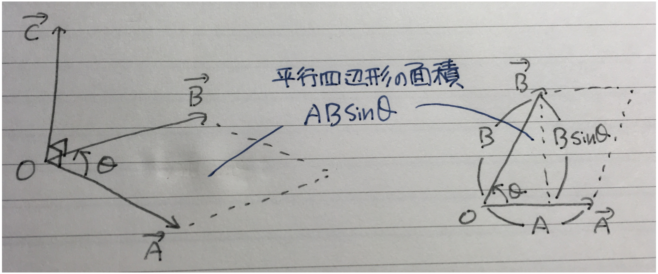
**角運動量 $L$ と力のモーメント $N$**

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = N \tag{18}$$

(Cf. 第６回授業資料「（２）ニュートンの運動の法則（続）」p11)

1. $xy$ 平面上の任意の点に関する角運動量と力のモーメントについて成り立つ。
2. 外力のモーメントが 0 なら角運動量 $L$ は一定に保たれる（角運動量保存則）。

# ベクトル積




- $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ：$\vec{A}$ から $\vec{B}$ に右ねじを回すときのねじの向き
- $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$ ：$\vec{A}$ と $\vec{B}$ が作る平行四辺形の面積

# 角運動量ベクトルと力のモーメントのベクトル

**角運動量ベクトル $\vec{L}$ と力のモーメントのベクトル $\vec{N}$（３次元空間）**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N} \tag{19}$$

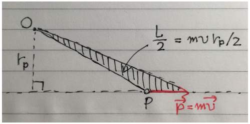
- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$：角運動量
- $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$：力のモーメント

(Cf. 第６回授業資料「（２）ニュートンの運動の法則（続）」p11)

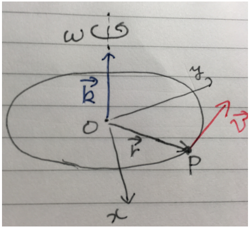
1. 中心力（$\vec{r}$ と $\vec{F}$ が平行）のように外力のモーメントが $\vec{N} = 0$ なら角運動量ベクトル $\vec{L}$ は保存される（角運動量保存則）。

# 演習問題

1. 質点に力がはたらかないときには，任意の点に関する角運動量が保存されることを示せ。



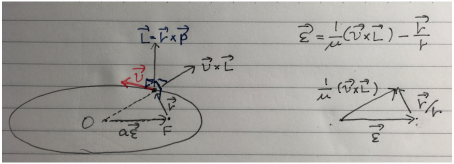

2. $xy$ 平面上で原点 O を中心とする円盤が角速度 $\omega$ で回転している。円盤上の位置 $\vec{r}$ における速度ベクトル $\vec{v}$ を，$\omega, \vec{r}$ および $z$ 軸方向の単位ベクトル $\vec{k}$ をもちいて表わせ。



# 演習問題

3. 太陽の引力（中心力）を

$$\vec{F} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (20)$$




とし（$\mu > 0$），太陽に関する惑星の角運動量ベクトルを $\vec{L}$ とするとき，

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{\mu}\vec{v} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \qquad (21)$$

が保存されることを示せ。$|\vec{\varepsilon}| = \varepsilon$ は離心率であり，$a\varepsilon$ は原点 O と焦点（太陽）F の距離である（$a$ は楕円の長軸半径）。

## 演習問題（答）

1. 力がはたらかない質点の運動は等速直線運動である。図のように任意の点 O から運動直線におろした垂線の長さを $r_p$ とすれば角運動量は $L = r_p mv$ であるが，$r_p, m, v$ がそれぞれ定数であるから $L$ は保存される。
2. 図において P は位置ベクトル $\vec{r}$ の点を表す。$r$ を $\vec{r}$ の大きさとすると P の速さは $v = \omega r$ である。また，速度の方向は $\vec{r}$ と $\vec{k}$ に垂直であって，$\vec{k} \times \vec{r}$（$\vec{k}$ から $\vec{r}$ に回す右ねじの進む向き）の方向を向いている。したがって，

$$\vec{v} = \omega(\vec{k} \times \vec{r}) \tag{22}$$

となる。$\vec{k} = (0, 0, 1)$ だから，

$$\vec{k} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y\vec{i} + x\vec{j} \tag{23}$$

なので，$|\vec{k} \times \vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ であり，大きさも正しい。

# 演習問題（答）

3. 惑星の角運動量 $L$ は定ベクトルであるから，運動方程式 $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ をもちいて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v} \times \vec{L}) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \times \vec{L} \tag{24}$$

$$= -\frac{1}{m}\mu\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{L} \tag{25}$$

である。一方，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{r}}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{r^3}(r^2\vec{v} - r\vec{r}v_r) \tag{27}$$

（$v_r$ は速度の動径成分）

## 演習問題（答）

ここで，運動量を $\vec{p}$ として，$\vec{p} = m\vec{v}$, $p_r = mv_r$（動径方向の運動量）とする。ベクトル３重積の公式

$$\boxed{\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}} \tag{28}$$

を用いると，$\vec{r} \cdot \vec{p} = p_r r$ であるから，

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times \vec{L} &= \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p}) \qquad (29)\\
&= (\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{p} \qquad (30)\\
&= p_r r \vec{r} - r^2 \vec{p} \qquad (31)\\
&= -m(r^2 \vec{v} - r\vec{r} v_r) \qquad (32)
\end{aligned}$$

(27) 式と (32) 式より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{1}{mr^3}(\vec{r} \times \vec{L}) \tag{33}$$

# 演習問題（答）

よって，(21) 式の微分に (25) 式，(33) 式を代入して

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\vec{\varepsilon}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}\times\vec{L}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mu\frac{\vec{r}}{r}\right) && (34)\\
&= -\frac{\mu}{mr^3}\vec{r}\times\vec{L} - \left(-\frac{\mu}{mr^3}\vec{r}\times\vec{L}\right) && (35)\\
&= 0 && (36)
\end{aligned}
$$

となり，$\vec{\varepsilon}$ は定ベクトルであることがわかる。