別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Mean value formulas for Euler-Zagier multiple zeta functions
(Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の平均値公式)

氏　　名　松岡　謙晶

論　文　内　容　の　要　旨

$s=\sigma+it, s_1=\sigma_1+it_1, \ldots, s_k=\sigma_k+it_k$ を複素変数とする。Euler-Zagier 型 k 重ゼータ関数を

$$\zeta_k(s_1,s_2,\ldots,s_k)=\sum_{1\le n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_k^{s_k}}$$

と定義する。この関数の解析的な性質は、最近色々な角度から研究されている。$k=1$ の場合、すなわちリーマンゼータ関数については多くの研究があるが、わかっていない部分が多い。例えば、リーマンゼータ関数の増大度について言うと、$\zeta(s)=O(t^{\epsilon})$ が任意の $\epsilon>0$ で成立することが予想されているが、予想される評価まで改善するのは非常に難しいと考えられる。一方で、リーマンゼータ関数の平均的な挙動については、ある程度分かっている部分もある。

$$I_{\sigma,2k}(T)=\int_2^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt$$

と定義する。もし、全ての自然数 k で $I_{1/2,2k}(T)=O(T^{1+\epsilon})$ が成立すれば、$\zeta(s)=O(t^{\epsilon})$ が成立することが知られていて、実際、$k=1$ の場合については

$$I_{\sigma,2}(T)\sim\begin{cases}\zeta(2\sigma)T & (\sigma>1/2)\\ T\log T & (\sigma=1/2)\\ \frac{(2\pi)^{2\sigma-1}}{2-2\sigma}\zeta(2-2\sigma)T^{2-2\sigma} & (\sigma<1/2)\end{cases}$$

であることが知られている。この結果を見ると、$\sigma=1/2$ の場合を境界としてリーマンゼータ関数の二乗平均値の挙動が変化していることが分かる。

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の増大度について、二重、三重の時は木内、谷川が上からの評価を与えているが、最善の評価とは言えないと思われる。二重ゼータ関数の平均値は、松本、津村により初めて研究され、σ_1,σ_2 がある条件を満たすとき、

$$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_2 \sim \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma_2)T$$

が成立することを示した。ここで、

$$\zeta_2^{[2]}(s_1, \sigma_2) = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^{s_1}} \right|^2 \frac{1}{n^{\sigma_2}}$$

である。

本論文の第二章では、

（1）松本、津村の結果の改良

（2）松本、津村が考察していない二乗平均値の考察

を行う。（1）について述べると、松本、津村が考えていない σ_1, σ_2 についても

$$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_2 \sim \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma_2)T$$

が成立することを示し、$\sigma_1 + \sigma_2 = 3/2$ かつ $\sigma_2 > 1/2$ のときは

$$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_2 \sim |s_1 - 1|^{-2} T \log T$$

であることを示す。松本、津村により $\sigma_1 + \sigma_2 = 3/2$ において $I^{[2]}(T) \sim CT \log^A T$ となることが、予想されていたが、上の結果から彼らの予想は正しいということが分かる。ここで、A, C は定数である。（2）については、$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_1$ および $\int_2^T |\zeta_2(\sigma_1 + it, \sigma_2 + it)|^2 dt$ を考察する。

第三章では、第二章で用いた方法を用いて Euler-Zagier 型 k 重ゼータ関数の二乗平均値を考察する。具体的には

$$\int_2^T |\zeta_k(s_1, \ldots, s_k)|^2 dt_1 \sim \begin{cases} \zeta_k^{[1]}(2\sigma_1, s_2, \ldots, s_k)T & (\sigma_1 + \cdots + \sigma_k > k - 1/2) \\ |F_k(s_2, \ldots, s_k)|^2 T \log T & (\sigma_1 + \cdots + \sigma_k = k - 1/2) \\ f_k(\sigma_1, s_2, \ldots, s_k) T^{2k - 2(\sigma_1 + \cdots + \sigma_k)} & (\sigma_1 + \cdots + \sigma_k < k - 1/2) \end{cases}$$

を示す。ここで、$\zeta_k^{[1]}(2\sigma_1, s_2, \ldots, s_k), F_k(s_2, \ldots, s_k), f_k(\sigma_1, s_2, \ldots, s_k)$ は T に無関係なものである。第二章で、$\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_1$ を考察したが、第三章の結果はこの結果を含んでいる。リーマンゼータ関数の二乗平均値の場合、$\sigma = 1/2$ の場合を境に二乗平均値の挙動が変化していることが分かるが、上の結果から k 重ゼータ関数でも似たような状況が生じていることが分かる。