学位論文

ミューオン異常磁気能率のアノマリーを説明する素粒子模型の現象論

名古屋大学 大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻
素粒子論研究室（E 研）
金光 俊一

平成 27 年 2 月 12 日

概 要

素粒子標準模型 (Standard Model) は、電弱スケールまでの物理を非常に良く説明する理論である。現在 CERN で行われている Large Hadron Collider (LHC) 実験で、標準模型の中で唯一未発見であった Higgs 粒子も発見され、標準模型が正しいことが確認された。しかし、ダークマターやニュートリノの質量といった標準模型では説明できない現象もあり、標準模型を超える物理の存在を示唆している。そのような標準模型では説明できない現象の一つに、実験による精密測定と理論からの精密計算によって示唆されている、ミューオン異常磁気能率（ミューオン g − 2）のアノマリーがある。標準模型のミューオン g − 2 の予言値と実験値との間には、3σ 程度の不一致（アノマリー）があることが指摘されている。この不一致は、標準模型の Z ボソンからの寄与と同じ程度の大きさであることから、ミューオン g − 2 のアノマリーは、電弱スケールにミューオンと弱く相互作用する新粒子が存在することを示唆している。本研究は、電弱スケールの新粒子がミューオンと新しい相互作用をする模型を考え、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する上で何が本質的に重要かを解明することを試みる。

具体的には、ミューオンと新しい湯川相互作用をもつ模型を考え、それらのミューオン g − 2 への寄与と電弱精密測定への影響を解析し、無矛盾なパラメーター領域を示す。その解析の結果、新粒子の寄与によるミューオン g − 2 の 1 ループダイアグラムにおいて、外線でのみカイラリティー・フリップが起きる単純な模型では、比較的大きな新しい湯川結合、もしくは電弱スケール以下の新粒子を導入する必要があることが分かった。一方で、内線の新粒子でカイラリティー・フリップを起こすことができる模型は、大きい湯川結合を導入することなく好ましい g − 2 の寄与が得られ、かつ電弱精密測定とも無矛盾であり得ることが分かった。また、ミューオン g − 2 を説明する新粒子が $h \to \gamma\gamma$ のヒッグス粒子の崩壊過程に影響する可能性と、LHC 実験における直接生成について議論し、将来の LHC 実験でこのような新粒子の発見が期待できることを示した。

さらに、内線の新粒子でカイラリティー・フリップを起こすことができる模型を拡張して、ミューオン g − 2 のアノマリーだけでなく、ニュートリノの質量や混合も説明できる模型を考えた。この模型は、その小さなニュートリノの質量を、輻射補正によって説明しようとするものである。本研究では、この模型における、ニュートリノの質量と混合の実験からの制限とレプトンフレーバーの破れ ($\mu \to e\gamma$) の現象を解析した。とりわけ、ミューオン g − 2 と $\mu \to e\gamma$ の有効相互作用はフレーバーを除いて同じ構造であることから、ミューオン g − 2 の寄与と $\mu \to e\gamma$ の過程には相関がある可能性が分かり、この模型がもつフレーバーの構造に制限を与えることを明らかにした。

目 次

1 序論

1.1 ミューオン g − 2 のアノマリーと電弱スケールの新しい物理

素粒子標準模型 (Standard Model:SM) [1] は非常に成功した理論である。近年、標準模型の枠組みの中で、唯一未発見であった Higgs 粒子も発見された [3, 4, 5]。この 125 GeV 程度の質量をもつヒッグス粒子は、電弱精密測定 (electroweak precision measurements) と無矛盾であり、標準模型は電弱スケールまでの自然界を良く記述している。しかしながら、標準模型は最終的な素粒子理論とは考えられていない。階層性問題は標準模型を超える物理を考える原動力となってきて、これまでに、超対称性 (supersymmetry)、余剰次元 (extra-dimension)、テクニカラー (technicolor) 等の多くのアイデアが、この問題を解決するために提唱されてきた。

LHC 実験は、このような階層性問題を解決する模型を検証するのに理想的な環境であり、その探索は現在も進行中である。Large Hadron Collider (LHC) による 8TeV での探索まで終了し、これまでのところ標準模型からの深刻なずれは見つかっていない。ハドロンコライダーである LHC は、QCD 相互作用を通して容易にカラーをもつ粒子を作れるため、特にカラーをもつ粒子は強い制限を受けている。例えば、constrained minimal supersymmetric standard model (CMSSM) では、グルイーノと共に第 1 世代と第 2 世代のスクォークは非常に制限され、これらの典型的な質量の下限は 1.7 TeV 程度である [6]。このような LHC 探索における否定的な結果は、新しい物理と階層性問題の間に緊張を生んでいる。このように、階層性問題を動機とした模型は制限を受けつつあり、特に、階層性問題の解決法としての CMSSM は厳しく制限される。したがって、異なるアプローチから標準模型を超える新しい物理を考えるのに、今は良い時期であるといえるだろう。

標準模型を超える物理を考えるには、未解決の実験結果を元にしたアプローチもある。ミューオン異常磁気能率 (muon anomalous magnetic moment:muon g − 2) は、最も精密に測られている物理量のひとつである [7]。多くのグループによる標準模型の理論的な予言は、実験値と標準模型の予言値との間に不一致 (anomaly) があることを示唆している [8]。

$$\delta a_\mu \equiv a_\mu^{\rm exp} - a_\mu^{\rm SM} = (26.1 \pm 8.0) \times 10^{-10}, \tag{1.1}$$

ここで、δa_μ は実験値 ($a_\mu^{\rm exp}$) と標準模型の予言値 ($a_\mu^{\rm SM}$) との間のアノマリー (anomaly) を表す。このアノマリーが本当のものかどうかを理解するため、標準模型の予言に係る不定性について数多くの議論 [8, 9, 10] がある。もし、この不一致が標準模型によって説明できなければ、これは標準模型を超える物理の証拠となるだろう。現在のところ、標準模型の枠内で満足のいく説明は無いように思われる。したがって、このアノマリーを説明するような標準模型を超える物理を真剣に考えることによって、それがどのように検証可能な予言をするかを調べることは、意義のあることである。

興味深いことに、ミューオン g − 2 のアノマリーと標準模型の電弱ゲージボソンによって生じる 1 ループの寄与は、同じオーダーの大きさになる。このことは、ミューオン g − 2 の

アノマリーを説明するには、相互作用の大きさが電弱ゲージ結合定数のオーダーであるとすれば、電弱スケールの質量をもつ新粒子が必要であることを示唆している。

1.2 ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しい相互作用

ミューオン g − 2 のアノマリーは、階層性問題を動機とする新しい物理の模型という枠組みの中でも議論されてきたが（例えば MSSM は [11]、余剰次元は [12]、リトルヒッグス模型は [13] を参照）、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明できる模型の本質が何かが、あまり明らかではなかった。そこで、それを明らかにするために本研究では「ボトムアップ」スタイルのアプローチを採用する[#1]。具体的には、ミューオン g − 2 に新しい寄与を生じさせる新しい相互作用を導入する所から出発し、新しい物理の模型のもつ重要な特徴を引き出すことを試みる。この論文では文献 [16] での議論をもとに、ミューオン g − 2 に新しい寄与を生じさせる新粒子がミューオンと新しい湯川相互作用をもつ模型、を中心に議論を進める。

そして、そのような湯川作用をもつ模型を解析した結果、ミューオンのカイラリティー・フリップがミューオン g − 2 のダイアグラムの外線でのみで起こる模型は、比較的大きい湯川結合定数と電弱スケールの新粒子を必要とし、電弱精密測定からの制限が厳しいことを示す。その一方で、カイラリティー・フリップをミューオン g − 2 のダイアグラムの内線でも起こすことができる模型では、大きい湯川結合定数を導入せずとも好ましい g − 2 の寄与を得ることができ、かつ、電弱精密測定とも無矛盾である得ることを示す。また、LHC 実験でこのような粒子の直接的ないし間接的な発見も期待できることを示す。

ただし、上に述べた新しい湯川相互作用をもつ模型は、ニュートリノの質量を説明できないという点で、現象論的に不完全である。そこで最後に、このような新しい湯川相互作用をもつ、より魅力的な模型の可能性として、輻射補正を通してニュートリノに質量を与える模型を考え、レプトン・フレーバーの破れからの制限と無矛盾で、かつ、現実的なニュートリノの質量行列を再現し、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する模型が存在し得ることを明らかにする。

1.3 本論文の構成

本論文は以下のような構成になっている。次の第 2 節では、標準模型におけるミューオン g − 2 の予言の現状について、簡単にレビューする。そして、標準模型の予言と実験値との間に 3.5σ 程度のずれがあることを指摘した後、いくつかの標準模型を超える物理の例を挙げ、そのミューオン g − 2 への寄与について述べる。

第 3 節では、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しい相互作用を議論する。特に、ミューオンが新しい湯川相互作用をもつ場合の例として、(1) right-handed ミューオンのみが

[#1] 最近の関連する研究として文献 [14, 15] も参照。

新しい湯川相互作用をもつ模型、(2) right-handed と left-handed 両方のミューオンが新しい湯川相互作用をもつ模型、の２つを詳しく議論する。ミューオン g − 2 を説明するパラメーター領域を示した後、その領域が電弱精密測定とも無矛盾であるかを議論する。さらに、このような新しい湯川相互作用をもつ模型の LHC における現象論についても議論する。特に、$h \to \gamma\gamma$ のヒッグスボソンの崩壊に影響を与える可能性、ならびに、LHC におけるこのような新粒子の直接生成の生成断面積を示す。

第４節では、このような湯川相互作用をもつ模型を、ニュートリノの質量や混合を説明できるように拡張した場合の、レプトン・フレーバーの破れの現象ついて解析する。最後の第５節は、本論文のまとめである。

2　ミューオン g − 2 のアノマリーと標準模型を超える物理 (Review)

ミューオンの異常磁気モーメント (muon g − 2) #2 は素粒子実験のなかで、最も精密に測定されている物理量のひとつである [7]。そのため素粒子の理論からも精密な計算が行われ、素粒子標準模型 (Standard Model:SM) [1] の量子補正を含めたレベルでの検証が可能となっている。素粒子の理論からミューオン g − 2 の予言値 $a_\mu = (g_\mu - 2)/2$ を計算するには、大きさと符号がそれぞれ異なる、何百あるいは何千もの Feynman ダイアグラムからの寄与を足し合わせなければならない。そして、それぞれのダイアグラムからの寄与を十分な精度で計算することで、初めて正しい a_μ の値が得られる。そのため、もし 1 つでも重要な寄与を誤って評価してしまうと、その寄与よりも小さいオーダーの値は、何も意味を持たなくなってしまう。このミューオン g − 2 の現在の状況であるが、興味深いことに、実験値と標準模型の予言値との間に 3.5σ 程度のずれが報告されている [8, 17, 18, 19]。

この節では、標準模型におけるミューオン g − 2 の評価と、標準模型を超える物理からのミューオン g − 2 への効果についての簡単なレビューを行う。初めに 2.1 節で、標準模型の QED、ハドロン、Electroweak、それぞれのパートからのミューオン g − 2 への寄与ついてレビューする。それにより、標準模型の予言と実験値との間に 3.5σ 程度のずれがあることを示してから、次の 2.2 節で、標準模型を超える物理の観点から、この不一致がどのように議論されているかをレビューする。

2.1　標準模型のミューオン g − 2 の予言値

標準模型 (Standard Model:SM) のミューオン g − 2 の予言値は、一般的に次の 3 つの部分に分けられる。

$$a_\mu^{\rm SM} = a_\mu^{\rm QED} + a_\mu^{\rm Had} + a_\mu^{\rm EW}. \tag{2.2}$$

$a_\mu^{\rm QED}$ は QED からの寄与を表す。これはフォトンとレプトン (e, μ, τ) のループから成り、リーディング・オーダーは Schiwinger 項 $\alpha/2\pi$ から始まる。$a_\mu^{\rm Had}$ はハドロンからの寄与を表す。クォークとグルーオンのループから成り、標準模型のミューオン g − 2 の予言値 $a_\mu^{\rm SM}$ の主な不定性は、このハドロンの寄与 $a_\mu^{\rm had}$ から来る。$a_\mu^{\rm EW}$ は W ボソン、Z ボソンとヒッグスからの寄与を表す。

以下の節では、$a_\mu^{\rm QED}$ と $a_\mu^{\rm Had}$ と $a_\mu^{\rm EW}$、それぞれのパートの概要をレビューし、標準模型の予言値をまとまる。より詳しい議論は A. Hoecker と W. J. Marciano による PDG のレビュー [7]、F. Jegerlehner の著書 [25]、ミューオン g − 2 のレビュー [26] を参照されたい。

#2 異常磁気モーメント (g − 2) の概説は Appendix B にまとめた。

2.1.1 QED contributions

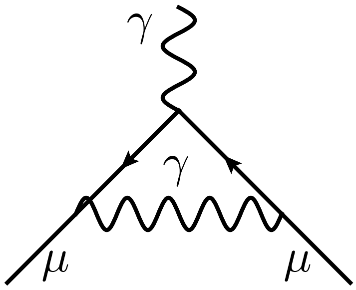


図 1: ユニバーサルな最低次の QED からの a_μ への寄与。

QED からの寄与 a_μ^{QED} は、5 ループのレベル [27] まで計算されており、現在の QED からの寄与の値は

$$a_\mu^{\mathrm{QED}} = 116\,584\,718.951(0.009)(0.019)(0.007)(.077) \times 10^{-11} \tag{2.3}$$

