別紙４

報告番号	※　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　On the existence problem of Kähler–Ricci solitons
（ケーラー・リッチソリトンの存在問題について）

氏　　名　高橋　良輔

論　文　内　容　の　要　旨

コンパクト複素多様体 M 上の Kähler 計量 ω が **Kähler-Einstein** (KE) **計量**であるとは，ある定数 c が存在して，関係式 $\mathrm{Ric}(\omega) = c\omega$ を満たすことである．c は計量を正規化することで $c = -1, 0, 1$ として構わない．KE 計量が存在するためには，$c_1(M)$ がそれぞれ負定値，零，正定値の実 $(1,1)$ 型の形式で代表される必要がある．この条件を単に $c_1(M) < 0$, $c_1(M) = 0$, $c_1(M) > 0$ と表すことにする．M が Riemann 面のとき，KE 計量の存在は古典的な一意化定理から従う．M が高次元のときは，$c_1(M) \leq 0$ であれば KE 計量はただ 1 つ存在することが，Aubin，Yau によって証明された．M が Fano 多様体（すなわち，$c_1(M) > 0$）の場合は，**二木不変量**と呼ばれる KE 計量が存在するための障害と，二木不変量が消えないような具体例がいくつか構成されている．近年の研究によって，KE 計量の存在は "K-安定性" と呼ばれる幾何学的不変式論的安定性と同値であることが Chen-Donaldson-Sun，Tian によって証明された．

学位論文では，Fano 多様体上の **Kähler-Ricci soliton** (KS) の存在問題について考えた．Fano 多様体 M 上の Kähler 計量 ω と正則ベクトル場 V の組 (ω, V) は，関係式 $\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = L_V\omega$ を満たすとき，KS であると言う．KS は Kähler-Ricci flow と呼ばれる Kähler 計量 ω_t に関する時間発展方程式：

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\mathrm{Ric}(\omega_t) + \omega_t \\ \omega_0 \in c_1(M) \end{cases}$$

の自己相似解として自然に考えうる計量であり，KE 計量の一般化を与えている．また，KS を研究することは次の 2 つの理由で重要である：

(1) KS の候補となるベクトル場 V は M の正則構造から一意的に決まる．したがって，KS は KE 計量が存在するための障害である [6].

(2) Kähler-Ricci flow は時間大域解をもつ．さらに，この解は適当な仮定のもとで，KS に Cheeger-Gromov 収束する [7].

まず，申請者は KS の存在について次の結果を得た．

定理 1 ([4], Takahashi). *M を admissible 束とし，$c_1(M)$ が admissible であると仮定する．このとき，M は admissible KS をもつ．*

ここで **admissible 束**とは，Gauduchon らによって導入された特別な射影束を指しており，admissible 束上では，今までに，スカラー曲率一定 Kähler 計量や，その一般化である extremal Kähler 計量等の豊富な具体例が構成されている [1]．先行研究により，Toric Fano 多様体 [8] や，特定の $\mathbb{C}P^1$-束 [6] 上には，KS が存在することは既に知られていたが，定理 1 は，Tian-Zhu の具体例を高次元の射影束に対して拡張する結果である．

次に K-安定性について述べる．**K-安定性**とは，大雑把に言えば次のようなものである：Fano 多様体 M に対して**テスト配位**と呼ばれる，$\mathbb{C}$ によってパラメータ付けされた M の退化族で原点に特異をもつ（中心ファイバーと呼ぶ）ものを考え，各テスト配位に対して何らかの数値を対応させる．任意のテスト配位に対してこの数値が非負であり，かつ等号成立はテスト配位が自明なときに限るとき，M は K-安定であるという．

より詳しく述べると，中心ファイバーは一般に（特異）代数多様体であり，対応させる数値とは，代数多様体に対して一般化された二木不変量を指す．本来，二木不変量は M の正則ベクトル場全体のなす Lie 代数の指標として定義される．一方で，K-安定性は M の正則構造を飛び越えて定義される概念であり，たとえ M の自己同型群が離散であっても意味をもつ．この意味で，KE 計量が存在すれば K-安定であるという結果は，二木の障害を一般化するものである．

KS に対しては二木型の障害（**modified 二木不変量**と呼ぶことにする）は構成されてはいたものの [6]，つい昨今まで幾何学的不変式論的安定性の概念は存在しなかった．2014 年，Berman-Nyström は modified 二木不変量を対数端末特異点をもつ Fano 多様体に対して一般化することで，KS に対する K-安定性の概念を導入した [2]．この概念は導入されて日が浅いため，研究手法はおろか，計算例すらほとんど知られていない状態であった．そこで申請者は，Lu [3] の二木不変量の計算公式にヒントを得て，次を証明した：

定理 2 ([5], Takahashi). *射影空間内の一般の Fano 完全交叉の modified 二木不変量を代数的に計算する公式が存在する．*

また，いくつかの具体的な完全交叉に対して計算例を与えた．この公式は，局所化定理や特異点解消を用いた計算とは異なり，多様体の幾何学的データを一切必要とせず，また，多様体がどのような種類の特異点をもっていたとしても，代数的なデータのみを用いて画一的に計算ができるという点で優れていると考えられる．

参考文献

[1] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon and C. W. Tønnesen-Friedman, *Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry, III Extremal Metrics and Stability*, Invent. Math., **173** (2008), 547–601.

[2] R. J. Berman and D. W. Nyström, *Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler-Ricci solitons*, arXiv:1401.8264.

[3] Z. Lu, *On the Futaki invariants of complete intersections*, Duke Math. J., **100**(1999), 359–372.

[4] R. Takahashi, *Modified Kähler-Ricci flow on projectve bundles*, arXiv:1403.0985, to appear in Math. Zeit.

[5] R. Takahashi, *On the modified Futaki invariant of complete intersections in projective spaces*, arXiv:1410.4891, submitted.

[6] G. Tian and X. H. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Comm. Math. Helv., **77** (2002), 297–325.

[7] G. Tian and X. H. Zhu, *Convergence of Kähler-Ricci flow*, J. Amer. Math. Soc., **20** (2007), 675–699.

[8] X. J. Wang, X. H. Zhu, *Kähler-Ricci solitons on toric Fano manifolds with positive first Chern class*, Adv. Math. **188**(2004), 87–103.