論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　甲　　第　　　号

氏　　　　名　　正 谷　優 典

論 文 題 目

On a family of Lagrangian submanifolds in bidisks and Lagrangian Hofer metric (開円板の直積におけるラグランジュ部分多様体のある族とラグランジュホーファー距離について)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
森 吉　仁 志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太 田　啓 史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士.
林　　孝 宏

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川 平　友 規

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Hofer は 1990 年に発表した論文において，最も基本的なシンプレクティック多様体である $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ のハミルトン微分同相群上に，ハミルトニアンの L_∞ ノルムを用いて，今日 Hofer（擬）距離とよばれる距離を導入した．その後多くの研究者によって，一般のシンプレクティック多様体 (M, ω) に関する Hofer 距離の研究が活発に行われ，現在 Hofer Geometry と呼ばれシンプレクティック幾何学の重要な研究テーマの一つとなっている．

この Hofer 距離を用いると，ラグランジュ部分多様体のハミルトン同位類の集合に距離を導入することができる．すなわち，シンプレクティック多様体 (M, ω) のラグランジュ部分多様体 L に対して，L とハミルトン同位 (Hamilton isotopic) なラグランジュ部分多様体の全体を $\mathcal{L}(L)$ と表す：

$$\mathcal{L}(L) = \{L' \subset M | L' = \phi(L), \phi \in \mathrm{Ham}_c(M, \omega)\}.$$

このとき以下のようにして，$\mathcal{L}(L)$ 上にラグランジュ Hofer 距離が定義される：

$$d(L_0, L_1) = \inf\{\|\phi\| : \phi(L_0) = L_1, \phi \in \mathrm{Ham}_c(M, \omega)\}.$$

ただし $\mathrm{Ham}_c(M, \omega)$ はコンパクト台をもつハミルトン微分同相写像のなす群であり，$\|\phi\|$ は Hofer 距離を表す．

ラグランジュ部分多様体 $L \subset (M, \omega)$ が与えられたとき，ラグランジュ Hofer 距離 d に関する $(\mathcal{L}(L), d)$ の直径が有界であるか否かは，ラグランジュ部分多様体の研究に関して基本的な問題である．例えば，コンパクト多様体 N の余接空間 T^*N 内の零切断が与えるラグランジュ部分多様体について，そのラグランジュHofer 距離空間は有界でない．反対に，ラグランジュHofer 距離に関して $\mathcal{L}(L)$ の直径が有界となる例（例えば L が $\mathbb{R}^2$ 内の円周の場合）も Usher により知られている．この例では L はハミルトン微分同相群に関して分離的（displaceable）なラグランジュ部分多様体である．こうした事実に基づき Usher 等は，ラグランジュ部分多様体が非分離的（non-displaceable）という性質と，ラグランジュHofer 距離空間が非有界という性質が，相互に関連しているのではないかと示唆している．

2009 年に Khanevsky は複素平面内の単位開円板 B^2 の実部として与えられるラグランジュ部分多様体 $\Re(B^2)$ について，Entov-Polterovich による $\mathrm{Ham}_c(B^2, \omega_o)$ 上の擬準同型（quasi-morphism）を用いることにより，距離空間 $(\mathcal{L}(\Re(B^2)), d)$ の直径が無限大であることを示した．Khanevsky の証明には 2 次元の特殊性に強く依存する部分があったが，2013 年に Seyfaddini は次元に依存しない証明を得ることに成功し，実 $2n$ 次元単位開球 B^{2n} の実部 $\Re(B^{2n})$ の場合に距離空間 $(\mathcal{L}(\Re(B^{2n})), d)$ の直径が無限大であることを示した．さらにより精密に以下の主定理 2 に現れるような定量的な不等式を証明した．

本申請者は，Seyfaddini の方法を整理拡張することにより，2 次元単位開円板の 2 つの直積内の，互いにハミルトン同位でないラグランジュ部分多様体のある連続族を考え，その族に属

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

する任意のラグランジュ部分多様体に対し，ラグランジュHofer距離空間が非有界になることを示した．さらにSeyfaddini型の不等式も証明した．主結果は以下に述べる２つの定理である．

まず $C_c^\infty(0,1)$ を開区間 $(0,1)$ 上のコンパクト台をもつ滑らかな関数の集合とし，ノルム $\|f\|_\infty, \|f\|$ をそれぞれ

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in(0,1)} |f(x)|, \quad \|f\| = \max_{x\in(0,1)} f(x) - \min_{x\in(0,1)} f(x)$$

と定める．そして２次元単位開円板 B^2 の直積 $(B^2 \times B^2, 2\omega_o \oplus 2\omega_o)$ におけるラグランジュ部分多様体 $L_\delta = T_\delta \times \Re(B^2)$ を考える．ただし $1/2 < \delta < 1$，$T_\delta = \{z \in B^2 : |z|^2 = 1/(2\delta)\}$ とする．

主定理 1. 任意の $1/2 < \delta < 1$ に対し，$\mathcal{L}(L_\delta; d)$ の直径は無限大である．

主定理 2. 任意の $(2+\sqrt{3})/4 < \delta \le 1$ に対し，ある写像 $\Phi_\delta : C_c^\infty(0,1) \to \mathcal{L}(L_\delta)$ と２つの正定数 C_δ, D_δ が存在し，次が成立つ：

$$\frac{\|f-g\|_\infty - D_\delta}{C_\delta} \le d(\Phi_\delta(f), \Phi_\delta(g)) \le \|f-g\|.$$

Seyfaddini はEntov-Polterovichの $\mathbb{C}P^n$ 上の一つの擬準同型と B^{2n} から $\mathbb{C}P^n$ への共形シンプレクティック埋め込みの族を用いることにより上記主定理２に現れる不等式を得たが，そこでは単独のラグランジュ部分多様体を扱っており，主定理２のようなラグランジュ部分多様体の族に対して成立する不等式を得ているわけではない．そのような不等式を得るためには，さらに精緻な議論を必要とする．本申請者は，深谷-Oh-太田-小野によって得られた $S^2 \times S^2$ 上の擬準同型の族を巧みに用いて上記主結果を導いており，この証明の過程は本学位申請論文おける独創的な部分と認められる．

公開審査会において申請者は，ラグランジュ部分多様体の分離性に関する剛性 (intersection rigidity) とラグランジュHofer距離空間が非有界であることとの関連性について深い理解を示し，主定理証明のアイディアを明快に説明した．また質疑応答において，$\delta > 1$，$1/2 < \delta \le 1$（本論文で扱った場合）に応じて，T_δ が単位開円板内で分離的（displaceable），非分離的（non-displaceable）となることを述べ，さらに今後の課題として，ラグランジュ部分多様体 L_δ の直積成分についてのこの剛性の違いがラグランジュHofer距離空間の違いにどのように反映されるかという問題にも言及した．この点からも，申請者がラグランジュ部分多様体の分離性に関して，広汎な知識を有する様子が察せられる．

従って，この論文において得られている結果は当該分野において意義ある重要な貢献であると認められる．また，本論文に関する公開審査会を 2015 年 1 月 28 日に行い，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．

以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．