である [26]。(2.3) 式の括弧は a_μ^{QED} の不定性を表し、左から順にそれぞれレプトンの質量比、8 次の項 (eighth-order term)、10 次の項 (tenth-order term)、それと ^{87}Rb 原子から決めた微細構造定数 $\alpha^{-1}(\mathrm{Rb}) = 137.035\,999\,049(90)$ [0.66 ppb] [28] に対応する。

2.1.2 Hadronic contributions

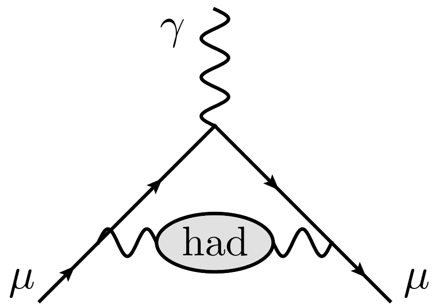


図 2: 最低次のハドロンからの a_μ への寄与。

ハドロン（クォークとグルーオン）からのループの寄与は、標準模型におけるミューオン g − 2 の予言の不定性の主な原因となっている。現在、これらの寄与は QCD の第一原理から計算することができないが、しかし将来的に lattice QCD の理解が進めば、少なくとも、部分的には計算できるようになると考えられている。

現在は QCD の第一原理から計算する代わりに、最低次の hadronic vaccum polarization の寄与 $a_\mu^{\rm Had}$ を、これに対応する断面積 (cross section) の測定から分散関係 (dispersion relation) を用いる方法 [29] で評価している。

$$a_\mu^{\rm Had;LO} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi}\right)^2 \int_{m_\pi^2}^\infty \frac{ds}{s^2} K(s) R(s), \quad \text{where} \quad R \equiv \frac{\sigma_{\rm tot}(e^+e^- \to \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{2.4}$$

ここで $K(s)$ は kinematic factor で 0.4 ($s = m_\pi^2$) から 0 ($s = \infty$) までの値をとる [30]。分散関係 (2.4) 式は、e^+e^- からハドロンに対消滅する裸の断面積 (bare cross section) と、hadronic vacuum polarization の a_μ への寄与を関係づけることができる。(2.4) 式は被積分関数に $1/s^2$ 因子の含むため、低エネルギー ($\rho \to \pi^+\pi^-$ resonance) における $R(s)$ の値（実験のデータ）が $a_\mu^{\rm Had;LO}$ の決定において最も重要である（dispersion integral の約 75 %を占める)。

$e^+e^- \to$ hadrons のデータを用いた解析の結果 [8, 18] はそれぞれ

$$a_\mu^{\rm Had;LO} = (6\,923 \pm 42) \times 10^{-11}, \tag{2.5}$$
$$a_\mu^{\rm Had;LO} = (6\,949 \pm 43) \times 10^{-11}, \tag{2.6}$$

である。

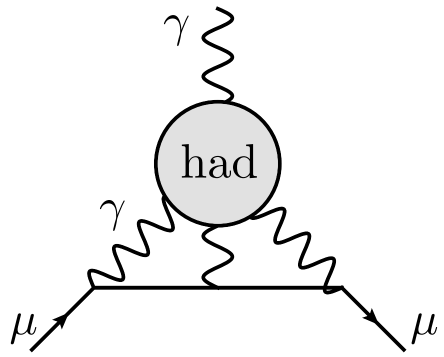


図 3: hadronic light-by-light からの a_μ への寄与。

図 3 の hadronic light-by-light (HLbL) からの寄与は、現在のところ、実験データから決めることができない。そこで、QCD の特性を正しく再現するモデル[#3]を用いた計算が行われている。異なるモデルの計算結果を統合して得られた、hadronic light-by-light からの寄与 (Glasgow Consensus) [9] は

$$a_\mu^{\rm HLbL} = (105 \pm 26) \times 10^{-11} \tag{2.7}$$

である。

[#3] QCD の低エネルギー有効理論として、例えば、chiral perturbation theory (CHPT)、extended Nambu-Jona-Lasino (ENJL) model、hidden local symmetry (HLS) model といったモデルが、hadronic light-by-light の評価に用いられている [25]。

2.1.3 Electroweak contributions

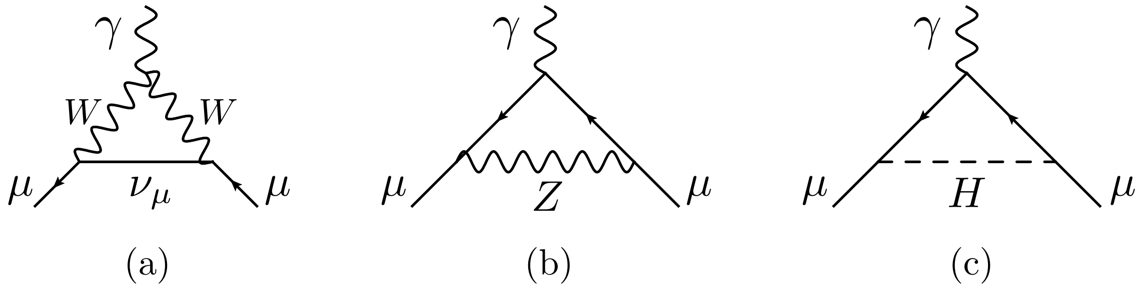


図 4: リーディングの Electroweak からの a_μ への寄与；ユニタリーゲージでのダイアグラム。

ヒッグスとミューオンの湯川結合定数は小さいため、W ボソンと Z ボソンからの寄与のみが、実験で測定可能なレベルとなる。Electroweak からの寄与は、現在 2 ループのレベルまで計算されており [31]

$$a_\mu^{\mathrm{EW}} = (153.6 \pm 1.0) \times 10^{-11}. \tag{2.8}$$

ただし誤差は、未知の 3 ループの寄与に加えて、クォークの triangle loops に起因する。

2.1.4 SM の予言値 vs 実験値：3σ を超えるアノマリー

最後に、標準模型のミューオン g − 2 の予言値をまとめ、実験値との比較を行う。QED からの寄与 a_μ^{QED} については文献 [27]、ハドロンからの寄与 a_μ^{had} については文献 [8, 9]、Electroweak からの寄与 a_μ^{EW} については文献 [32] の値を用いると、標準模型の予言値は表 1 で与えられる。表 1 の標準模型の予言値 a_μ^{SM} を E821 [20, 21] の実験値

	VALUE ($\times 10^{-11}$) UNITS
QED ($\gamma + \ell$)	$116\,584\,718.951 \pm 0.009 \pm 0.019 \pm 0.007 \pm 0.077_\alpha$
HVP(lowest-order) [8]	$6\,949 \pm 43$
HVP(higher-order) [8]	-98.4 ± 0.7
HLbL	105 ± 26
EW	154 ± 1
Total SM [8]	$116\,591\,828 \pm 43_{\text{H-LO}} \pm 26_{\text{H-HO}} \pm 2_{\text{other}}\ (\pm 50_{\text{tot}})$

表 1: 標準模型のミューオン g − 2 への寄与のまとめ。ただし、HVP は Hadronic Vacuum Polarization、HLbL は Hadronic Light-by-Light からの寄与をそれぞれ表す。

$$a_\mu^{\mathrm{EXP}} = 116\,592\,089(63) \times 10^{-11} \tag{2.9}$$

と比較すると、標準模型の予言値と実験値との差

$$a_\mu^{\rm EXP} - a_\mu^{\rm SM} = (26.1 \pm 8.0) \times 10^{-10} \tag{2.10}$$

を得る [8]。これは 3.3σ の不一致に対応する。

この不一致の原因は、一般的に次の 3 つの可能性が考えられる [22]。

1. ミューオン g − 2 の測定そのもの。すなわち、統計的なふらつき、もしくは見落とされている系統誤差の影響。
2. 標準模型のミューオン g − 2 の予言に含まれている、非摂動論的な hadronic corrections の評価に係る不定性。
3. 標準模型を超える物理からの寄与。

1 番目の可能性については、近い将来に、Fermilab の E989 実験 [23] と J-PARC で計画されている g − 2/EDM 実験 [24] によって、実験値がクロスチェックされる予定である。2 番目の可能性であるが、ハドロンからの補正を評価することは難しく、それには実験値からの外挿、摂動論的 QCD、非摂動論的なハドロンの模型による計算を必要としている。しかしながら、いくつかのグループによる解析 [8, 17, 18, 19] は、いずれも 3.5σ 程度の不一致を指摘している。

したがって、本研究では 3 番目の可能性を考え、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する標準模型を超える物理を構築することを目標とする。この節では、まず次の 2.2 節で、標準模型を超える物理からのミューオン g − 2 への寄与についてレビューする。

2.2 標準模型を超える物理とそのミューオン g − 2 への寄与の例

この節では、標準模型を超える物理 (Beyond Standard Model:BSM) の枠組みで、ミューオン g − 2 のアノマリーがどのように議論されているかを概説する。この節では、ゲージ階層性問題 [33] の観点から出発する模型の中から、特に超対称性模型 (SUSY models) とリトルヒッグス模型 (Little Higgs models)、におけるミューオン g − 2 への寄与についてまとめた。また、新しいゲージボソンからの寄与の可能性についても軽く触れる。他にも多くの BSM による議論があるが、ここでは、その全てを取り立てて言及しない。さらなる議論は例えば Jegerlehner の文献 [17, 25]、Melnikov と Vainshtein の文献 [34] 等を参照されたい。

2.2.1 Supersymmetry

超対称性 (supersymmetry:SUSY) はボソンとフェルミオンを交換する対称性である [35]。

$$Q|{\rm Boson}\rangle = |{\rm Fermion}\rangle, \qquad Q|{\rm Fermion}\rangle = |{\rm Boson}\rangle$$

SUSY 代数 (graded Lie algebra) は、

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0, \qquad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0\end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで $\bar{Q}_\alpha$ は超対称性変換の生成子であり、$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ はその共役に対応する。また $\hat{P}_\mu$ は時空の並進の生成子である。変換の生成子が (2.11) 式の代数を満たす対称性を「超対称性 (N=1 SUSY)」と呼ぶ。超対称性は、場の量子論において内部対称性と時空の対称性を統一する、非自明かつ唯一可能な対称性である。

超対称性を導入する主たる動機は、ゲージ階層性問題 [33] の解決である。標準模型のヒッグスはスカラーであるため、ヒッグスの質量をゼロにする対称性がない。その一方、カイラルフェルミオンにはカイラル対称性、ゲージボソンにはゲージ対称性という質量をゼロにする対称性がある。そのため、もしボソンとフェルミオンを関係づける超対称性が存在する場合は、スカラーにまでカイラリティーの概念が拡張され、スカラーの質量がゼロの極限でカイラル対称性が生じる。このとき、フェルミオンの質量がカイラル対称性によって２次発散から守られていたように、スカラーの質量に２次発散は現れなくなる (log 発散に変わる)。

超対称に拡張した標準模型は、標準模型の状態 X に対して、フェルミオンとボソンを交換した状態 $\tilde{X}$ に対応するスーパー・パートナーを伴う。レプトン、クォーク、ゲージボソン、ヒッグスボソンのスーパー・パートナーはそれぞれ、スレプトン、スクォーク、ゲージーノ、ヒグシーノと呼ばれる。

超対称性は、標準模型の粒子に課されたグローバル対称性なので、ゲージ対称性は標準模型から変わらず、新しいゲージボソンは追加されない。ただし、標準模型を超対称に拡張するには、ゲージアノマリーの相殺とスーパーポテンシャルの正則性から、２つのヒッグス２重項 H_d, H_u を導入する必要がある。結果として標準模型に、新たに４つのスカラー ($H^0, A^0, H^\pm$) と、それらのスーパー・パートナーが追加されることになる。また、２つのヒッグスの真空期待値の比は $\tan\beta = \langle H_u\rangle/\langle H_d\rangle$ と表され、SUSY のミューオン g − 2 を議論する上で重要なパラメーターとなる。

超対称性以外の仮定を導入せず、2HDM(two Higgs doublet models) に拡張した標準模型にスーパー・パートナーを導入した模型は、MSSM(Minimal Supersymmetric extensions of the SM) と呼ばれる。以下では、ミューオン g − 2 の寄与を MSSM に限定して議論する。

MSSM のミューオン g − 2 への寄与　MSSM におけるリーディングのミューオン g − 2 への寄与は、図 5 で表される。MSSM でのミューオン g − 2 への寄与の解析解 a_μ^{SUSY} を、$(1/\tan\beta)$ ないし M_W/M_{SUSY} で展開すると、a_μ^{SUSY} の近似式

$$a_\mu^{\mathrm{SUSY}} \simeq \mathrm{sign}(\mu) \frac{\alpha(M_Z)}{8\pi \sin^2\theta_W} \frac{(5+\tan^2\theta_W)}{6} \frac{m_\mu^2}{M_{\mathrm{SUSY}}^2} \tan\beta \left(1 - \frac{4\alpha}{\pi} \ln\frac{M_{\mathrm{SUSY}}}{m_\mu}\right) \tag{2.12}$$

