物理学基礎１　第１４回

質点系

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

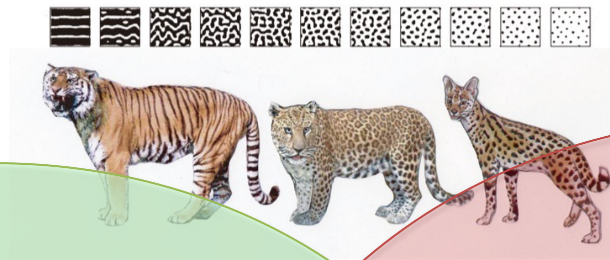
July 12, 2023

多体系

- １体問題　質点１個：惑星（太陽は不動，他の惑星の影響なし），単振り子，単振動，減衰振動，強制振動，放物運動（＋ 粘性抵抗，慣性抵抗）．
- ２体問題　質点２個：運動方程式の解が求まる場合がある．
- ３体問題　質点３個：太陽，地球，月：運動方程式の解が初等関数で与えられないことが数学的に証明されている．連成振動：本日の例題．解が求まる．
- 多体問題　アボガドロ数：気体，液体，固体：統計力学 → 巨視的な物理量（体積，圧力，温度，etc.）が求まる場合がある．

The Formula Loved by Living Organisms

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{f}(\vec{u}) + D\nabla^2 \vec{u}$$



足立隼reseachmap
https://researchmap.jp/blogs/blog_entries/view/78537/4e6dcfd878c5d120b174b2d7a61d02b9?frame_id=437255&lang=en

「リニア中央新幹線で日本は変わる」
中央新幹線沿線学者会議,
PHPエディターズグループ（2001）

数理生物学

遺伝子、タンパク質、細胞、
病原体と免疫系、脳、神経、
群れ、コミュニケーション、
言語進化、生態系

物理学

固体、液体、気体、
相転移、
パターン形成

情報科学・計算科学

機械学習、深層学習、
スーパーコンピュータ、
超並列シミュレーション、
組み合わせ最適化問題

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{j}^{N} f_j(\boldsymbol{x}(t))x_j(t)\underbrace{\boxed{Q_{ji}}}_{}^{\text{mutation rate}} - \bar{f}(\boldsymbol{x},t)x_i(t)$$

TESLA K40　©NVIDIA

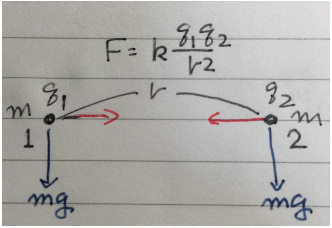
質点系：２つの質点の運動

質点系：質点の集まり
質点系に作用する力
外力：質点系の外から作用する力．例：重力（地球が不動の場合）
内力：質点系の中の質点間にはたらく相互作用．例：電荷の間にはたらくクーロン力．

- ２つの質点の運動方程式

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \qquad (1)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \qquad (2)$$



- 作用・反作用の法則

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (3)$$

質点系：２つの質点の運動

- 重心（２つの質点の質量が等しいので）

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \qquad \text{（質点１と質点２の位置の中心　）} \tag{4}$$

外力がゼロのとき（$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$），(1)〜(4) 式から

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_G}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{（重心の加速度は０）} \tag{5}$$

重心の運動

外力がはたらかない場合，質点１と２の重心は，はじめ静止していればいつまでも静止し，はじめ動いていれば等速直線運動を続ける．Cf. 作用・反作用の法則が成り立たないと,,,

質点系：N 個の質点の運動

- 質点１の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{F}_1}_{\text{外力}} + \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N}}_{\text{内力}} \tag{6}$$

$$= \vec{F}_1 + \sum_{k=2}^{N} \vec{F}_{1k} \tag{7}$$

- 質点 i の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i + \sum_{k(\neq i)}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{8}$$

質点系：N 個の質点の運動

- 作用・反作用の法則

$$\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik} \tag{9}$$

- 内力の総和

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k(\neq i)}^{N} \vec{F}_{ki} = 0 \tag{10}$$

質点系：N 個の質点の運動

- 質点系の全運動量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{11}$$

(11) 式の時間微分に (8) 式を代入すると，(10) 式により内力の総和が消えて

質点系の運動量保存則

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad \text{（外力の和）} \tag{12}$$

質点系の全運動量の時間的変化は外力の和に等しい．外力がない（内力だけがある）ときには，全運動量は保存される．

質点系：質量中心（重心）

質量中心（重心）

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{13}$$

- 全質量

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{14}$$

質点系：全運動量

- 質点 i の運動量

$$\vec{p}_i = m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \qquad (i = 1, 2, \cdots N) \tag{15}$$

- 質点系の全運動量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

- (13)，(14)，(16) 式から

全運動量 $=$ 全質量 $\times$ 重心の速度

$$\vec{P} = M \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} \tag{17}$$

質点系：重心の運動方程式

- (17) 式を (12) 式に代入して

重心の運動方程式

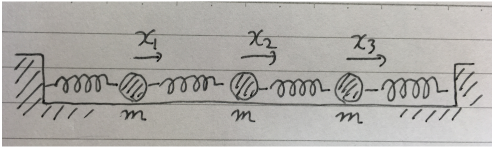
$$M\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_G}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \tag{18}$$

