

別紙 4

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

主 論 文 の 要 旨

論文題目 **Hyperbolic thermostat and Hamilton's Harnack inequality for the Ricci flow**
 (双曲型熱浴とリッチフローに対するハミルトンのハルナック不等式)
 氏 名 小林 達彦

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、双曲型熱浴の観点からリッチフローに対するハミルトンのハルナック不等式を再証明する。ハミルトンによって証明されたハルナック不等式は、時空の異なる2点でのリッチフローの曲率を比較するもので、リッチフローの特異点の構造を研究する上で重要な役割をもっている。ハルナック不等式は、仮定として計量が非負曲率作用素をもつことを必要とするが、彼は勾配拡大リッチソリトンによってその不等式を特徴付けた。しかし、勾配拡大リッチソリトンは、負のリッチ曲率をもつアインシュタイン計量の一般化として与えられる。この点において、ハルナック不等式は“神秘的”であり、ハルナック不等式の背景を明らかにすることは重要な研究課題であった。実際、チョウ・チュウ、チョウ・クノップフ、カベサス・リバス・トッピングなど、多くの数学者たちがこのハルナック不等式に対して幾何学的な解釈を与えてきた。本論文もそのうちの1つである。

カベサス・リバス・トッピングは、リッチフローから標準的な方法で勾配拡大リッチソリトンを構成した。この標準拡大ソリトンの曲率作用素としてハミルトンのハルナック表現があらわれることから、もとのリッチフローが非負曲率作用素をもつとき、標準拡大ソリトンの初期時刻における曲率作用素も非負であり、さらに、その非負性が時刻に対して保存されることを証明することで、ハルナック不等式に幾何学的な解釈を与えた。一方、彼らは、同じ手法で標準縮小ソリトンを構成し、その観点からペレルマンの W -エントロピーの単調性や簡約体積関数の単調性など、リーマン幾何的熱浴を背景にもつ、ビショップ・グロモフ型の単調性公式を再証明した。ハルナック表現は、ペレルマンの熱浴の曲率作用素として、一部符号が異なった形であらわれるが、そのため、この観点からはハルナック不等式を説明することができない。

以上のことから、リーマン幾何的熱浴は標準縮小ソリトンと対応関係にあり、標準拡大ソリトンとはそうではないと考えられる。

そこで、ハルナック表現そのものが曲率作用素としてあらわれるような、標準拡大ソリトンに対応する“熱浴”とは何か、という疑問が生じる。それに対する答えが、双曲型熱浴である。ペレルマンのリーマン幾何的熱浴は、リッチフローと十分大きな次元の球面を相互作用させることにより、リッチ平坦空間を標準的に構成し、リッチフローの情報を引き出すというアイデアである。我々は、球面の代わりに双曲空間との相互作用を考えることにより、標準拡大ソリトンに対応する双曲型熱浴を得た。この双曲型熱浴の計量は、双曲空間の次元に依存するパラメータをその成分に含んでおり、パラメータを発散させると計量は退化し、その退化した計量の曲率作用素としてハミルトンのハルナック表現そのものがあらわれる。この計量が退化しているという点に“神秘的”である理由があらわれている。

本論文の主結果は、「非負曲率作用素をもつリッチフローから構成される双曲型熱浴の曲率作用素は、任意の2形式に対して非負である」というものである。ここで、曲率作用素は2形式の空間上の対称作用素である。この結果は、ハミルトンのハルナック不等式と同値であり、ハルナック不等式に対して幾何学的な解釈を与えるものである。実際は、双曲型熱浴はその次元が発散してしまうことにより、曲率作用素が常に発散してしまうため、空間を制限する必要がある。主結果の証明方法は、ハミルトンのオリジナルなものに習い、双曲型熱浴の曲率作用素の発展方程式を求め、最大値の原理を適用するというものである。もっと言えば、時空において曲率作用素がゼロとなる点が存在すると仮定し、その1点における2形式をうまく時空へ拡張すると、最大値の原理を適用することにより、曲率作用素の発展方程式に矛盾するという手法である。ハミルトンの議論と異なる点は、双曲型熱浴において、リッチフローのパラメータを空間パラメータとして扱っているところである。それにより、同じハルナック表現を与えていても、曲率作用素の成分の発展方程式は少し異なる。よって、1点における2形式を時空へ適切に拡張することにより、最大値の原理がうまく働くような発展方程式にできるかが問題であった。ハミルトンはその拡張の仕方がある勾配拡大リッチソリトンから特徴付けたが、我々の拡張の仕方は熱浴のリッチ平坦性を背景にして考えることにより、見かけ上はハミルトンのものと同じ形の発展方程式を得ることができた。そのため、後の議論はハミルトンとほぼ同じように進んだ。

本論文の最終章では、「リーマン幾何的熱浴による、ペレルマンのW-エントロピーの単調性の別証明」について述べた。この証明は、リッチ平坦空間特有のビショップ・グロモフ型の比較定理をペレルマンの熱浴に対して適用するというものである。形式的な証明であるが、標準ソリトンと熱浴の対応関係を考えるきっかけとなった。