を得る [17]。ただし、M_{SUSY} は典型的な SUSY ループの質量、M_W は W ボソンの質量、μ はヒグシーノの質量項、$\sin^2\theta_W$ は weak mixing angle、α は fine structure constant、$\alpha(M_Z)$ は

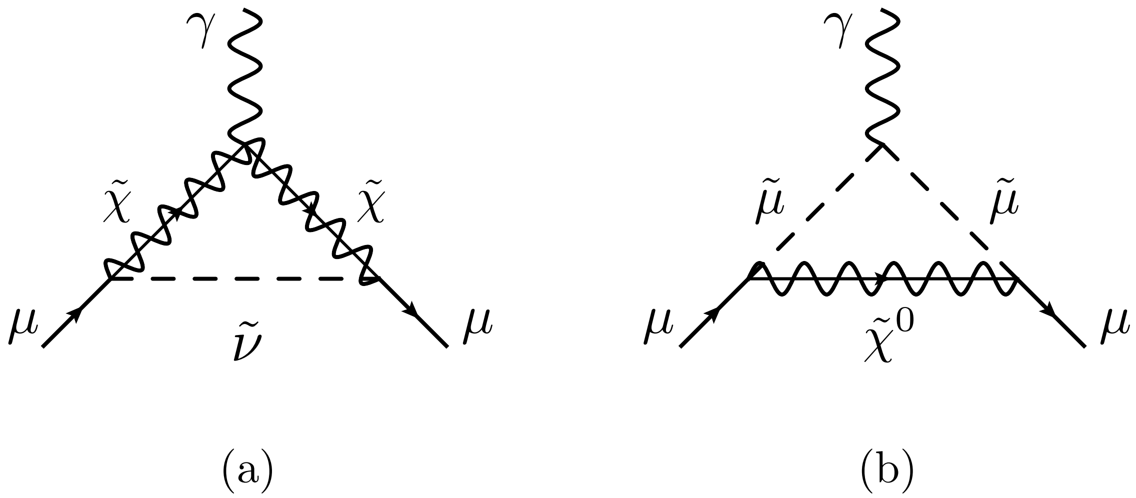


図 5: MSSM におけるリーディングのミューオン g − 2 への寄与。それぞれ　(a) スニュートリノ—チャージーノ　(b) スミューオン—ニュートラリーノ　のループからの寄与を表す。

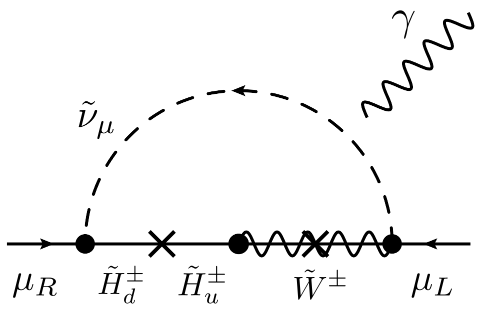
Z ボソンの質量スケール $\sqrt{s} = M_Z$ における effective fine structure constant をそれぞれ表す。(2.12) 式から $\tan\beta \sim 5$ 以上かつ $\mu > 0$ のとき、MSSM はスレプトン、チャージーノ、ニュートラリーノの質量が 100 GeV から 500 GeV 程度の領域で、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明できることがわかる。また、$\tan\beta$ が大きい領域では、a_μ^{SUSY} のより単純な近似式

$$\left|a_\mu^{\mathrm{SUSY}}\right| \simeq 123 \times 10^{-11} \left(\frac{100\,\mathrm{GeV}}{M_{\mathrm{SUSY}}}\right)^2 \tan\beta \tag{2.13}$$

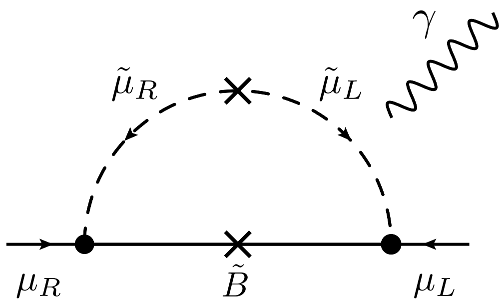
を得ることができる [25]。a_μ^{SUSY} の符号は、一般的に μ パラメーターと同符号である。(2.13) 式からわかるように、$\tan\beta = \mathcal{O}(10)$ に対して超対称粒子（スミューオン、ニュートラリーノ、チャージーノ）の質量が $\mathcal{O}(100)$ GeV 程度であれば、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明することができる。より詳しい議論は文献 [36] を参照されたい。

次に、MSSM でミューオン g − 2 を説明できる理論領域の LHC 実験における現状についてレビューする。MSSM では $\tan\beta = \mathcal{O}(10)$ のとき、スミューオン、ニュートラリーノ、チャージーノの質量が $\mathcal{O}(100)$ GeV 程度であれば、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明できる。図 5 で示した、MSSM におけるミューオン g − 2 への寄与を表すダイアグラムは、カイラリティー・フリップの構造を陽に書くと、図 6 のように表される。図 6 (a) で示された、チャージーノ—ミュースニュートリノのタイプの寄与に対して LHC 実験の結果を用いた解析は、文献 [37] で詳しく議論されている。その結果、LHC 実験から MSSM でミューオン g − 2 を説明するようなパラメーター領域は、SUSY のモデルの詳細に関係なく制限がつき初めていることが指摘されている。さらに 13-14 TeV の LHC では、広範なパラメーター領域が検証可能であると考えられている。

一方で、図 6 (b) で示された、ニュートラリーノ—スミューオンのタイプの寄与に対して



(a)



(b)

図 6: (a) チャージーノ—ミュースニュートリノからのミューオン g − 2 への寄与。ここで、$\tilde{\nu}_\mu$ はスニュートリノ、$\tilde{W}^\pm$ はウィーノ、$\tilde{H}_d^\pm, \tilde{H}_u^\pm$ はヒグシーノをそれぞれ表す。(b) ニュートラリーノ—スミューオンからのミューオン g − 2 への寄与。ここで $\tilde{\mu}_L, \tilde{\mu}_R$ はスミューオン、$\tilde{B}$ はビーノをそれぞれ表す。

LHC の結果を用いた解析は、文献 [38] で詳しく議論されている。このタイプからの寄与は、スミューオンの left-right mixing を大きくすることで、より大きいミューオン g − 2 への寄与を出すことができる。ただし、スミューオンの left-right mixing の項は、スレプトン—ヒッグスのポテンシャルに関する真空の安定性の条件からも制限を受ける。そのため、スレプトンとビーノの質量には上限が存在する。図 6 (b) のビーノからの寄与によって、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するシナリオは、文献 [38] でスレプトンがユニバーサルな質量をもつ場合と、スタウがスミューオンより重い場合で解析されている。

スレプトンがユニバーサルな質量をもつ場合、ミューオン g − 2 のアノマリーを 1σ (2σ) のレベルで説明するには、スミューオンの質量の上限は 300 (460) GeV となる。その結果、g − 2 を説明するパラメーター領域の一部は、既に LHC から除外されており、その他のパラメーター領域も、今後の LHC および ILC 実験で検証可能であることが指摘されている。

それに対し、スタウがスミューオンより重い場合は、スミューオンの質量の上限は 1.4 (1.9) TeV 程度まで大きくなり、LHC/ILC で検証可能な領域を超える。しかし、このような non-universal なスレプトンの質量スペクトラムは、一般的に大き過ぎるレプトン・フレーバーの破れ (LFV)、ないし CP の破れ (CPV) を予言する。したがって、このようなシナリオは近い将来、LFV および CPV による検証が期待されている。

2.2.2 Little Higgs model

リトルヒッグス模型 (little Higgs model) [39] は、ゲージ階層性問題を解決するために考案された模型の一つである。リトルヒッグス模型では、ヒッグスを、あるスケール f における近似的なグローバル対称性の自発的破れによって生じた pseudo Nambu-Goldstone boson とみな

すことで、ヒッグスが軽い理由を説明する。電弱対称性は Coleman-Weinberg mechanism [40] を通じて破れ、ヒッグスの質量は量子効果から生じる。このグローバル対称性は、２つのセットの相互作用によって完全に破れるように仕組まれている。すなわち、ヒッグスの質量補正に対する２次発散が現れるのは、結合定数を２種類以上含む２ループ以降になる (correcitve symmetry breaking)。特にトップクォークからの質量補正については、トップクォークのパートナーのフェルミオンを導入し、かつ correcitve symmetry breaking の機構を使うことによって、トップクォークからの質量補正の２次発散が相殺されるよう調整されている。

corrective symmetry breaking を実現するアプローチのなかで、新しく導入する自由度が最も少ない模型が、littlest Higgs model [41] である。この模型のグローバル対称性の破れのパターンは SU(5) $\rightarrow$ SO(5) で、かつ、SU(5) の部分群として含まれる $[\mathrm{SU}(2)\times \mathrm{U}(1)]^2$ をゲージ対称性にとる。この $[\mathrm{SU}(2)\times \mathrm{U}(1)]^2$ は、スケール f で標準模型のゲージ群にあたる直交部分群 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)$ に破れる。この新しいゲージ対称性から、標準模型のゲージボソンに加えて、質量がスケール f 程度の重たいゲージボソン $A_H, W_H^{\pm}, Z_H$ が新たに導入される。ところが電弱精密測定からスケール f の値は強い制限受け、典型的には $f \gtrsim 3$ ― 5 TeV 程度の下限を得る。

この電弱精密測定からの制限は、T パリティー [42] と呼ばれる Z_2 パリティーを課すことで回避することができる。このような模型は littlest Higgs model with T-parity (LHT) [43] と呼ばれる。文献 [44, 45, 46] で示されているように、LHT では電弱精密測定と矛盾せずに、スケール f を 500 GeV 程度まで下げることができる。

Littlest Higgs model with T-parity のミューオン g − 2 への寄与　Littlest Higgs model with T-parity (LHT) のミューオン g − 2 の値は、文献 [13, 47] で研究されている。ミューオン g − 2 には、T-odd の重たいゲージボソンに加えて、T-odd の mirror leptons である重たい荷電レプトン l_H^i と重たいニュートリノ ν_H^i $(i=1,2,3)$ のループが寄与する。ミューオン g − 2 への寄与が、どの程度大きくなり得るかを調べるため、LEP のスレプトン探索の下限から、大ざっぱに mirror leptons の質量を 200―300 GeV と仮定してみる。さらに電弱精密測定から、スケール f は 500 GeV 程度まで小さくすることが許されるので、heavy photon の質量を $M_{A_H} \sim 65\mathrm{GeV}$ （W_H と Z_H は 300 GeV 程度）と仮定してみる。それでもなお、LHT からのミューオン g − 2 への寄与 a_μ^{LHT} は、文献 [47] で解析されているように

$$a_\mu^{\mathrm{LHT}} < 12 \times 10^{-11} \tag{2.14}$$

程度にしか大きくなれない。したがってミューオン g − 2 のアノマリーは、LHT では説明することができない。LHT のミューオン g − 2 への寄与 a_μ^{LHT} が SUSY に比べて小さい理由は、$\tan\beta$ の様な enhancement factor が存在しないからである。

2.2.3　新しいゲージ相互作用

標準模型のゲージ群 $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ を拡張すれば新しいゲージボソンが導入され、それらはミューオン g − 2 に新たに寄与することができる [48]。そして、標準模型の Z ボソンより重たい新しいゲージボソンは、SO(10) もしくは E_6 といった大統一模型に代表される、様々なゲージ群を拡張した標準模型に現れる。

そのような例として、標準模型のゲージ群 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)$ を $\mathrm{SU}(2)_R \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)$ に拡張した、left-right symmetric model と呼ばれる模型 [49] が挙げられる。left-right symmetric model には、non-abelian の電弱ゲージ群からの 4 つの荷電ゲージボソンと 2 つの中性ゲージボソン、ならびに U(1) のゲージボソンが存在する。また電弱対称性は、left-handed と right-handed のゲージボソンが異なる質量をもつようなヒッグス機構によって破れている。このような模型では、一般的に、ミューオンのゲージボソンとヒッグスボソンに対する結合は標準模型の場合から変化し、これによってミューオン g − 2 に新しい寄与を生ずる。こうしたゲージボソンからミューオン g − 2 のアノマリー [8] を説明するには、ゲージ結合の強さが標準模型の電弱ゲージ結合程度で、ゲージボソンが電弱スケールの質量をもつ必要がある。しかしながら、このような電弱スケールの軽いゲージボソンは、直接測定ないし精密測定から既に除外されている[#4]。

そのために、ミューオン g − 2 のアノマリーを動機とする新しいゲージ相互作用として、結合定数が非常に弱く、かつ、MeV スケールの質量をもつようなゲージボソンが提唱されている。このようなゲージボソンを実現する有名な方法が、ダーク・ゲージボソン (Dark Gauge Boson) 模型である。以下では、まず 2.2.3 節でダーク・ゲージボソン模型の概要を述べ、このシナリオに対する現在の実験からの制限を述べる。続く 2.2.3 節では、現在の実験による制限を満たしつつ、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しいゲージボソンのシナリオの一つとして、$L_\mu - L_\tau$ gauge symmetric model について述べる。

