論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※　甲　　第　　　号

氏　　　　名　　松　岡　　謙　晶

論　文　題　目

Mean value formulas for Euler-Zagier multiple zeta functions
（Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の平均値公式）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉　本　　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松　本　　耕　二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士.
鈴　木　　浩　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
津　川　　光　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

の零点の分布に関する未解決問題としてはリーマン予想が有名であるが，仮にこれが正しければ，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\zeta(1/2+it)=O(t^{\varepsilon})$ $(t\to\infty)$ という Lindelöf 予想も正しい事が知られている．Lindelöf 予想自身も未解決であり，その解決に向けた数々の試みがなされているが，その中の一つとして積分平均

$$I_{\sigma,2k}(T)=\int_2^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt,\qquad k\in\mathbb{N}$$

の T に関する漸近挙動からのアプローチがあり，実際すべての $k\in\mathbb{N}$ に対して「$I_{1/2,2k}(T)=O(T^{1+\varepsilon})$ $(\forall\varepsilon>0)$」が成立するならば，Lindelöf 予想は正しいことが知られている．この方面における基本的な成果としては，$k=1$ の場合における Littlewood による公式

$$I_{1/2,2}(T)\sim T\log T+(2\gamma-\log(2\pi)-1)T,\qquad \gamma \text{ は Euler 定数}$$

が知られている他，その誤差項の詳しい表現および精密な評価などが Atkinson, Heath-Brown らにより与えられている．その際，Euler-Zagier 型２重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1,s_2)$ を用いた調和積公式

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2)=\zeta_2(s_1,s_2)+\zeta_2(s_2,s_1)+\zeta(s_1+s_2)$$

が重要な役割を果たしていることは特筆すべきである．一般に Euler-Zagier 型多重ゼータ関数とは，

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_r)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}\cdots m_r^{s_r}}$$

により定義される Riemann ゼータ関数の一般化であり，この場合も含めた積分平均の挙動に関するより多くの知見を蓄積していくことは，Lindelöf 予想に関連する研究のひとつの流れとなっている．

松岡氏の学位論文は以上の状況を背景としたものであり，その主たる成果は以下のとおりである：

第１の成果として，Euler-Zagier 型２重ゼータ関数の積分平均に対する漸近挙動を考察した．これに関してはごく最近研究され始めたばかりであり，唯一の先行研究として，Matsumoto-Tsumura により

$$I^{[2]}(T)=\int_2^T|\zeta_2(\sigma_1+it_1,\sigma_2+it_2)|^2dt_2$$

の T に関する漸近挙動が (σ_1,σ_2) がある領域に属する場合にのみ与えられ，また (σ_1,σ_2) がその領域の境界にある場合の漸近挙動に関する予想が与えられているのみであった．この学位論文においては，Matsumoto-Tsumura の結果における (σ_1,σ_2) が属する領域を自然と思われる形で拡張し，同時に予想に対する完全な解答も与えている．さらには， Matsumoto-Tsumura では考察されていない

$$I^{[1]}(T)=\int_2^T|\zeta_2(\sigma_1+it_1,\sigma_2+it_2)|^2dt_1,\quad I^{\square}(T)=\int_2^T|\zeta_2(\sigma_1+it,\sigma_2+it)|^2dt$$

などの積分平均に対しても漸近挙動を決定している．

論文審査の結果の要旨

さらには第２の成果として，より一般の Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の積分平均

$$I_r^{[1]}(T)=\int_2^T|\zeta_r(\sigma_1+it_1,\ldots,\sigma_r+it_r)|^2dt_1$$

の T に関する漸近挙動を決定した．これは第１の成果における $I^{[1]}(T)$ に関する結果をそのまま多重化したものに相当する．$I^{[1]}(T)$ に関する結果における (σ_1,σ_2) が属するべき領域としては $I^{[2]}(T)$ の場合のそれよりも単純なものが現れるが，同様に，一般の多重ゼータ関数の場合にも第一変数についての扱いがもっとも単純である。この事実を見いだした事も，この学位論文のひとつの重要な貢献である．

これら諸成果の証明には Matsumoto-Tsumura における積分表示を使った解析接続を用いるだけでは不十分で，Euler-Maclaurin の公式を用いた別の積分表示を用いて解析接続し，さらにオーダー評価に関する Kiuchi-Tanigawa の技法を巧みに適用することで初めて可能となることを見いだすなど，オリジナリティの高い手法を用いている点も評価できる．

このように，松岡氏の学位論文は解析的数論の重要課題に位置する多重ゼータ関数に対する新しい知見を与えたものであり，学位論文として十分な内容を持つものである．第１の成果は副論文として Nagoya Mathematical Journal 誌において掲載予定となっている他、第２の成果も Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 誌において掲載が決定している．これらは共著論文となってはいるが，松岡氏の貢献はその主要な部分すべてにわたるものである．

本学位申請に伴う公開学位審査セミナーは２０１５年２月１０日に行われたが，松岡氏の問題意識とその解決への基本的アプローチ，および主結果の意義などが，非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであった．質疑に対しても的確に応答しており，十分な学識を有していることが認められる．

以上により，本学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．