

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

## 主論文の要旨

論文題目

An Intuitionistic Set-theoretical Model of the  
Extended Calculus of Constructions  
(ECC の直観主義的な集合論的モデルの構築について)

氏名

佐藤 雅大

## 論文内容の要旨

本研究の目的は、型理論のより直感的で表現力の高いモデルを構成することである。型理論には Martin-Löf や ECC(Extended Calculus of Constructions) や CIC(Calculus of Inductive Construction) など様々な種類が存在する。型理論はプログラミング理論に応用されるだけでなく、証明木の記述にも用いられることがある。例えば証明支援系ソフトウェアの中には型理論を応用したものが数多く存在し、実際に証明支援系の一つである Coq には CIC という型理論が採用されている。さらに近年において型理論は集合論に代わる数学の基礎付けの候補の一つとして注目されている。実際 Martin-Löf の型理論は構成的集合論 (CZF と呼ばれる) における数学理論を展開するのに良いとされている。

また型理論のモデルにおいても様々な種類が存在する。その中でも特に圏論的なモデルが最もよく知られており、高い表現力を持っている。一方集合論的なモデル、特に ECC の集合論的なモデルの構築は Werner 氏や Miquel 氏らによってなされた [1, 2]。集合論的なモデルは単純で直感的であるが、その一方で表現力に乏しいと言われている。よってこの集合論的なモデルをより拡張させ、少なくとも型理論に含まれている直観主義論理を忠実に表現できるようにすることは可能なのか、ということが本研究の目的である。ここで直観主義論理とは、定理の証明に排中律を認めない論理であり、排中律とは任意の命題  $P$  に対して  $P$  または  $P$  の否定のどちらかが成り立つという主張である。集合論的なモデルの拡張には Reynolds のパラドックス [3] を回避しなければならないという課題がある。Reynolds の主張は以下の通りである。

### 定理 1.

$T$  を *impredicative* な *sort* とする。 $B$  を自由変数を含まない  $T$  の型とする。このとき型  $B$  の解釈  $\llbracket B \rrbracket$  が二つ以上の元をもつとき、すなわち

$$\#\llbracket B \rrbracket \geq 2 \quad (1)$$

のとき、このモデルは矛盾する。

この主張が集合論的なモデルを直観主義的なものに拡大できない理由である。しかし私は証明を表す項を一点に潰す、あるいは Product Type の解釈をその型によって場合分けさせるなどの工夫によりそのパラドックスを回避するという試みを成功させた。その結果集合論的なモデルの表現力を拡大させることができた。

直観主義論理のモデルとして Heyting 代数というものが最もよく使われている。heyting 代数の一例として位相空間における開集合系全体が挙げられるので、本論文ではモデルの構築に位相空間を使うことにした。すなわち命題を与える型は一つの開集合に対応させる、という解釈を与えた。具体的にはまず位相空間の一点  $p$  を固定させ、命題を与える型  $B$  の解釈を  $\llbracket B \rrbracket$  としたときに  $p \in \llbracket B \rrbracket$  となるときの 'B は真である' というように解釈を与えた。したがって本研究で構築したモデルは位相空間  $(X, \mathcal{O}(X))$  とその一点  $p$  をパラメーターとするものであり、それらを取り替えることによりモデルの強さを自由に変えることができる。本論文ではこの点  $p$  のことを *reference point* と呼ぶことにする。

しかし考察を深めた後 *reference point* にすべき点  $p$  に以下の条件を加える必要が出た。

$$\bigcap \mathcal{N}(p) \in \mathcal{O}(X) \quad (2)$$

ここで  $\mathcal{N}(p)$  は点  $p$  の開近傍、すなわち  $p$  を含む開集合全体とする。以下より上の条件を *point condition* と呼ぶことにする。モデルの構築において *point condition* が真に必要なか否かは論文執筆時までに解明することができなかった。それ故本研究で構築したモデルは *point condition* による限定的な位相空間のみしか扱うことができないが、それでも私は既存の集合論的なモデルを、排中律が真とならないような表現力の高いものに拡張することができた。

## 参考文献

- [1] Werner, Benjamin. "Sets in types, types in sets." Theoretical aspects of computer software. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [2] Miquel, Alexandre, and Benjamin Werner. "The not so simple proof-irrelevant model of CC." Types for proofs and programs. Springer Berlin Heidelberg, 2003. 240-258.
- [3] Reynolds, John C. "Polymorphism is not set-theoretic." Springer Berlin Heidelberg, 1984.