Dark Gauge Bosons　ダーク・ゲージボソンは、我々の世界とは標準模型のフォトンとの kinetic mixing を通してのみ相互作用するダーク・セクターに存在すると考えられる、比較的軽いベクターボソンである [51, 52] [#5]。このような軽いゲージボソンは標準模型の粒子と弱く相互作用し、このゲージボソンからのミューオン g − 2 への寄与は、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する大きさになり得る。また、このような軽いゲージボソンを考える動機として他に、宇宙線実験における陽電子超過の観測 [54, 55] などのダークマター (Dark Matter) に関する物理 [56] が挙げられる。

標準模型の粒子と弱く結合する軽いゲージボソンを実現する有名な方法が、ダークフォト

[#4]例えば、重たい荷電ゲージボソン W' ないし中性ゲージボソン Z' の、現在の典型的な質量の下限値は、それぞれ 1.5 TeV, 2 TeV 程度である [50]。より詳しい議論は文献 [34, 36] を参照。

[#5]ダーク・セクターのゲージ対称性 $\mathrm{U}(1)_d$ と標準模型の $\mathrm{U}(1)_Y$ の kinetic mixing は、重たい未知のフェルミオンのループによって生じると考えられる [53]。したがって、ダークゲージボソンと標準模型の粒子の相互作用は非常に弱くなると考えられる。

ン模型 [53, 57, 58] である。ダーク・セクターで破れた $\mathrm{U}(1)_d$ ゲージ対称性に対応するダークフォトン Z_d と標準模型の粒子との相互作用は、標準模型の $\mathrm{U}(1)_Y$ とダーク・セクターのゲージ対称性 $\mathrm{U}(1)_d$ の kinetic mixing を通して引き起こされる [58]。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{\cos\theta_W}B_{\mu\nu}D^{\mu\nu} - \frac{1}{4}D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} \tag{2.15}$$

ここで、$B_{\mu\nu}$ と $D_{\mu\nu}$ は $\mathrm{U}(1)_Y$ と $\mathrm{U}(1)_d$ の field strength tensor をそれぞれ表し

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad D_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_{d\nu} - \partial_\nu Z_{d\mu} \tag{2.16}$$

である。ただし $|\epsilon| \lesssim 10^{-2}$ （重たいフェルミオンのループによって生じると考えられる）は混合パラメーターである。また $\cos\theta_W$ は weak mixing angle である。(2.15) 式のゲージ場の運動項を B_μ と $Z_{d\mu}$ の再定義によって対角化し、運動項がカノニカルになるように規格化することで、ダークフォトンと標準模型の electromagnetic current との結合を得ることができる [58]。

$$\mathcal{L}_{\text{dark photon}} = -\epsilon e J^\mu_{\text{em}} Z_{d\mu}, \quad J^\mu_{\text{em}} \equiv Q_f \bar{f}\gamma^\mu f + \cdots . \tag{2.17}$$

ここで、Q_f はフェルミオン f の QED 電荷を表す。また、(2.17) 式中の省略符号は non-fermionic current を表す。ちなみにダークフォトンという名称は、(2.17) 式のようにダーク・ゲージボソンが標準模型のフェルミオンと、非常に小さい vector coupling をもつことに由来する[#6]。

(2.17) 式よりダークフォトンはレプトン $l = e,\ \mu$ に ϵe の強さで結合し、レプトン l の $\mathrm{g}-2$ に新しい寄与 $a_l^{\text{dark photon}}$ を生ずる。

$$a_l^{\text{dark photon}} = \frac{\alpha}{2\pi}\epsilon^2 F_V(m_{Z_d}/m_l) \tag{2.18}$$

ここで $F_V(x)$ は

$$F_V(x) \equiv \int_0^1 dz \frac{2z(1-z)^2}{(1-z)^2 + x^2 z}, \quad F_V(0) = 1 \tag{2.19}$$

である。また、α は微細構造定数である。(2.18) 式で表されたダークフォトンからのミューオン $\mathrm{g}-2$ への寄与であるが、文献 [60] で指摘されているように、エレクトロン $\mathrm{g}-2$ からの制限、ならびに固定標的実験、メソンの稀崩壊実験による探索[#7]によって、ミューオン $\mathrm{g}-2$ を説明するような m_{Z_d} と ϵ のパラメーター領域は、ほぼ除外されつつある。

[#6] ダークフォトン模型では、ダーク・ゲージボソンと標準模型のフェルミオンとの axial coupling は ϵ の高次の項でしか現れない。ただし、ダーク・ゲージボソンに質量を与えるヒッグスセクターをより一般化すると、ダーク・ゲージボソンは標準模型の weak neutral current とも結合する。より詳しい議論は文献 [59] を参照。

[#7] 最近の BaBar と PHENIX の結果 [61, 62] も参照。

$L_\mu - L_\tau$ **gauge symmetric model**　上で議論したダークフォトンはレプトンにユニバーサルに結合するため、ミューオン g − 2 を説明するような m_{Z_d} と ϵ のパラメーターで、特にダークフォトンの質量 m_{Z_d} が軽い領域は、エレクトロン g − 2 から強い制限を受ける [58]。そのため、レプトン数 (L) をゲージ化した $\mathrm{U}(1)_L$ ゲージ対称性を導入することで、レプトンのフレーバーに依存したゲージ相互作用を含む模型が提唱されている [60]。

このような模型の一つの例として、$L_\mu - L_\tau$ gauge symmetric model [63, 64] が提案されている。L_μ と L_τ は μ と τ のレプトン数をそれぞれ表し、$L_\mu - L_\tau$ はアノマリーフリーなゲージ対称性である。この $L_\mu - L_\tau$ ゲージボソン（Z'' と呼ばれる）は、ミューオンとタウおよびそれらのニュートリノとしか結合しない。そのため直接的ないし間接的な実験からの制限はダークフォトンの場合に比べて弱く、質量が MeV スケールの Z'' によってミューオン g − 2 のアノマリーを説明できる可能性が指摘されている [64, 65]。

3　ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しい相互作用

この節の内容は主に文献 [16] に基づいた議論であり、標準模型にミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しい相互作用を導入した模型を考察し、そのような模型のもつ特性を理解しようとする試みの一つである。ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しい相互作用には、湯川型の相互作用ないしゲージ型の相互作用が考えられる。本論文では文献 [16] の議論に基づき、新しい相互作用については、特に湯川相互作用の場合を考察する。

初めに 3.1 節で、新しい湯川相互作用からのミューオン g − 2 への効果を評価する。続く 3.2 節では、新しい湯川相互作用を持つ模型の電弱精密測定への影響を解析する。最後に 3.3 節で、LHC 実験での検証について解析する。

3.1　「新しい湯川相互作用」のミューオン g − 2 への効果

標準模型のミューオン g − 2 の予言値のずれを新しい物理から説明するには、ミューオンが何かしらの荷電粒子と、新しい相互作用を持たなければならない。このとき、ミューオン g − 2 の有効演算子はフォトンと結合しているので、ミューオンと荷電粒子の新しい相互作用は、ループの効果を通して新しい g − 2 の寄与を出すことができる。

本論文では、このような新しい相互作用として、right-handed のミューオン、もしくは right-handed と left-handed のミューオンとの新しい湯川型の結合を考える。本論文では以下の 2 つの模型を議論する: (1) right-handed ミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ模型 (2) right-handed と left-handed、両方のミューオンが新しい湯川相互作用をもつ模型

ただし、この節の以下で議論する模型は、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明することはできるが、ニュートリノの質量や混合の現象を説明できないという点で、現象論的に不完全な模型となっている。ミューオン g − 2 のアノマリーだけでなく、ニュートリノの質量や混合も同時に説明できる、より魅力的な模型については、後の第 4 節で議論することにする。

3.1.1　right-handed ミューオンのみが「新しい湯川相互作用」をもつ場合

第一の場合として、right-handed ミューオンのみが新しい $SU(2)_L$ singlet フェルミオン χ と singlet スカラー ϕ と結合する、以下の新しい湯川相互作用を考える。

$$\mathcal{L} = -y_N \bar{\mu}_R \chi_L \phi - m_\chi \bar{\chi}_R \chi_L + \text{h.c.} - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \cdots. \tag{3.20}$$

ここで μ_R は right-handed ミューオンである。また QED 電荷の保存から、新しいフェルミオン χ と新しいスカラー場 ϕ の QED 電荷をそれぞれ Q_χ, Q_ϕ とすると、 $Q_\phi = -1 - Q_\chi$ が成り立つ。フェルミオン χ とスカラー ϕ の質量は、それぞれ m_χ, m_ϕ と表す。加えて、模型を単純化するため、標準模型の粒子を even、新粒子 χ と ϕ を odd とする Z_2 パリティーを模型に課す。これは模型を単純化するために課した対称性であるが、ダークマターの物理の観点か

ら、このような Z_2 パリティーは魅力的である。ただし、例え模型に Z_2 パリティーを課したとしても、例えば、right-handed の電子は ϕ と χ に対して同様の湯川相互作用をもつことに注意しなくてはならない。そしてこのような相互作用は、まだ未発見の $\mu \to e\gamma$ の現象を引き起こすなど、深刻なフレーバー混合の問題を引き起こす。本節では、レプトンフレーバーの破れについて議論しないが、フレーバー混合の抑制のために近似的なミューオン・フレーバー対称性を課し、ここでは暗に χ または ϕ がミューオン・フレーバー数をもつと仮定する。

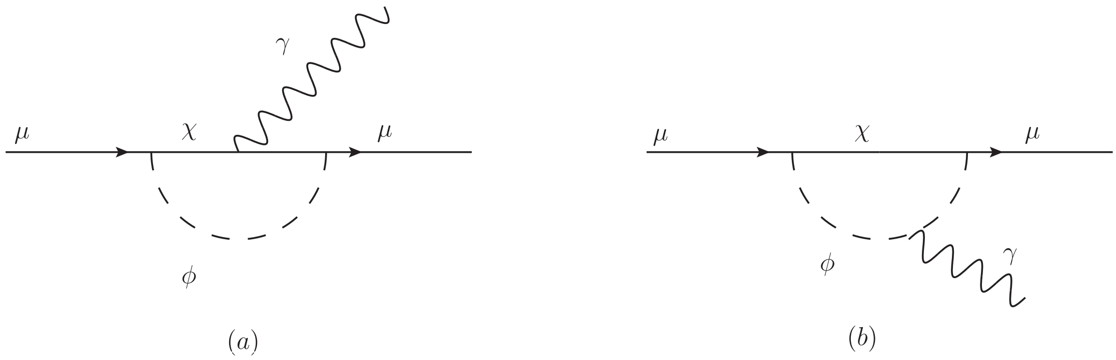


図 7: ミューオン g − 2 の Feynman diagram

right-handed ミューオンが χ と ϕ に結合しているので、図 7 で表されるような輻射補正は、新しいミューオン g − 2 の寄与 $a_\mu^{\rm new}$ を生ずる。ミューオン g − 2 への寄与 $a_\mu^{\rm new}$ は

$$a_\mu^{\rm new} = -\frac{y_N^2 m_\mu^2}{16\pi^2}\left[Q_\chi(C_{11}+C_{21})(\phi,\chi,\chi;p,-q) - Q_\phi(C_{12}+C_{22})(\phi,\phi,\chi;q,p-q)\right], \tag{3.21}$$

で与えられる[#8]。ただし、p と $p-q$ は外線のミューオンの運動量、q はフォトンの運動量である。また、$q^2 \to 0$ の極限をとった。ここで、$C_X(A,B,C;p_1,p_2)$ $(X = 11,\ 21,\ 12,\ 22)$ は Passarino-Veltman functions [66] と呼ばれるループ積分で、本論文における Passarino-Veltman functions の定義は Appendix A に載せた。(3.21) 式の $(C_{11}+C_{21})$ および $(C_{12}+C_{22})$ の陽な表式は

$$(C_{11}+C_{21})(\phi,\chi,\chi;p,-q) = \frac{1}{m_\phi^2}\frac{2-3y-6y^2+y^3+6y\log y}{6(1-y)^4}, \tag{3.22}$$

$$(C_{12}+C_{22})(\phi,\phi,\chi;q,p-q) = \frac{1}{m_\phi^2}\frac{1-6y+3y^2+2y^3-6y^2\log y}{6(1-y)^4}, \tag{3.23}$$

である。ただし $y = m_\chi^2/m_\phi^2$, $q^2 = 0$ であり、$O(m_\mu^2/m_\phi^2)$ の高次の項は無視した。(3.21) 式の第 1 項は図 7(a) から、第 2 項は図 7(b) に由来する。

