論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　甲　　第　　　号

氏　　　　名　　金　澤　　　拓

論　文　題　目

Partial regularity for weak solutions of elliptic and parabolic systems with respect to regularity of the coefficients
（係数の正則性に対する楕円型及び放物型方程式系の弱解の部分正則性について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱　田　　俊　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
内　藤　　久　資

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
吉　田　　伸　生

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
加　藤　　　淳

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位申請論文では, 発散型の 2 階非線形楕円型偏微分方程式系

$$-\mathrm{div}\ A(x,u,Du) = f(x,u,Du), \qquad x\in\Omega, \tag{1}$$

および対応する放物型偏微分方程式系

$$\partial_t u - \mathrm{div}\ A(x,t,u,Du) = f(x,t,u,Du), \qquad (x,t)\in\Omega_T, \tag{2}$$

の弱解の部分正則性を論じている. ここで, Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ の有界領域, $\Omega_T = \Omega\times(-T,0)$, $u:\Omega$ (または Ω_T) $\to \mathbb{R}^N$ $(N\geq 1)$ とし, $Du:\Omega$ (または Ω_T) $\to \mathbb{R}^{N\times n}$ は空間変数 x に関する Jacobi 行列である. 本論文の目的は, 一様楕円性をみたす係数 $A:\Omega$ (または Ω_T) $\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times n}\to\mathbb{R}^{N\times n}$ の正則性と弱解 u の正則性の関係を (1) と (2) に対して明らかにすることである. 特に $N\geq 2$ の場合, すなわち (1), (2) がそれぞれシステムである場合には, たとえ係数 A が滑らかであっても特異性をもつ弱解の例が知られているので, 一般に期待されるのは Lebesgue 測度零の除外集合の補集合における正則性である. これを弱解の部分正則性という. 申請者は, $A(x,t,u,w)$ および $f(x,t,u,w)$ の w についての増大度との関連の中で, 従来の研究成果の一般化と精密化を追求している. この増大度 $p\in(1,\infty)$ は変分問題の汎関数の被積分関数の増大度に対応しており, 以下では簡単に "p 次増大" と呼ぶことにする.

最も基本的な 2 次増大の場合, 適当な意味で小さい f をもつ楕円型方程式系 (1) に対して $(x,u)\mapsto A(x,u,w)$ が Hölder 連続 C^α, $\alpha\in(0,1)$, であるならば, 最良の結果は次のように述べられる: 任意の弱解 $u\in W^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ に対して, Lebesgue 測度零の集合 Sing u が存在して, $u\in C^{1+\alpha}(\Omega\setminus \mathrm{Sing}\ u)$ が成り立つ (この種の帰結を以下では簡単に "部分正則性" $C^{1+\alpha}$ と呼ぶことにする). これは Duzaar-Grotowski (2000) による定理であり, Du の最良な Hölder 指数を導いた点で先行する Giaquinta-Modica (1979) の結果の改良である. Duzaar-Grotowski により提示されたアイデアは $\mathcal{A}$-harmonic approximation の技法と呼ばれ, 双線形型式 $\mathcal{A}$ をうまく見い出して, $\mathcal{A}$ から導かれる定数係数線形楕円型方程式の解による近似を用いて従来よりも見通しよく所要の部分正則性を示すものであり, 本論文においても重要な役割を果たしている.

さて, 上記の条件を弱めて $(x,u)\mapsto A(x,u,w)$ を単に連続とした場合, 一般には弱解の部分正則性 C^1 を期待できないことが知られている. 本論文の最初の定理では, 楕円型方程式系 (1) に対して, A と f が p 次増大 $(p\geq 2)$ であって f が適当な意味で小さいとき, $(x,u)\mapsto A(x,u,w)$ の連続率が Dini の条件をみたすならば, 弱解 $u\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ が部分正則性 C^1 をもつことを示した. これは, A と f が 2 次増大の場合の Duzaar-Gastel (2002) の結果の拡張である.

次に, 楕円型方程式系 (1) の弱解 u の部分正則性 C^α, $\alpha\in(0,1)$, を得るための条件を考察した. $f=0$ のときに, A が p 次増大 $(p\geq 2)$ ならば

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

$x \mapsto A(x,u,w)$ の連続性は必要でないことを Bögelein-Duzaar-Habermann-Scheven (2011) が指摘したが, 本論文では彼らの結果が f を伴う場合に拡張された. すなわち, 同じ増大度 $p \geq 2$ をもつ非同次項 f を伴う (1) に対して, f が適当な意味で小さいとき, $u \mapsto A(x,u,w)$ は連続とするが, $x \mapsto A(x,u,w)$ が VMO (vanishing mean oscillation) ならば, 弱解 $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ が部分正則性 C^α をもつことを示した. ここで, Hölder 指数 $\alpha \in (0,1)$ は任意であり, 除外集合を α に無関係に取れる.

最後に, 楕円型方程式系 (1) に対する上記の定理と同様な結果が放物型方程式系 (2) に対しても成り立つことを示した. より詳しくは, A と f が p 次増大 ($p \geq 2$) とし, f は適当な意味で小さいとして, $u \mapsto A(x,t,u,w)$ は連続とするが, $(x,t) \mapsto A(x,t,u,w)$ が VMO ならば, 有界な弱解 u は任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して部分正則性 $C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}$ をもつことを示した. 放物型方程式系に対して $(x,t) \mapsto A(x,t,u,w)$ が不連続な場合は従来扱われておらず, 本論文の結果は $f = 0$ であっても新しい. 証明では, 楕円型方程式系に対する $\mathcal{A}$-harmonic approximation の放物型での対応物として, $\mathcal{A}$-caloric approximation が用いられる. この近似は, Duzaar-Mingione (2005) によって Du の Hölder 部分正則性の研究のために導入されたものである.

上記のいずれの成果についても, $\mathcal{A}$-harmonic (または caloric) approximation の技法を徹底して用いることで Hölder 連続関数の Campanato による特徴付けに至る議論は Duzaar たちの研究の流れの中にある. しかし, 目指す正則性のレベルに応じた係数 A の x (または (x,t)) についての弱い条件のもとで, Caccioppoli の不等式を導出して Du を u で制御することは詳細な解析と工夫を要し, 申請者がそれを 2 次増大とは限らない場合や非同次項 f を伴う場合にやり遂げたことは高く評価され, 得られた知見は非線形楕円型および放物型方程式系の正則性理論の発展に寄与している. また, 本論文に関する公開審査会を 2015 年 2 月 9 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した.

以上により, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.