別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　On a family of Lagrangian submanifolds in bidisks and Lagrangian Hofer metric
(開円板の直積におけるラグランジュ部分多様体のある族と
ラグランジュホーファー距離について)

氏　　名　正谷　優典

論　文　内　容　の　要　旨

主論文では，２つの単位開円板の直積におけるあるラグランジュ部分多様体の族を定義し，それらから決まるラグランジュホーファー距離空間の非有界性について得られた結果を纏めた．主定理を述べるために，いくつか記号を用意する．

シンプレクティック多様体 (M,ω) に対し，$\mathrm{Ham}_c(M,\omega)$ をコンパクトな台をもつハミルトン微分同相写像のなす群とする．ラグランジュ部分多様体 L に対し，L とハミルトン同位なラグランジュ部分多様体の集合 $\mathcal{L}(L) := \{\phi(L) \mid \phi \in \mathrm{Ham}_c(M,\omega)\}$ には，以下のようにしてラグランジュホーファー擬距離が定義される．

$$d(L_0, L_1) := \inf\{\|\phi\| \ \mid \ \phi(L_0) = L_1,\ \phi \in \mathrm{Ham}_c(M,\omega)\}.$$

ここで $\|\phi\|$ は，[Ho90] において Hofer によって導入された $\mathrm{Ham}_c(M,\omega)$ 上の距離である．ホーファー距離に関する $\mathrm{Ham}_c(M,\omega)$ の直径が無限大になることが予想されている一方，ラグランジュホーファー距離空間については直径が有限になる例が知られており，ラグランジュ部分多様体のある種の剛性との関連が示唆されている [Us13].

1　関連する先行研究と主結果

[Kh09] において Khanevsky は複素平面上の単位開円板 D^2 の直径 L_{diam} について，Entov-Polterovich[EP03] による $\mathrm{Ham}_c(D^2,\omega_0)$ 上の擬準同型（quasi-morphism）を用いることにより，距離空間 $(\mathcal{L}(L_{diam}),d)$ の直径が無限大であることを示した．Khanevsky の証明にはシンプレクティック多様体の二次元性に強く依存する部分があったが，[Se14] において Seyfaddini はこれを次元に依存しない証明に置き換え，複素 n 次元単位開球 B^n の実部 $Re(B^n)$ に関して距離空間 $(\mathcal{L}(Re(B^n)),d)$ の直径が無限大であることを示している．加えて Seyfaddini は以下で示す主定理２にあたる不等式を得ている．

本論文では，Khanevsky，Seyfaddini の証明の方針に従って得られた以下の結果を纏めている．

$C_c^\infty((0,1))$ を開区間 $(0,1)$ 上のコンパクトな台をもつ滑らかな関数の集合とし，ノルム $\|f\|_\infty, \|f\|$ をそれぞれ

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in(0,1)} |f(x)|, \quad \|f\| := \max_{x\in(0,1)} f(x) - \min_{x\in(0,1)} f(x)$$

により定義する．単位開円板の直積 $(D^2\times D^2, \omega_0\oplus\omega_0)$ におけるラグランジュ部分多様体 $L_\delta := T_\delta\times Re(D^2)$ を考える．ここで δ は $1/2<\delta\leq 1$ なる実数とし，$T_\delta := \{|z_1|^2 = 1/(2\delta)\}$ とする（すなわち T_δ は D^2 の面積の $1/(2\delta)$ 倍の面積をもつ円板の境界である）．

主定理 1. 任意の $1/2<\delta\leq 1$ に対し，$\mathcal{L}(L_\delta, d)$ の直径は無限大である．

主定理 2. 任意の $(2+\sqrt{3})/4<\delta\leq 1$ に対し，ある写像 $\Phi_\delta : C_c^\infty((0,1))\to\mathcal{L}(L_\delta)$ と δ によらない２つ正の定数の $C_\delta, D_\delta\in\mathbb{R}_{>0}$ が存在し，

$$\frac{\|f-g\|_\infty - D_\delta}{C_\delta} \leq d(\Phi_\delta(f), \Phi_\delta(g)) \leq \|f-g\|.$$