[#8] ミューオン g − 2 の計算過程は Appendix B.2.3 を参照。

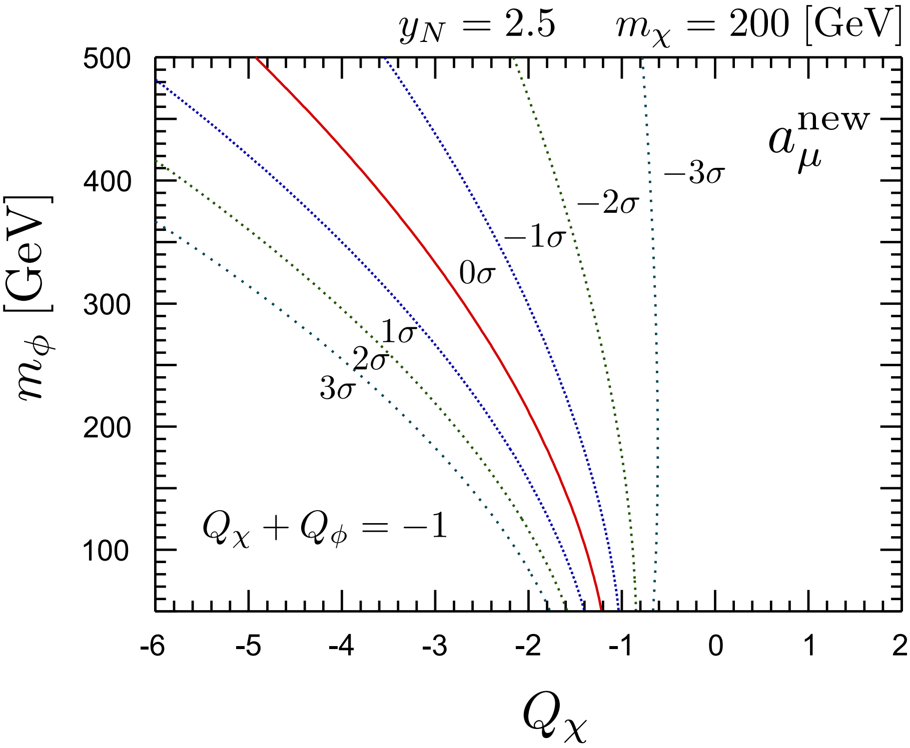


図 8: 新しい物理からのミューオン g − 2 への寄与 ($a_\mu^{\rm new}$) を Q_χ と m_ϕ の関数で表した。ここで、$y_N = 2.5$　かつ　$m_\chi = 200$ GeV にとった。図の等高線は、右から左に $(a_\mu^{\rm new}/10^{-10}) = 2.1,\ 10.1,\ 18.1,\ 26.1,\ 34.1,\ 42.1,\ 50.1$ 50.1 で、それぞれ $-3\sigma,\ -2\sigma,\ -1\sigma,\ 0\sigma,\ 1\sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma$ の測定値からのずれに対応する。

図 8 は、Q_χ と m_ϕ の関数で表した、新しい物理からのミューオン g − 2 への寄与 $a_\mu^{\rm new}$ である。ここで $y_N = 2.5$ かつ $m_\chi = 200$ GeV にとった。図は右から左に、$(a_\mu^{\rm new}/10^{-10}) = 2.1, 10.1, 18.1, 26.1, 34.1, 42.1, 50.1$ の等高線を表し、それぞれ $-3\sigma, -2\sigma, -1\sigma, 0\sigma, 1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ の測定値からの不一致に対応する。ここで $a_\mu^{\rm new}$ の y_N 依存性は自明で、(3.21) 式より $a_\mu^{\rm new}$ は y_N^2 に比例することに注意する。例えば、$y_N = 1$ とすると、図 8 の $a_\mu^{\rm new}$ の値は、$(1/2.5)^2 = 0.16$ 倍減少する。図 8 から $Q_\chi > -1$（$Q_\phi < 0$ に対応）の領域は、ミューオン g − 2 のデータから好ましくないことがわかる。ここで図 8 からわかる面白いことは、中性のフェルミオン（$Q_\chi = 0$、$Q_\phi = -1$ に対応）では、どのような m_ϕ の値でもアノマリーを説明するのが難しいという性質である。一方で、中性のスカラー（$Q_\phi = 0$、$Q_\chi = -1$ に対応）はあまり重たくなければ、アノマリーを解消できる可能性がある。さらに面白いことに、m_ϕ がアノマリーの解消にとって適当な値であれば、多価の荷電フェルミオンとスカラー（例えば $Q_\chi = -2,\ -3, \cdots$ のとき $Q_\phi = 1,\ 2, \cdots$ となるような電荷）も、ミューオン g − 2 のアノマリーにとって好ましいという性質がある。したがって、ミューオン g − 2 のアノマリーは新粒子の質量のスケールと同様、新粒子の QED 電荷に対しても制限を与える。

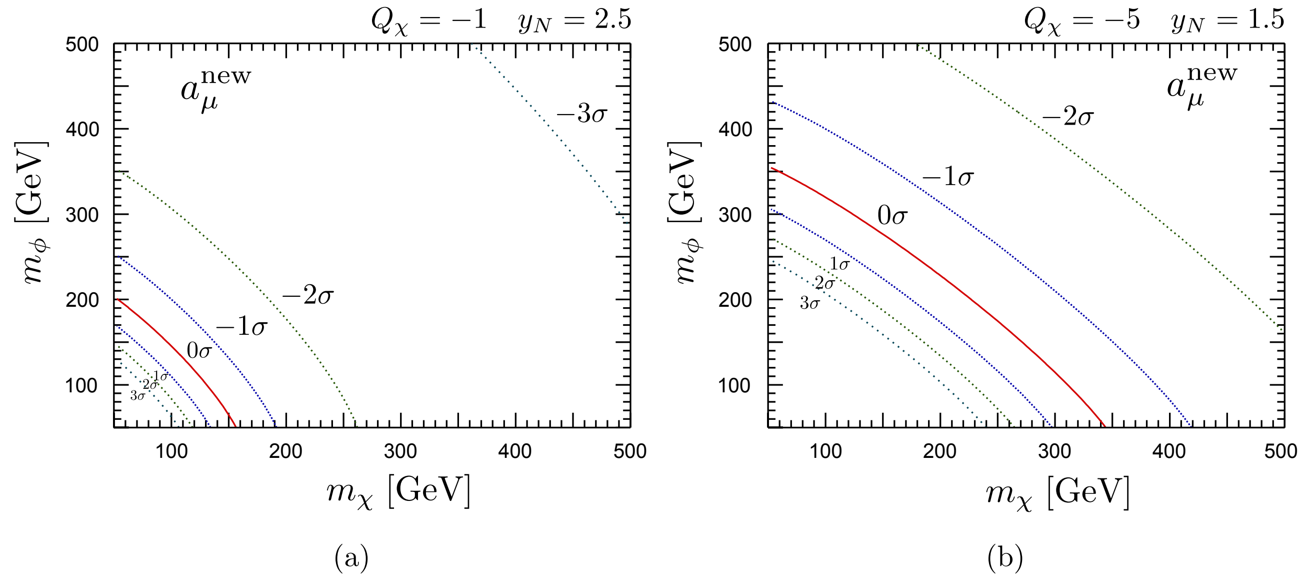


図 9: (a) $Q_\chi = -1$ かつ $y_N = 2.5$ (b) $Q_\chi = -5$ かつ $y_N = 1.5$ それぞれ場合に、新しい物理からのミューオン g − 2 への寄与を m_χ と m_ϕ の関数で表した。図 8 と同様、等高線は $(a_\mu^{\rm new}/10^{-10}) = 2.1,\ 10.1,\ 18.1,\ 26.1,\ 34.1,\ 42.1,\ 50.1$ （$-3\sigma,\ -2\sigma,\ -1\sigma,\ 0\sigma,\ 1\sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma$ の測定値からずれに対応）を表す。

図 9 は、(a) $Q_\chi = -1$（$Q_\phi = 0$ に対応）かつ $y_N = 2.5$ と (b) $Q_\chi = -5$（$Q_\phi = 4$ に対応）かつ $y_N = 1.5$ のときの $a_\mu^{\rm new}$ を m_χ と m_ϕ の関数で表したものである。図 8 と同様、等高線は $(a_\mu^{\rm new}/10^{-10}) = 2.1,\ 10.1,\ 18.1,\ 26.1,\ 34.1,\ 42.1,\ 50.1$ （$-3\sigma,\ -2\sigma,\ -1\sigma,\ 0\sigma,\ 1\sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma$ の測定値からのずれに対応）を表す[#9]。図 9 から、$Q_\chi = -1$ のとき、質量がおおよそ 100 GeV で結合定数が $y_N \sim O(1)$ の新粒子が、ミューオン g − 2 のアノマリーの解消には好ましいことがわかる。また、図 9(b) から、χ の QED 電荷をより一層負にとる場合は（−1 から −5)、湯川結合定数 y_N を小さくしても、ミューオン g − 2 はより大きくなることがわかる。

したがって、ミューオン g − 2 のアノマリーの解消には ($\sim O(100$ GeV$)$) の比較的軽い新粒子、あるいは、比較的大きな湯川結合 ($\sim O(1)$) が必要である。このようなシナリオでは、こうした新粒子や新しい相互作用が、電弱精密測定に影響し得る。したがって、後の節 3.2 では、これらの粒子の電弱精密測定への影響を検証する。

また、ミューオン g − 2 のアノマリーは、比較的軽い新粒子、あるいは多価の新しい荷電粒子の存在を示唆していることにも注意する。よって、これらの粒子が LHC で直接的、もしくは間接的に見つけられるか否かを知ることは、非常に重要である。この後の節で、LHC でのこれらの粒子の直接生成、およびヒッグスの $\gamma\gamma$ への崩壊に対する影響を議論する。

[#9] 湯川結合定数 y_N の大きさを変えるには、単に図 9 の (a)、(b) それぞれの $a_\mu^{\rm new}$ の値に $(\frac{y_N}{2.5})^2$ と $(\frac{y_N}{1.5})^2$ の因子を掛ければよい。

3.1.2 right-handed と left-handed 両方のミューオンが「新しい湯川相互作用」をもつ場合

前節から変わって、この節では第二の場合として、right-handed と left-handed 両方のミューオンが、新しい湯川相互作用をもつ場合を考える。

$$\mathcal{L} \;=\; -y_L \bar{L}_2 \Phi \chi_R - y_R \bar{\mu}_R \phi \chi_L - m_\chi \bar{\chi}_L \chi_R + \mathrm{h.c.}, \tag{3.24}$$

ただし L_2 $(=(\nu_{\mu L},\ \mu_L)^{\mathrm{T}})$、$\Phi$ $(=(\phi_1,\phi_2)^{\mathrm{T}})$ 、ϕ は、それぞれ第 2 世代の SU(2) doublet lepton、SU(2) doublet のスカラー、SU(2) singlet のスカラーである。また χ は質量 m_χ の SU(2) singlet fermion である。ここではモデルを簡単化するため、再び Z_2 パリティーを仮定する。この Z_2 パリティーの元で、標準模型の粒子は even、新粒子の ϕ、Φ と χ は odd である。ここでさらに、χ もしくは $(\phi,\ \Phi)$ がミューオン・フレーバー数をもつ、近似的なミューオン・フレーバ対称性を暗に仮定する。そうすることで、このような湯川相互作用からのフレーバー混合は強く抑制される。

新粒子の QED 電荷は $\mathrm{SU}(2)_L$ singlet のフェルミオン χ の QED 電荷 Q_χ を用いて、次のように表される。

$$\begin{aligned} Q(\phi_1) &\equiv Q_1 = -Q_\chi, && (3.25)\\ Q(\phi_2) &\equiv Q_2 = -1 - Q_\chi, && (3.26)\\ Q_\phi &= -1 - Q_\chi = Q_2. && (3.27) \end{aligned}$$

ここで $Q_\phi = Q_2$ が成り立つため、ϕ と ϕ_2 は互いに混合できる。例えば、以下のようなゲージ不変な項は、電弱対称性の自発的破れの後に $\phi_2 - \phi$ の混合を生む項になる。

$$\mathcal{L} = -\lambda M (H^\dagger \Phi \phi^\dagger) + \mathrm{h.c.} = -\frac{\lambda M v}{\sqrt{2}} \phi_2 \phi^\dagger + \cdots, \tag{3.28}$$

ここで ϕ と ϕ_2 の質量項を、次のようにパラメトライズする[#10]。

$$\mathcal{L} = -\left(\phi^\dagger,\ \phi_2^\dagger\right) \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{12}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

よって、この質量行列を対角化することで、質量固有状態 s_i $(i=1,2)$ を次のように定義できる。

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi_2 \end{pmatrix}_i = V_{ij} s_j. \tag{3.30}$$

[#10] $Q_\phi = 0$ のとき、$-m^2 \phi\phi_2$ のような質量項も可能である。ここでは簡単のため、このような質量項は無視する。また、もしこのような質量項を加えても、定性的な結果は変わらない。

ここで V_{ij} は、(3.29) 式の質量行列を対角化するユニタリー行列である。質量固有状態は $m_{s_1} < m_{s_2}$ となるようにとる。m_{s_1} および m_{s_2} を、質量固有状態に取る前のパラメーターで表した表式は

$$
\begin{aligned}
m_{s_1}^2 &= \frac{1}{2}\left(m_{11}^2 + m_{22}^2 - \sqrt{(m_{11}^2 - m_{22}^2)^2 + 4m_{12}^4}\right) && (3.31)\\
m_{s_2}^2 &= \frac{1}{2}\left(m_{11}^2 + m_{22}^2 + \sqrt{(m_{11}^2 - m_{22}^2)^2 + 4m_{12}^4}\right) && (3.32)
\end{aligned}
$$

