報告番号	※　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Partial regularity for weak solutions of elliptic and parabolic systems with respect to regularity of the coefficients
(係数の正則性に対する楕円型及び放物型方程式系の弱解の部分正則性について)

氏　　名　金澤　拓

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では以下の形の非線形 2 階発散型の楕円型方程式系

$$-\mathrm{div}A(x,u,Du) = f(x,u,Du) \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

またはそれに対応した放物型方程式系

$$u_t - \mathrm{div}A(x,t,u,Du) = f(x,t,u,Du) \qquad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (-T,0),\ T>0, \tag{2}$$

について考える. ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の有界領域であり, u は $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ に値をとる Ω 上, ないし Ω_T 上で定義されたベクトル値関数とする.

本論文では, 方程式系 (1) または (2) において “polynomial p-growth condition” と呼ばれる条件のもとで方程式系の “係数”$A(x,u,w)$ または $A(z,u,w)$, $z=(x,t)$ の正則性を弱めたときの弱解の正則性について考察する. そこで, 本論文全体を通して $A(x,u,w)$ に対して polynomial p-growth condition, 即ち

$$|A(x,u,w)| + (1+|w|)\,|D_wA(x,u,w)| \leq L(1+|w|)^{p-1} \tag{3}$$

及び一様楕円性

$$\left\langle D_wA(x,u,w)\tilde{w},\tilde{w}\right\rangle := \sum_{\substack{1\leq i,\beta\leq N\\ 1\leq j,\alpha\leq n}} D_{w^j_\beta}A^i_\alpha(x,u,w)\tilde{w}^\alpha_i\tilde{w}^\beta_j \geq \lambda\,|\tilde{w}|^2\,(1+|w|^2)^{(p-2)/2} \tag{4}$$

がすべての $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}^{nN}$ で成り立っていると仮定する. また $A(z,u,w)$ の場合も同様の仮定をおく.

polynomial p-growth condition の条件下における一般の楕円型方程式系の正則性については $p=2$ の場合の Giaquinta-Modica の結果が基本的である. 彼らはもし $(1+|w|)^{-1}A(x,u,w)$ が w について一様に (x,u) に対して Hölder 連続ならば Lebesgue 測度ゼロの特異点集合を除いた定義域上で弱解 u の偏導関数 Du は Hölder 連続になることを示した. その後 Duzaar-Grotowski により $\mathcal{A}$-*harmonic* *approximation technique* を用いることで Giaquinta-Modica の結果の証明が見通し良く簡略化され, Giaquinta-Modica のときにはわからなかった Du の Hölder 指数として係数と同じものが取れることが示された. 即ち $(1+|w|)^{-1}A(x,u,w)$ が α-Hölder 連続ならば (1) の弱解 u は $C^{1,\alpha}$ となることが示された. この Duzaar-Grotowski の結果を受け, $p \geq 2$ 及び $1 < p < 2$ の場合も同様の手法で正則性を得られることが Chen-Tan と Beck によりそれぞれ示された.

また係数に課す条件を緩めた場合についても多くの研究がなされている. 方程式系の係数が Hölder 連続性より弱い Dini 連続性しか満たさない場合は弱解 u が C^1 級となるが, Du の Hölder 連続性は得られないことが $p=2$ の場合について Duzaar-Gastel により示された. さらに Qiu により同様の結果が $1<p<2$ について示された. 本論文の主結果の一つ目は, この結果を $p \geq 2$ の場合について考察したものである.

一方, 係数に仮定する条件を単に (x,u) に関する連続性とすると, 前述の結果を得るために使われた $\{(Du)_{x_0,\theta^k\rho}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の収束性が示せず, Du については連続性はおろか有界性についても言えなくなってしまうことが知られている. ここで $(Du)_{x_0,\theta^k\rho}$ は Du の中心 x_0, 半径 $\theta^k\rho$ の開球 $B_{\theta^k\rho}(x_0)$ における積分平均を表す. しかし, Foss-Mingione により弱解 u 自身は Hölder 連続であることが $p \geq 2$ の場合に示され, 同様の結論が $1<p<2$ の場合にも言えることが Beck により示された.

さらに, Bögelein-Duzaar-Habermann-Scheven により係数 $A(x,u,w)$ が (x,u) に関して連続でなくても弱解の Hölder 連続性を得られることが $p \geq 2$ かつ斉次方程式系 $(f \equiv 0)$ の場合に示された. 正確には, 係数 $A(x,u,w)$ が u に関して連続であり, x に関して VMO(Vanishing Mean Oscillation), 即ち

$$|A(x,u,w) - (A(\cdot,u,w))_{x_0,\rho}| \leq V_{x_0}(x,\rho)(1+|w|)^{p-1}, \quad \text{for all } x \in B_\rho(x_0) \tag{5}$$

かつ

$$\lim_{\rho \searrow 0} V(\rho) = 0, \qquad V(\rho) := \sup_{x_0\in\Omega}\sup_{0<r\leq\rho} \fint_{B_r(x_0)\cap\Omega} V_{x_0}(x,r)dx. \tag{6}$$

を満たす有界な関数 $V_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \times [0,\rho_0] \to [0,2L]$ が存在するならば弱解 u の Hölder 連続性が保証される.

本論文では, この Bögelein らの結果を拡張し, Hölder 連続な係数や Dini 連続な係数を持つ場合と同様に p 次の増大度を持つ非斉次項 f の存在を仮定した場合に, 弱解 u の Hölder 連続性を得た.

放物型の方程式系においても同様の考察がなされてきた. まず $p=2$ かつ Hölder 連続な係数を持つ方程式系についての結果が Duzaar-Mingione により得られ, 楕円型のときと同様に弱解 $u(x,t)$ の空間変数微分である $Du(x,t) \equiv D_x(x,t)$ は Hölder 連続であることが示された. $p \geq 2$ の場合は Duzaar-Mingione-Steffen により示され, $1<p<2$ の場合は Scheven により結果が得られている. Dini 連続な係数を持つ放物型方程式系についてもすでに $p=2$ の場合の結果が Baroni により得られており, 単に連続な係数の場合は $p \geq 2$ の場合が Bögelein-Foss-Mingione により, $1<p<2$ の場合が Foss-Geisbauer により, それぞれ楕円型のときと同様の結果が得られている.

本論文での最後の主結果は, 第 2 の主結果の放物型版である. 即ち $p \geq 2$ かつ係数 $A(z,u,w)$ が $z=(x,t)$ に関して VMO であり, u に関して連続であるのなら弱解 $u(x,t)$ は Hölder 連続である.

上記の既知の結果及び本論文の主結果は, すべて Duzaar-Grotowski の $\mathcal{A}$-harmonic approximation, あるいはその放物型版である Duzaar-Mingione の $\mathcal{A}$-caloric approximation と呼ばれる手法に基づいている. この手法により, 個々の条件ごとに証明の必要のある Du に関する L^p-L^2-評価を使う必要が

なくなり, 元の方程式系を線形化した定数係数方程式系の解に関する a priori 評価を用いることで正則性を得られるようになっている.