[BEP04] において Biran-Entov-Polterocvich は，$\mathrm{Ham}_c(B^n, \omega_0)$ 上に実数 δ でパラメトライズされた線形独立な擬準同型を構成した．Seyfaddini はこの擬準同型の族を応用することにより上の定理２にあたる不等式を得ている．ただし Seyfaddini の場合には一つのラグランジュ部分多様体についての研究であり，主定理２のようにラグランジュ部分多様体の族についての不等式を得ているわけではない．

主定理 1, 2 の証明は Seyfaddini と同様の方針で，$\delta\in(0,1]$ でパラメトライズされたシンプレクティック共形埋め込み $\Theta_\delta := \theta_\delta\times\theta_\delta : (D^2\times D^2, \omega_0\oplus\omega_0)\to(S^2\times S^2, 1/2\cdot\omega_{std}\oplus 1/2\cdot\omega_{std})$ による擬準同型の引き戻しを考えることによって示される．しかし主定理 2 に関しては，Seyfaddini が行ったような埋め込みのパラメータを利用した方法はそのままでは上手くいかない．そこで，深谷-Oh-太田-小野（[FOOO11],[FOOO12]）によって得られた $\mathrm{Ham}_c(S^2\times S^2)$ 上の実数 $\tau\in(0,1/2]$ でパラメトライズされた擬準同型 μ^τ および superheavy ２次元トーラス $T_\tau\subset S^2\times S^2$ を用いることにより上の結果を得た．Seyfaddini の場合と異なり，擬準同型の族 μ^τ の defect D_{μ^τ} について，$\sup_\tau D_{\mu^\tau}$ が有限になることを示す必要があるが，これについては [FOOO11] における defect の上界の計算例を参考にすることにより，$\sup_\tau D_{\mu^\tau}\leq 12$ を示した．また，主定理２における写像 Φ_δ を構成するためには，シンプレクティック共形埋め込み Θ_δ の像に superheavy トーラス T_τ の族の一部が含まれていることを示す必要がある．これについては Oakley-Usher[OU13] の結果を利用する事により，主定理２の δ の条件の下で示している．

ただし $\delta>1$ のとき，すなわち T_δ が単位開円板 D^2 の面積の半分より小さな円板の境界となっているとき，$(\mathcal{L}(L_\delta), d)$ の直径は有限か無限かは未解決である．この場合は T_δ が単位開円板 D^2 で分離的（displaceable）であり，本論文で行った $1/2<\delta\leq 1$ の場合は T_δ は D^2 内で非分離的（nondisplaceable）である．ラグランジュ部分多様体 L_δ の直積成分についてのこの剛性の違いがラグランジュホーファー距離空間の違いとして現れてくるかという問いは今後の課題の一つであり，本論文の中で得られた結果はこの問題に取り組むための第一段階の結果であったと捉えられる．

参考文献

[BEP04] P. Biran, M. Entov and L. Polterovich. "*Calabi quasimorphisms for the symplectic ball.*" Commun. Contemp. Math., 6.05 (2004): 793-802.

[EP03] M. Entov and L. Polterovich. "*Calabi quasimorphism and quantum homology.*" International Math. Research Notices 2003.30 (2003): 1635-1676.

[FOOO11] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta, K. Ono. "*Spectral invariants with bulk quasimorphisms and Lagrangian Floer theory.*" arXiv:1105.5123 (2011).

[FOOO12] K. Fukaya, Y. G. Oh, H. Ohta, K. Ono. (2012). "*Toric degeneration and nondisplaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$.*" Int. Math. Research Notices, 2012(13), 2942-2993.

[Ho90] H. Hofer. "*On the topological properties of symplectic maps.*" Proc. Royal Soc. Edinburgh 115.1-2 (1990): 25-38.

[Kh09] M. Khanevsky. "*Hofer's metric on the space of diameters.*" J. Topol. and Anal. 1.04 (2009): 407-416.

[OU13] J. Oakley, M. Usher. "*On certain Lagrangian submanifolds of $S^2 \times S^2$ and $\mathbb{C}P^n$.*" arXiv:1311.5152 (2013).

[Se14] S. Seyfaddini. "*Unboundedness of the Lagrangian Hofer distance in the Euclidean ball.*" Electron. Res. Announc. Math. Sci. 21 (2014): 1-7.

[Us13] M. Usher. "*Hofer's metrics and boundary depth.*" Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 46-1 (2013): 57-128.