である。また、ユニタリー行列 V_{ij} を元のパラメーターで表した表式は

$$
\begin{aligned}
V_{11} &= V_{22} = \left[1 + \left(\frac{m_{s_1}^2 - m_{11}^2}{m_{12}^2}\right)^2\right]^{-1/2} && (3.33)\\
V_{12} &= -V_{21} = \left[1 + \left(\frac{m_{s_1}^2 - m_{11}^2}{m_{12}^2}\right)^2\right]^{-1/2} \frac{m_{11}^2 - m_{s_1}^2}{m_{12}^2} && (3.34)
\end{aligned}
$$

である。このようなスカラーの混合は、大きなミューオン g − 2 の寄与を出す上で重要である。ミューオン g − 2 への寄与は

$$
\begin{aligned}
a_\mu^{\mathrm{new}} &= -\frac{Q_\chi m_\mu^2}{16\pi^2}\sum_i \Big\{ \left(y_L^2|V_{2i}|^2 + y_R^2|V_{1i}|^2\right)(C_{11}+C_{21})(s_i,\chi,\chi;p,-q) \\
&\qquad + 2y_L y_R \frac{m_\chi}{m_\mu}\mathrm{Re}(V_{2i}V_{1i}^*)C_{11}(s_i,\chi,\chi;p,-q)\Big\} \\
&+ \frac{Q_2 m_\mu^2}{16\pi^2}\sum_i \Big\{ \left(y_L^2|V_{2i}|^2 + y_R^2|V_{1i}|^2\right)(C_{12}+C_{22})(s_i,s_i,\chi;q,p-q) \\
&\qquad + 2y_L y_R \frac{m_\chi}{m_\mu}\mathrm{Re}(V_{2i}V_{1i}^*)C_{12}(s_i,s_i,\chi;q,p-q)\Big\}, && (3.35)
\end{aligned}
$$

のようにまとめられる。ただし p と $p-q$ は外線のミューオンの運動量、q はフォトンの運動量で $q^2 \to 0$ の極限をとる。ここで上記の Passarino-Veltman functions の陽な表式は、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
(C_{11}+C_{21})(s_i,\chi,\chi;p,-q) &= \frac{1}{m_{s_i}^2}\frac{2+3y_i-6y_i^2+y_i^3+6y_i\ln y_i}{6(1-y_i)^4}, && (3.36)\\
C_{11}(s_i,\chi,\chi;p,-q) &= -\frac{1}{m_{s_i}^2}\frac{3-4y_i+y_i^2+2\ln y_i}{2(1-y_i)^3}, && (3.37)\\
(C_{22}+C_{12})(s_i,s_i,\chi;q,p-q) &= \frac{1}{m_{s_i}^2}\frac{1-6y_i+3y_i^2+2y_i^3-6y_i^2\ln y_i}{6(1-y_i)^4}, && (3.38)\\
C_{12}(s_i,s_i,\chi;q,p-q) &= \frac{1}{m_{s_i}^2}\frac{1-y_i^2+2y_i\ln y_i}{2(1-y_i)^3}, && (3.39)
\end{aligned}
$$

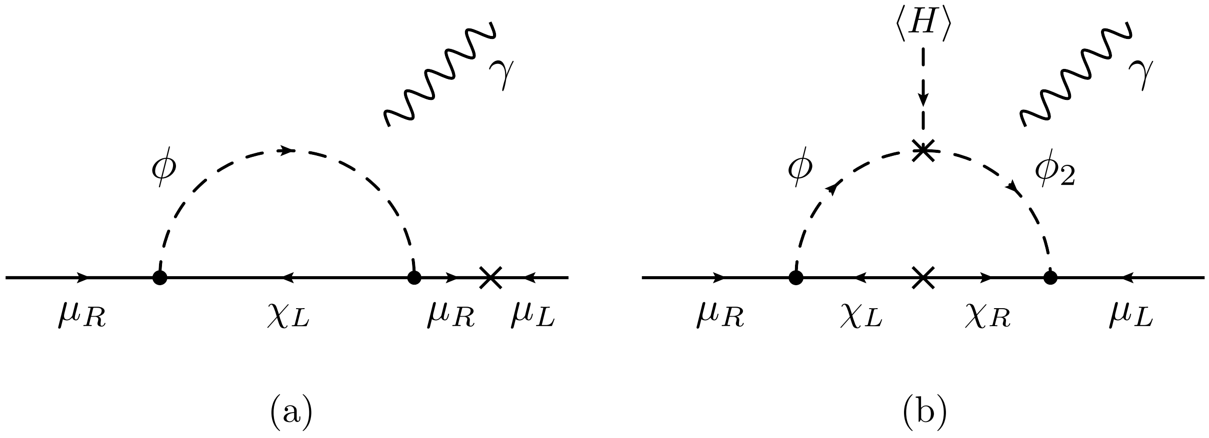


図 10: 新しい湯川相互作用からのミューオン g − 2 のダイアグラム。right-handed ミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ場合は、(a) のように外線でカイラリティー・フリップが起きるダイアグラムからの寄与しか存在しない。一方で、right-handed と left-handed 両方のミューオンが新しい相互作用をもつ場合には、(a) のようなダイアグラムに加えて、(b) のように内線でカイラリティー・フリップが起きるダイアグラムからの寄与も存在する。

ただし $y_i = m_\chi^2/m_{s_i}^2$ で、$O(m_\mu^2/m_{s_i}^2)$ の高次の項は無視した。

ミューオン g − 2 を表す有効演算子は

$$\mathcal{L} = \frac{v}{\Lambda^2}\mu_R\sigma^{\mu\nu}\mu_L F_{\mu\nu} + \text{h.c.}, \tag{3.40}$$

のように書くことができる。ここで v はヒッグスの真空期待値、$F_{\mu\nu}$ はフォトンの field strength、Λ は新しい物理に関する典型的なスケールである。この有効演算子から分かるように、ミューオンのカイラリティーはこの相互作用でフリップしなければならない。図 10 には、right-handed ミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ場合と、right-handed と left-handed 両方のミューオンが新しい相互作用をもつ場合におけるミューオン g − 2 のダイアグラムを、ミューオンのカイラリティーまで含めてぞれぞれ示した。right-handed のミューオンのみが新しい湯川相互作用を持つ場合、ミューオンのカイラリティー・フリップは図 10 (a) のようにループダイアグラムの外線のミューオンで起こり、これはミューオンの質量に比例する。一方で、今考えているような right-handed と left-handed の両方のミューオンが新しい湯川相互作用をもつ場合には、図 10 (b) のようにカイラリティー・フリップを内線のフェルミオンで起こすことができ、これはフェルミオン χ の質量に比例する。これが (3.35) 式に $y_R y_L m_\chi/m_\mu$ に比例する項が存在する理由である。このような項はミューオン g − 2 に大きく寄与するため、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する上で非常に重要である。

図 11 は、a_μ^{new} を (a) $Q_\chi = -1$ (b) $Q_\chi = 0$ の場合に m_χ と m_{s_1} の関数として表したものである。ただし m_{s_1} は ϕ と ϕ_2 の質量行列を対角化した後の、軽いほうのスカラーである。等高線は $(a_\mu^{\text{new}}/10^{-10}) = 2.1,\ 10.1,\ 18.1,\ 26.1,\ 34.1,\ 42.1,\ 50.1$ ($-3\sigma,\ -2\sigma,\ -1\sigma,\ 0\sigma,\ 1\sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma$

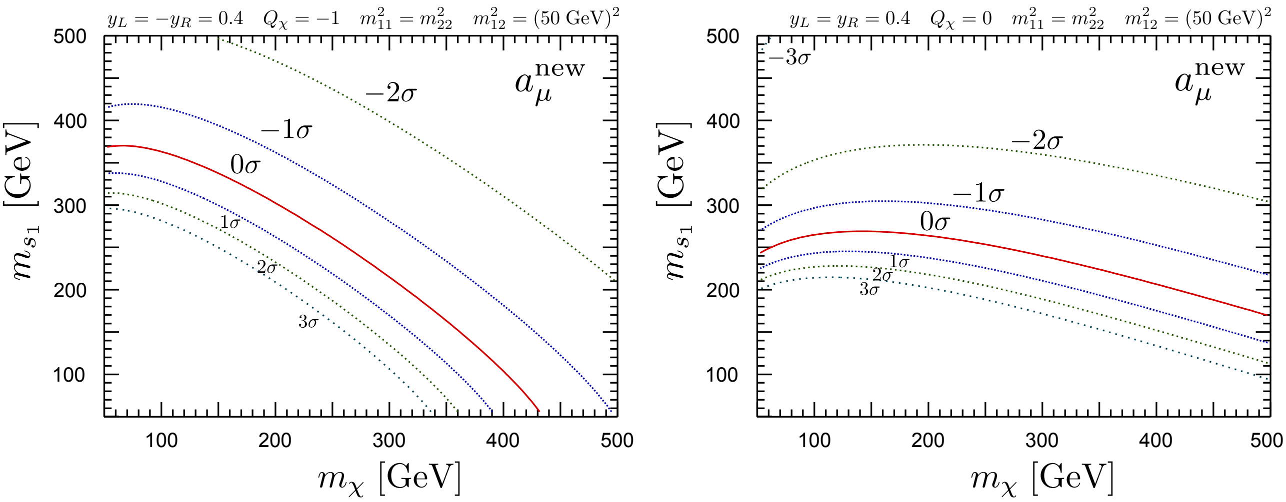


図 11: (a) $Q_\chi = -1$ (b) $Q_\chi = 0$ それぞれの場合に、新しい物理からのミューオン g − 2 への寄与を m_χ と m_{s_1} の関数で表した。等高線は $(a_\mu^{\text{new}}/10^{-10}) = 2.1,\ 10.1,\ 18.1,\ 26.1,\ 34.1,\ 42.1,\ 50.1$ ($-3\sigma,\ -2\sigma,\ -1\sigma,\ 0\sigma,\ 1\sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma$ の測定値からのずれに対応) を表す。ここで ϕ と ϕ_2 の質量項を $m_{11}^2 = m_{22}^2,\ m_{12}^2 = (50\ \text{GeV})^2$ にとった。また湯川結合定数を、それぞれ (a) $y_L = -y_R = 0.4$ (b) $y_L = y_R = 0.4$ にとった。

の測定値からのずれに対応) を表す。ここで ϕ と ϕ_2 の質量項を $m_{11}^2 = m_{22}^2,\ m_{12}^2 = (50\ \text{GeV})^2$ にとった。また湯川結合定数を (a) $y_L = -y_R = 0.4$ (b) $y_L = y_R = 0.4$ にそれぞれとった。図 11 (a) でミューオン g − 2 の寄与が正符号になるには、新しい湯川結合定数の符号を $y_L y_R < 0$ のように取らなければならないことに注意。一方、図 11 (b) では、$y_L y_R$ の符号は正でなければならない。図 9 と比べると分かるように、図 11 では先ほど述べたようなエンハンスメントがあるため、比較的小さい湯川結合定数と重たい新粒子でも、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明することができる。図 9 から分かるように、$y_L \sim y_R \sim O(1)$ のとき、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するには、電弱スケールに新粒子が存在することが期待される。そこで、次の節では電弱精密測定への効果を解析し、電弱精密測定と矛盾しないパラメーター領域を示す。

3.2 「新しい湯川相互作用」の電弱精密測定への効果

前節では、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するためには、比較的軽い新粒子が必要であることを示した。それに加えて、右巻きのミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ場合、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するには、新しい湯川結合は比較的大きくなければならない。そのため、このような比較的軽い粒子と比較的大きい湯川結合が、電弱精密

測定と矛盾しないか確かめる必要がある。

また、このようなシナリオが電弱精密測定と矛盾する場合、他の新しい物理からの寄与が、巧妙に、電弱精密測定のフィットを矛盾しないように調整する可能性はあるが、そのような寄与はファインチューニングを必要とするため、不自然であると考えられる。したがって、このような新しい湯川相互作用は、それ自身が電弱精密測定と無矛盾であるはずと考えられる。

本節では oblique correction と同様に vertex correction からの寄与を電弱精密測定に含めるため、Hagiwara-Haidt-Kim-Matsumoto による文献 [67, 68, 69] のフォーマリズムを採用する。初めに、Hagiwara-Haidt-Kim-Matsumoto によるフォーマリズム [67, 68, 69] について簡単にまとめる[#11]。以下、本論文では文献 [67, 68, 69] のフォーマリズムを便宜上、HHKM Formalism と呼ぶことにする。

電弱スケールから TeV スケールの物理が存在するとき、ゲージボソンの self-energy に関する oblique corrctions が重要であることがよく知られている。これらは Pekin-Takeuchi の S, T, U parameters [70, 71, 72] でパラメトライズされる。

