# 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

| 報告番号 | ※　甲　　第　　　号 |
| --- | --- |

氏　　　　名　　村　中　　大　地

論　文　題　目

Monopole Walls and Hyperkähler Metrics
（モノポールウォールとハイパーケーラー計量について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　　啓　史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅　野　　浩　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）.
白　水　　徹　也

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
粟　田　　英　資

# 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の２重周期的な $SU(2)$BPS モノポールのモジュライ空間のある近似的な計量に関する結果である。

４次元 $SU(2)$Yang-Mills ゲージ理論を３次元ユークリッド空間に還元することで BPS モノポール方程式が得られる。BPS モノポール方程式の解のモジュライ空間には、Hitchin-Karlhede-Lindström-Roček によって hyper Kähler 計量が入ることが hyper Kähler 商の記述を通して知られている (1987)。特にモノポールチャージが２の場合モジュライ空間は４次元となり、この場合は Atiyah-Hitchin により、hyper Kähler 計量が具体的に書き下されているが、一般の高次元の場合に hyper Kähler 計量を具体的に書き下すことは難しい。

物理学者 Gibbons-Manton は 1995 年にモノポールのダイナミックスの（低エネルギー）有効作用として、モジュライ空間をターゲット空間とするシグマ模型のラグランジアンを求めることで、$k$ 個の互いに十分離れたところに位置する BPS モノポールに対応するモジュライ空間のエンド部分の計量を近似的に表すと思われる hyper Kähler 計量を明示的に与えた。これは今日 Gibbons-Manton 計量と呼ばれるが、数学的に言えば、どういう意味で元来の hyper Kähler 計量を近似しているのか定量的に定式化されかつ証明されているわけではない。彼らの基本的なアイデアは、次の通りである。静的な BPS モノポールから出発して、それに時間依存性をもったゲージ変換とローレンツ変換を施して動的な BPS モノポール（ダイオン）を得るのであるが、その際、1) モノポールの位置は互いに十分離れていること、および 2) ゲージ場および Higgs 場の時間微分は十分小さいという仮定の下でダイオンのダイナミックスを解析する。1) の条件から、相互作用は点粒子の場合のそれと近似され、2) の条件の下で低エネルギーの有効（近似）作用を書き下すことができ、そこから１回（時間）微分の２次の項を見ることでモジュライ空間の近似的な計量を読み取ることができる、というシナリオである。

その後、弦理論の進展により、BPS モノポール解のモジュライ空間は４次元あるいは５次元をそれぞれ $S^1, T^2$ でコンパクト化した超対称性 Yang-Mills 理論のクーロン枝の真空状態とみることができるという視座が得られ、古典的な BPS モノポール解で空間１次元方向に周期的な解（モノポール鎖)、２次元方向に２重周期的な解（モノポール壁）の詳しい研究が必要となってきた。

2002 年に Cherkis-Kapstin はモノポール鎖を考えその場合に Gibbons-Manton のシナリオを実行し近似計量を求めた。非周期的な場合とは異なり、モノポール鎖の場合には無限個のモノポールを扱うため、そのまま重ね合わせると発散の問題が生じる。そのために彼らは、モノポールの相対座標を用いてある種の正則化のプロセスを行い、低エネルギー有効作用を取り出してモノポール鎖に対して Gibbons-Manton 計量を書き下した。それに先立ち 2000 年に彼らは、モノポールがディラック型の特異点を持つ場合、許容しうる特異点の個数を、モノポールチャージを用いて上から評価していた（モノポールチャージが２の場合は４つ。)

以上の背景の下で、申請者は共同研究により Cherkis-Kapstin のモノポール鎖に対応する結果を２次元方向に２重周期的な解（モノポール壁）の場合に拡張した。すなわち、

# 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

(1) モノポール壁の場合に、モノポールの位置は互いに十分離れていること、およびゲージ場および Higgs 場の時間微分は十分小さいという仮定の下で Gibbons-Manton 計量を、対応するシグマ模型のラグランジアンを求めることで明示的に与えた。
(2) モノポール壁で、ディラック型特異点を許容する場合に (1) の結果を拡張し、許容しうる特異点の個数を上から評価した。

その中で申請者の寄与は、(1) においては、２重周期性からやはり発散の問題が避けては通れないが、Cherkis-Kapstin によるモノポール鎖の場合の正則化の方法を援用することで解消し、ラグランジアンの相対部分の導出に関わる具体的な計算を実行したこと、(2) においては、単にモジュライ空間の次元によりモノポールチャージを用いた評価式を導出するのではなく、モノポールのスペクトル曲線のアメーバを用いた組み合わせ的手法 (Cherkis-Ward(2012)) を用いて求めたことである。(その結果、例えば、モノポールチャージが２の場合に許容しうる特異点の個数は、モノポール鎖の場合と同じく４であることが導出される。）以上の結果は雑誌 Phys. Rev. D **89** (2014) で既に出版されている。

本論文では、以上の結果に加え、モノポールの物理的、幾何学的背景、スペクトル曲線の解析など関連する事項について総括的な解説が含まれている。

２重周期的なモノポール壁のモジュライ空間の hyper Kähler 計量を近似する計量を具体的に求めた結果は、基本的でありかつ発見的意味において興味深い。その数学的基礎付けを明解にすべき課題は残すものの当該研究にとって意義ある結果と考えられる。本論文に関する公開審査会を 2015 年 2 月 24 日に行い、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した。以上により、本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があると判断する。