- 質点系の重心は，その点に全質量が集まっていて，そこにすべての外力を合成した力がはたらいたとした場合と同じ運動をする．
- 内力は重心の運動と無関係であり，内力があってもなくても，重心は同じ運動をする．

例）一定の重力がはたらく２つの放物体の重心はひとつの放物線をえがく．２つのおもりを糸で結んで投げたときは糸を通しておもりの間に内力がはたらくが，その重心は糸がなかったときと同じ放物線をえがく．

連成振動

- 多体問題 (many-body problem)
  - 物理学の重要な課題．
  - 一般的に運動方程式を解くことは不可能．
  - 連成振動：例外的に解くことができる．
  - 多原子分子や固体内の原子の振動（格子振動）のモデル．



Cf. 名古屋大学・大学院情報学研究科・複雑系科学専攻
多自由度システム情報論講座（谷村，時田，中村）

連成振動

３個の質点の平衡点からの変位を x_1, x_2, x_3 として，

連成振動の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k(2x_1 - x_2) \tag{19}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k(2x_2 - x_1 - x_3) \tag{20}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_3}{\mathrm{d}t^2} = -k(2x_3 - x_2) \tag{21}$$

(19) 式 $+\alpha\times$(20) 式 $+\beta\times$(21) 式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3) = -\frac{k}{m}\left\{(2-\alpha)x_1 + (2\alpha - \beta - 1)x_2 + (2\beta - \alpha)x_3\right\} \tag{22}$$

連成振動

- 左辺の（）の中と右辺の｛｝の中が比例するような α, β が見つかれば，単振動の問題に帰着させられる（可解）.
- ３つの場合がある
  - $\alpha = \sqrt{2}, \beta = 1$
  - $\alpha = 0, \beta = -1$
  - $\alpha = -\sqrt{2}, \beta = 1$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3) = -(2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3) \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 - x_3) = -\frac{2k}{m}(x_1 - x_3) \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3) = -(2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}(x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3) \tag{25}$$

連成振動

- それぞれ角振動数が

$$\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}} \tag{26}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{27}$$

$$\omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}} \tag{28}$$

で与えられる単振動の運動方程式になっている．

連成振動

- それぞれの一般解

$$x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{29}$$

$$x_1 - x_3 = a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{30}$$

$$x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = a_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \tag{31}$$

これらを x_1, x_2, x_3 について解いて，

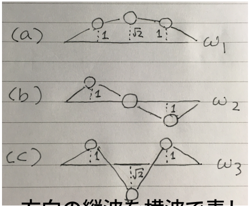
$$x_1 = \frac{1}{4}a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{1}{2}a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{1}{4}a_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \tag{32}$$

$$x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)\} \tag{33}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{1}{2}a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{1}{4}a_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \tag{34}$$

連成振動

- 各質点の運動は３つの単振動の重ね合わせで表される．
- $a_1 \neq 0,\ a_2 = a_3 = 0$ の場合，３つの質点はすべて $\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ に比例する単振動を行っている．



x 方向の縦波を横波で表した基準振動

- 変位の比

$$\frac{a_1}{4} : \frac{a_1}{2\sqrt{2}} : \frac{a_1}{4} = 1 : \sqrt{2} : 1 \quad \Rightarrow \quad (a) \tag{35}$$

- $a_2 \neq 0,\ a_1 = a_3 = 0$ のとき，$1 : 0 : -1 \quad \Rightarrow \quad (b)$
- $a_3 \neq 0,\ a_1 = a_2 = 0$ のとき，$1 : -\sqrt{2} : 1 \quad \Rightarrow \quad (c)$

連成振動

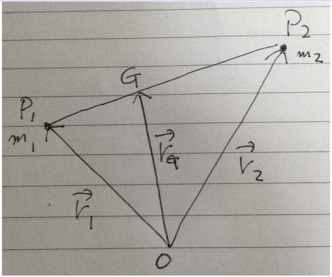
- 各質点の変位が特定の比をとったとき，全部が単一の振動数で単振動する．
- 基準形，ノーマルモード：図の変位の型
- 基準振動：各基準形の振動．一般の運動はこれらの基準振動の重ね合わせである．
- 例）昔のシンセサイザー．様々な基準振動を重ね合わせて様々な音色を合成．

演習問題

1． 図をもちいて，２つの質点の質量が異なる場合 (m_1, m_2) の重心の式，もしくは (13) 式で $N = 2$ の場合

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{36}$$

を証明せよ．



2． 重心を原点にとり，質点 i の座標を x_i, y_i, z_i とすれば

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i = 0 \tag{37}$$

であることを示せ．

演習問題

3. 連成振動の運動方程式の右辺の力の項が (19)，(20)，(21) のようになる理由を説明せよ．
4. (29)〜(31) から (32)〜(34) を導け．

演習問題（答）

1．$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ とすると，重心の定義より $\overline{P_1G} : \overline{GP_2} = m_2 : m_1$ だから，

$$\vec{r}_G = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12} \tag{38}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{39}$$

$$= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{40}$$

2．重心の座標を (x_G, y_G, z_G) とすると，m_i の座標は $(x_G + x_i, y_G + y_i, z_G + z_i)$ であるが，重心の定義 (13) 式により

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i(x_G + x_i)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{41}$$

演習問題（答）

$x_G = 0$ を代入して $0 = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$．$y, z$ についても同様．

3． (19) 式右辺については講義で説明した通り．(20)，(21) 式の右辺も同様．
4． 略