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha S}{4s_W^2c_W^2} &= \frac{\Pi_{ZZ}(M_Z^2)-\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2} - \frac{c_{2W}}{c_Ws_W}\frac{\Pi_{Z\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_{\gamma\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2}, & (3.41)\\
\alpha T &= \frac{\Pi_{WW}(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2}, & (3.42)\\
\frac{\alpha U}{4s_W^2} &= \frac{\Pi_{WW}(M_W^2)-\Pi_{WW}(0)}{M_W^2} - c_W^2\frac{\Pi_{ZZ}(M_Z^2)-\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2}\\
&\quad -2s_Wc_W\frac{\Pi_{Z\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} - s_W^2\frac{\Pi_{\gamma\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2}. & (3.43)
\end{aligned}$$

ここで c_W と s_W が cosine と sine の weak mixing angle を表す記法を用いた。また $c_{2W} = c_W^2 - s_W^2$ である。それに加えて、文献 [67, 68] ではより小さな補正も取り入れるため R_Z と R_W のパラメーターが導入されている。

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha R_Z}{4s_W^2c_W^2} &= \left.\frac{d\Pi_{ZZ}(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=M_Z^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(M_Z^2)-\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2}, & (3.44)\\
\frac{\alpha R_W}{4s_W^2} &= \frac{\Pi_{WW}(M_Z^2)-\Pi_{WW}(M_W^2)}{M_Z^2-M_W^2} - \frac{\Pi_{WW}(M_W^2)-\Pi_{WW}(0)}{M_W^2}. & (3.45)
\end{aligned}$$

さらに、新粒子は running QED coupling constant $\alpha(M_Z^2)$ [8, 69] にも影響を与える。

$$\alpha(M_Z^2) = \frac{\alpha}{1-\Delta\alpha_{\rm lep}(M_Z^2)-\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(M_Z^2)-\Delta\alpha_{\rm top}(M_Z^2)-\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2)} \quad (3.46)$$

ここで $\Delta\alpha_{\rm lep}(M_Z^2)$, $\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(M_Z^2)$, $\Delta\alpha_{\rm top}(M_Z^2)$,$\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2)$ は、それぞれ、レプトン、5 フレーバー・ハドロン、トップクォーク、新しい物理、からの running QED coupling constant への

[#11] 電弱精密測定のフォーマリズムに関する詳しい議論は Appendix C を参照。

寄与である。新しい物理からの running QED coupling constant $\alpha(M_Z^2)$ への寄与は、次のように定義される。

$$\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2) = \frac{\Pi_{\gamma\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_{\gamma\gamma}(p^2)}{p^2}\bigg|_{p^2=0} \tag{3.47}$$

文献 [67, 68, 69] で示されているように、これらの oblique パラメーターは電弱精密測定に寄与する。

もしミューオンが $O(1)$ の新しい湯川結合を持つならば[#12]、これは $Z\mu^+\mu^-$ coupling にノンユニバーサルな vertex corrections を生じさせる。標準模型の $Z\mu^+\mu^-$ coupling は

$$i\frac{g}{c_W}\gamma_\mu[g_L^{{\rm SM},\mu}P_L + g_R^{{\rm SM},\mu}P_R], \tag{3.48}$$

で与えられる。ここで $g_{L,R}^{{\rm SM},\mu}$ は標準模型の場合の結合定数で、これらの tree-level の寄与は $g_L^{{\rm SM},\mu} = -\frac{1}{2} + s_W^2$ および $g_R^{{\rm SM},\mu} = s_W^2$ である。新しい湯川結合からの $Z\mu^+\mu^-$ の vertex への補正を考慮すると（対応する wave function renormalization を含む）、$Z\mu^+\mu^-$ coupling は

$$i\frac{g}{c_W}\gamma_\mu\left[(g_L^{{\rm SM},\mu} + \Delta g_L^\mu)P_L + (g_R^{{\rm SM},\mu} + \Delta g_R^\mu)P_R\right]. \tag{3.49}$$

のように修正される。ここで、新粒子から生じた vertex corrections を $\Delta g_{L,R}^\mu$ とパラメトライズした。

$W\mu\nu_\mu$ vertex への補正は、Fermi constant G_F への補正を生じさせる。しがたって、この補正を $\Delta\bar{\delta}_G$ とパラメトライズする。μ-decay に関する vertex と box diagrams を通した、新しい物理からの $\Delta\bar{\delta}_G$ への寄与は、

$$G_F = G_F^{\rm SM+ob.} + \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2}\Delta\bar{\delta}_G. \tag{3.50}$$

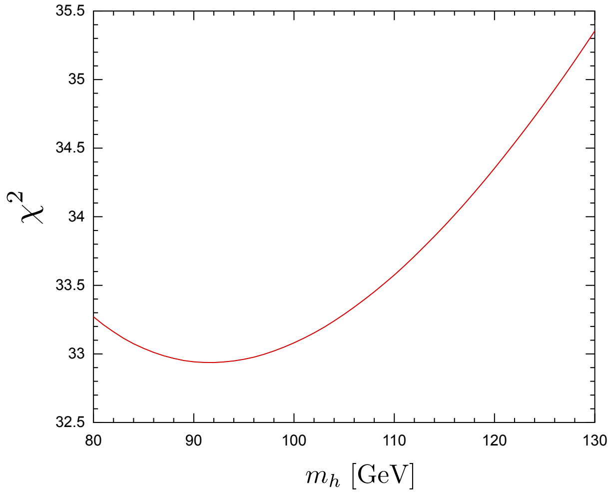
のように定義される。ここで $G_F^{\rm SM+ob.}$ は、新しい物理からの vertex corrections と box corrections の効果を除いた、標準模型からの輻射補正と新しい物理からの oblique corrections の効果を含めた muon decay constant である。

文献 [67, 68] の HHKM フォーマリズムを用いると、レプトン・ユニバーサリティーを仮定することなく、表 2 にリストされた電弱精密測定を計算できる。初めに図 12 (a) で、標準模型の電弱精密測定のフィットを、ヒッグスの質量 m_h の関数として示した。ベストフィット・ポイントは $m_h = 91$ GeV である。これは LEP electroweak working group [75] の結果と一致する。また表 2 は、ヒッグスの質量を最新の LHC のデータ [4, 5] が示唆する 125 GeV と仮定したときの、標準模型の電弱精密測定のフィットを示している。次に図 12 (b) で、S-T plane での χ^2 の等高線を破線で示した。ただし、他の oblique corrections (U, R_W, R_Z) と vertex corrections はゼロと仮定した。ヒッグスとトップクォークの質量の基準値は、それぞれ 125

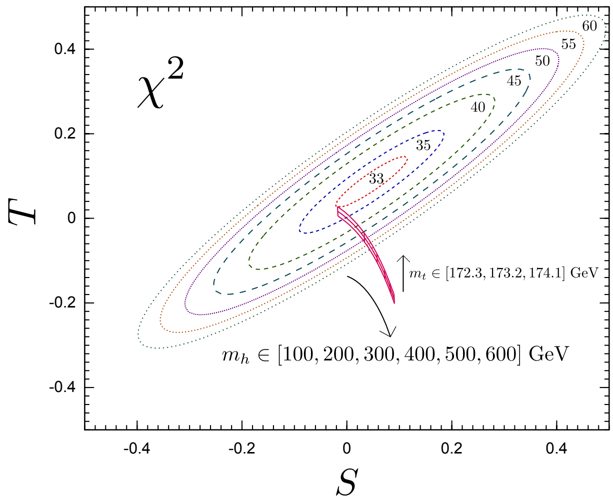
[#12] ここでは簡単のため、エレクトロンとタウは $O(1)$ の新しい湯川結合を持たないものとする。

	data	SM fit	pull	Sample model	pull
line-shape & FB asym.:					
Γ_Z(GeV)	2.4952(23)	2.4954	-0.1	2.4963	-0.5
σ_h^0 (nb)	41.541(37)	41.479	1.7	41.479	1.7
R_e	20.804(50)	20.740	1.3	20.741	1.3
R_μ	20.785(33)	20.740	1.4	20.740	1.3
R_τ	20.764(45)	20.787	-0.5	20.788	-0.5
$A_{\rm FB}^{0,e}$	0.0145(25)	0.0163	-0.7	0.0163	-0.7
$A_{\rm FB}^{0,\mu}$	0.0169(13)	0.0163	0.5	0.0163	0.4
$A_{\rm FB}^{0,\tau}$	0.0188(17)	0.0163	1.5	0.0163	1.4
τ polarization:					
A_τ	0.1439(43)	0.1472	-0.8	0.1476	-0.9
A_e	0.1498(49)	0.1472	0.5	0.1476	0.4
b and c quark results:					
R_b	0.21629(66)	0.21579	0.8	0.21580	0.7
R_c	0.1721(30)	0.1723	-0.1	0.1722	0.0
$A_{\rm FB}^{0,b}$	0.0992(16)	0.1032	-2.5	0.1035	-2.7
$A_{\rm FB}^{0,c}$	0.0707(35)	0.0738	-0.9	0.0740	-0.9
A_b	0.923(20)	0.935	-0.6	0.935	-0.6
A_c	0.670(27)	0.668	0.1	0.668	0.1
SLD results:					
A_e	0.1516(21)	0.1472	2.1	0.1476	1.9
A_μ	0.142(15)	0.1472	-0.4	0.1476	-0.4
A_τ	0.136(15)	0.1472	-0.8	0.1476	-0.8
W mass and width:					
M_W (GeV)	80.385(15)[73]	80.363	1.5	80.376	0.6
Γ_W (GeV)	2.085(42)	2.091	-0.1	2.092	-0.2
muon g-2:					
$a_\mu^{\rm new}(10^{-9})$	2.61(0.80)	0	3.3	3.15	-0.7
Input parameters					
$\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(M_Z^2)$	0.027626(138)	0.027592	0.3	0.027626	0.0
$\alpha_s(M_Z)$	0.1184(7)	0.1184	0.0	0.1184	0.0
m_t (GeV)	173.2(0.9)[74]	173.7	-0.6	173.3	-0.1
m_h (GeV)		125		125	
$y_L = y_R,\ Q_\chi$	-	-	-	0.4, 0	
m_{ϕ_1}, m_χ (GeV)	-	-	-	300, 200	
$m_{11}^2 = m_{22}^2$, m_{12}^2 (GeV)^2	-	-	-	$(250)^2$, $(50)^2$	
$\chi^2/(d.o.f)$		34.8/(22)		22.5/(15)	

表 2: 電弱精密測定の実験値と理論の予言値。標準模型と 3.2.2 節で議論したサンプルモデルの予言値を示した。



(a)



(b)

図 12: (a) 標準模型において、表 2 にリストされた電弱精密測定の χ^2 を、ヒッグスの質量 m_h の関数として表した。(b) S-T plane での χ^2 の等高線を破線で示した。ただし、他の oblique corrections (U, R_W, R_Z) と vertex corrections はゼロと仮定した。ヒッグスとトップクォークの質量の基準値は、それぞれ 125 GeV と 173.2 GeV にとった。また標準模型において、ヒッグスとトップクォークの質量を基準値から変えたときの S-T の予言値も示した。

GeV と 173.2 GeV にとった。また、ヒッグスとトップクォークの質量を基準値から変えたときの S-T parameters の予言値も示されている。ここで、ミューオン g − 2、および χ^2 をさらに減らすような小さい正の S と T ($S \sim 0.05$, $T \sim 0.1$) を除いて、軽いヒッグスに対する標準模型のフィットは、良く合っていることに注意する。したがってミューオン g − 2 には大きく寄与する一方で、電弱精密測定への効果は小さい新しい物理が必要である。この節では、前節で議論した模型の電弱精密測定を解析する。この解析では、$m_h = 125$ GeV を仮定する。

3.2.1 SU(2)$_L$ singlet scalar (ϕ) と singlet Dirac fermion (χ) をもつ模型

新しいスカラー ϕ とフェルミオン χ は SU(2)$_L$ singlet なので、これらの粒子は W ボソンとは結合しない。しかし、もし QED 電荷をもてば、これらの粒子はフォトンと Z ボソンと結合できる。まずこのモデルにおける、ゲージボソンの self-energy functions に関する輻射補正をリストする。

SU(2)$_L$ singlet fermion (χ) からの寄与は

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(\chi)}_{WW}(p^2) &= 0 \\
\Pi^{(\chi)}_{ZZ}(p^2) &= -\frac{g^2 Q_\chi^2 s_W^4}{4\pi^2 c_W^2}\left[m_\chi^2 B_0(\chi,\chi) - p^2\left\{B_1(\chi,\chi)+B_{21}(\chi,\chi)\right\} - 2(1-\epsilon)B_{22}(\chi,\chi)\right], \\
\Pi^{(\chi)}_{\gamma\gamma}(p^2) &= -\frac{e^2}{4\pi^2}Q_\chi^2\left[m_\chi^2 B_0(\chi,\chi) - p^2\left\{B_1(\chi,\chi)+B_{21}(\chi,\chi)\right\} - 2(1-\epsilon)B_{22}(\chi,\chi)\right], \\
\Pi^{(\chi)}_{\gamma Z}(p^2) &= \frac{geQ_\chi^2 s_W^2}{4\pi^2 c_W}\left[m_\chi^2 B_0(\chi,\chi) - p^2\left\{B_1(\chi,\chi)+B_{21}(\chi,\chi)\right\} - 2(1-\epsilon)B_{22}(\chi,\chi)\right].
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

