

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※ 甲 第 号
------	---------

氏 名 小 林 達 彦

論 文 題 目

Hyperbolic thermostat and Hamilton's Harnack inequality for the Ricci flow  
(双曲型熱浴とリッチフローに対するハミルトンのハルナック不等式)

論文審査担当者

主 査	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
	納 谷 信
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
	小 林 亮 一
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 理学博士.
	内 藤 久 資
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)
	津 川 光 太 郎

## 論文審査の結果の要旨

申請者の研究はリッチ流に関するものである。リッチ流はリーマン計量に関する発展方程式系であり、1982年にハミルトンによって導入された。1990年代に、ハミルトンは、サーストンの幾何化予想とよばれる閉3次元多様体の構造を記述する予想を、リッチ流を利用して証明しようというプログラムを提案した。その研究の過程でハミルトンは一つのハルナック型不等式を見出した。これは、リッチ流の異なる時間および点における曲率の比較を与える不等式であり、ハミルトン自身およびペレルマンによるリッチ流の解の特異点の構造の解明において重要な役割を果たしている。

ハミルトンのハルナック不等式は、完備、曲率一様有界かつ曲率作用素が非負であるリッチ流に対して成立する。ハミルトンの証明は拡大リッチソリトンモデルとする解析によるものであった。ここで、リッチソリトンとはリッチ流の自己相似解のことであり、拡大（定常、縮小）リッチソリトンは負（ゼロ、正）スカラー曲率のアインシュタイン計量を一般化している。ハミルトンのハルナック不等式が曲率非負という仮定の下で成立するにも拘らず、負スカラー曲率のアインシュタイン計量の一般化である拡大リッチソリトンモデルとして証明されるというのは、ハルナック不等式の神秘的な側面であった。

リッチソリトンはリッチ流の解の特異点のスケール極限として現れるので、それがハルナック不等式の証明に重要な役割を果たすことは自然な期待である。実際、カベザス・リヴァースとトッピングは与えられたリッチ流から標準拡大リッチソリトンとよばれる（漸近的）リッチソリトンを構成し、その曲率作用素としてハルナック表現が現れることを利用して、ハルナック不等式を再証明した。

一方、ペレルマンが構成したリーマン幾何的熱浴の曲率作用素として、ハルナック表現が一部の符号が逆になって現れ、この事実はペレルマンによるリッチ流の解析で重要な役割を担う一連の不等式の源泉となった。また、リーマン幾何的熱浴を用いて示されるリッチ流に関する結果の多くは、カベザス・リヴァースとトッピングによって構成された標準縮小リッチソリトンを用いることによっても示されることが明らかになった。

以上を背景として、申請者は、カベザス・リヴァースとトッピングの標準拡大リッチソリトンに対応するリーマン幾何的熱浴の類似を求めるといった問題を提起し、研究を行った。その結果、新たにローレンツ幾何的な熱浴である双曲的熱浴を見出した。これはリッチ流の解のそれぞれに対応して構成されるローレンツ多様体の列（次元が発散する）である。双曲的熱浴の曲率を計算して、リーマン幾何的熱浴と同様に次元無限大の極限では、ローレンツ計量が退化しながら「漸近的にリッチ平坦」になっていくことを確認するとともに、その曲率作用素としてハルナック表現そのものが現れることを考察した。さらに、リッチ流の解の曲率作用素が非負であるときに、対応する双曲的熱浴（正確にはその適当な部分多様体）の曲率作用素が非負になることを示すことにより、ハミルトンのハルナック不等式を再証明した。証明では、最大値原理が適用できる状況を巧みに設定しており、ハミルトンの証明の要所要所に現れるいくつかの非自明な設定の幾何的由来を明らかにしている。以上のように、本論文は、ハミルトンのハルナック不等式を双曲的熱浴という（漸近的）リッチ平坦幾何をモデルとして証明し、この不等式を熱浴の枠組みの中で位置づけることに成功している。

申請者の研究は、ハミルトンのハルナック不等式を基軸として、リッチソリトンと熱浴の対応という図式において欠落していた新たな幾何学的対象を見出し、ハルナック不等式証明の自然な枠組を構築したものである。その構想力は熟練した計算力とともに高く評価できる。証明および結果の正否の観点からも問題点は見当たらなかった。また、本論文に関する公開審査会を2015年2月9日に行い、申請者が博士の学位を取得するに十分な学識を有することを確認した。

以上に鑑みて、学位審査委員会は、小林氏の論文は博士（数理学）の学位を授与するにふさわしい価値を有するものと認める。