で与えられる。ここで、$B_X(i,j) = B_X(m_i^2, m_j^2; p)$ ($X = 0,\ 1,\ 21,\ 22$) は Passarino-Veltman functions で、その陽な表式は Appendix A に載せた。またループ積分では、時空の次元を $D = 4-2\epsilon$ として次元正則化を用いた。

SU(2)$_L$ singlet scalar (ϕ) からの寄与は

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(\phi)}_{WW}(p^2) &= 0 \\
\Pi^{(\phi)}_{ZZ}(p^2) &= \frac{g^2}{4\pi^2 c_W^2}Q_\phi^2 s_W^4\left\{B_{22}(\phi,\phi) - \frac{1}{2}A(\phi)\right\}, \\
\Pi^{(\phi)}_{\gamma\gamma}(p^2) &= \frac{e^2}{4\pi^2}Q_\phi^2\left\{B_{22}(\phi,\phi) - \frac{1}{2}A(\phi)\right\}, \\
\Pi^{(\phi)}_{\gamma Z}(p^2) &= -\frac{ge}{4\pi^2 c_W}Q_\phi^2 s_W^2\left\{B_{22}(\phi,\phi) - \frac{1}{2}A(\phi)\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

で与えられる。ここで $B_{22}(i,j)(= B_{22}(m_i^2, m_j^2; p))$ と $A(\phi)$ は Passarino-Veltman functions で、その陽な表式は Appendix A に載せた。また、(3.51) 式と (3.52) 式の導出は Appendix F にまとめた。

新しい粒子は SU(2)$_L$ の相互作用をもたないため、この場合 Peskin-Takeuchi の STU パラメータはゼロ ($S = T = U = 0$) になることが簡単に示せる。したがって、リーディングの oblique corrections への寄与は R_Z パラメーターと $\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2)$ である。

$$
\begin{aligned}
R_Z &= \frac{4s_W^4 Q_\chi^2}{3\pi}\left[1 + \frac{6m_\chi^2}{M_Z^2}\left\{1 - \frac{\frac{4m_\chi^2}{M_Z^2}}{\sqrt{\frac{4m_\chi^2}{M_Z^2}-1}}\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{4m_\chi^2}{M_Z^2}-1}}\right]\right\}\right] \\
&\quad + \frac{s_W^4 Q_\phi^2}{3\pi}\left[1 - \frac{12m_\phi^2}{M_Z^2}\left\{1 - \sqrt{\frac{4m_\phi^2}{M_Z^2}-1}\,\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{4m_\phi^2}{M_Z^2}-1}}\right]\right\}\right],
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2) &= -\frac{5\alpha Q_\chi^2}{9\pi}\left[1+\frac{12m_\chi^2}{5M_Z^2}-\frac{6}{5}\left(1+\frac{2m_\chi^2}{M_Z^2}\right)\sqrt{\frac{4m_\chi^2}{M_Z^2}-1}\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{4m_\chi^2}{M_Z^2}-1}}\right]\right] \\
&\quad -\frac{2\alpha Q_\phi^2}{9\pi}\left[1-\frac{3m_\phi^2}{M_Z^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{4m_\phi^2}{M_Z^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{4m_\phi^2}{M_Z^2}-1}}\right]\right], \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

ただし、$2m_\chi > M_Z$ かつ $2m_\phi > M_Z$ を仮定した。

前の 3.1.1 節で議論したように、この模型でミューオン g − 2 のアノマリーを説明するには、新しい湯川結合定数は比較的大きくなければならない。その場合、図 13 に示された vertex corrections が大きくなることが予想される。$Z\mu^+\mu^-$ の vertex corrections の結果は

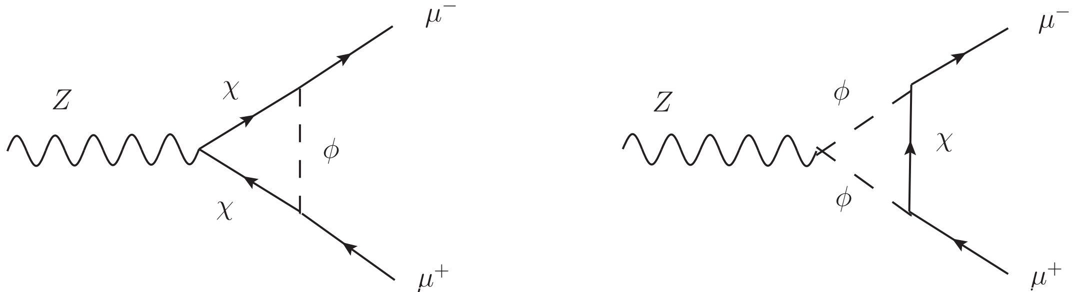


図 13: $Z\mu^+\mu^-$ coupling への vertex corrections の Feynman diagrams

$$
\begin{aligned}
\Delta g_L^\mu &= 0, \qquad (3.55)\\
\Delta g_R^\mu &= \frac{y_N^2}{16\pi^2}\Big[-2Q_\phi s_W^2 C_{24}(\phi,\chi,\phi;p,q-p) \\
&\quad +Q_\chi s_W^2\left\{\frac{1}{2}-2C_{24}-M_Z^2(C_{12}+C_{23})+m_\chi^2 C_0\right\}(\chi,\phi,\chi;q-p,p) \\
&\quad -s_W^2(B_0+B_1)(\phi,\chi;p)\Big], \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、 $p, q-p, q$ は、それぞれ muon、anti-muon、Z ボソンの運動量である。ここで C_X $(X=0,\ 12,\ 23,\ 24)$ と B_X $(X=0,\ 1)$ は Passarino-Veltman functions で、その陽な表式は Appendix A に載せた。(3.56) 式の第 1 項と第 2 項はスカラー ϕ とフェルミオン χ からの寄与、第 3 項はミューオンの波動関数くり込みをそれぞれ表す。vertex corrections の相殺項に関する詳しい議論は、Appendix D を参照。

この vertex corrections は R_μ, $A_{\rm FB}^{0,\mu}$, A_μ といった電弱精密測定に影響する。これらの電弱精密測定のなかで、R_μ が最も精密に測定されているため、R_μ への影響が精密測定のフィッ

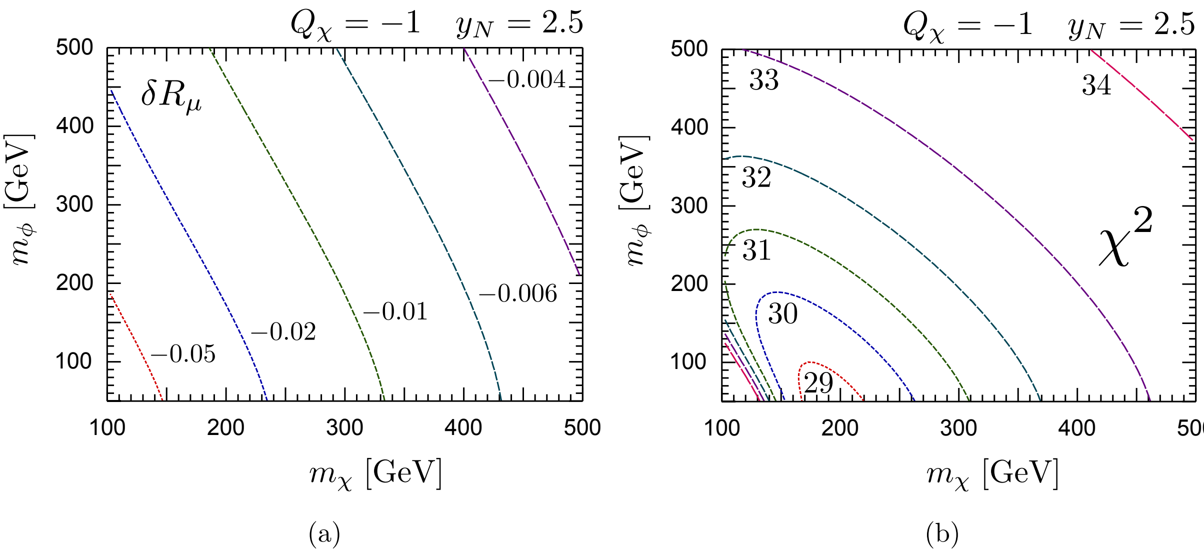
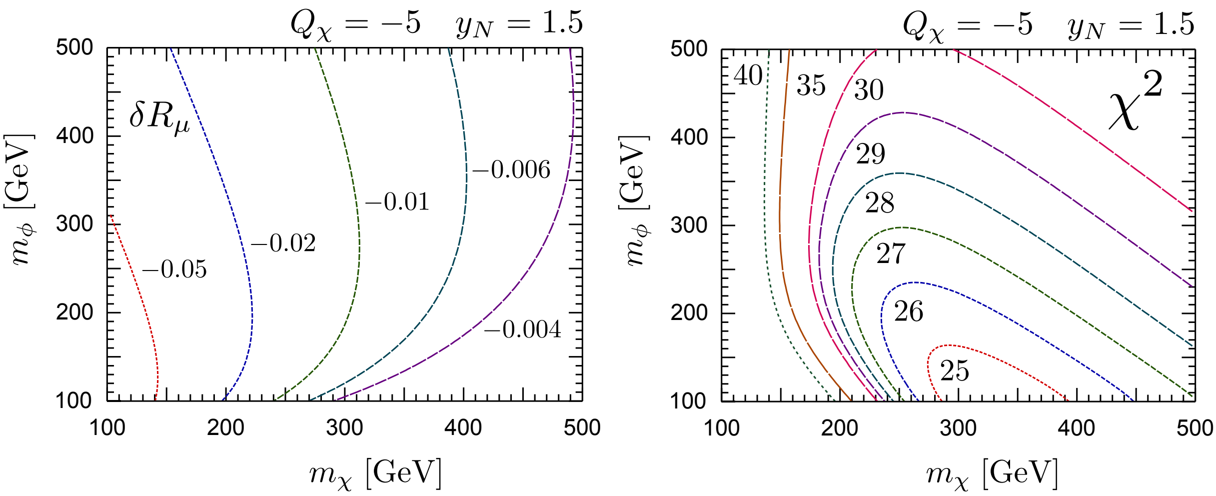


図 14: (a) R_μ に対する vertex corrections の効果。$Q_\chi = -1$ かつ $y_N = 2.5$ における $\delta R_\mu = R_\mu - R'_\mu$ を、m_χ と m_ϕ の関数で表した。ここで、R_μ は全ての輻射補正を含むのに対し、R'_μ は輻射補正から vertex corrections を除いた。(b) $Q_\chi = -1$ かつ $y_N = 2.5$ における、m_χ と m_ϕ の関数で表された χ^2。

トにおいて最も重要であることが分かる。図 14 (a) では、$Q_\chi = -1$ かつ $y_N = 2.5$ における R_μ に対する vertex corrections の効果 $\delta R_\mu = R_\mu - R'_\mu$ を m_χ と m_ϕ の関数として示した。ここで R_μ はこの模型において、全ての輻射補正を含む理論的予言である。その一方で R'_μ は、vertex corrections を除く全ての輻射補正を含んでいる。そのため、これらの差 δR_μ は vertex corrections の効果を表している。ここで R_μ の実験誤差の大きさは、表 2 に示されているように、1σ に対して 0.033 であることに注意する。図 14(a) から分かるように、ミューオン g − 2 が新しい物理からの寄与によって説明される領域において、vertex correction は R_μ を 1σ 程度変えることができる。ところが、標準模型の R_μ の予言値はその実験値よりも小さいため（表 2 に示されているように）、 vertex corrections は R_μ の予言値を改善する方向に働かない。したがって χ の質量が小さい領域は、非常に制限される。

図 14 (b) では、$Q_\chi = -1$ かつ $y_N = 2.5$ における χ^2 を、m_χ と m_ϕ の関数として表した。図を見ると分かるように、上で議論した大きな vertex corrections のため、χ^2 は m_χ が小さい領域で大きくなっている。m_χ と m_ϕ がより大きい領域では、新粒子の質量が重すぎてミューオン g − 2 のアノマリーを説明できないため、χ^2 はより大きくなっている。χ^2 の最小値はおよそ $m_\chi \sim 200$ GeV かつ $m_\phi \sim 100$ GeV のときであり、ミューオン g − 2 を含む電弱精密測定から、軽い新粒子が好ましいことが分かる。

図 15 (a) では、$Q_\chi = -5$ かつ $y_N = 1.5$ における、R_μ に対する vertex corrections の効果 δR_μ を、図 14 (a) と同様に示した。vertex corrections は R_μ の実験値の誤差の 1σ 程度まで大



(a) (b)

図 15: (a) R_μ に対する vertex corrections の効果。図 14(a) と同様、$Q_\chi = -5$ かつ $y_N = 1.5$ における $\delta R_\mu = R_\mu - R'_\mu$ を、m_χ と m_ϕ の関数として表した。(b) $Q_\chi = -5$ かつ $y_N = 1.5$ における、m_χ と m_ϕ の関数で表された χ^2。

きくなることができ、かつ、この補正は χ^2 を大きくする。図 15 (b) では、χ^2 を m_χ と m_ϕ の関数として表した。この図を見ると、図 15 (a) で示されていたように、R_μ の vertex corrections から、m_χ が小さい領域は好ましくないことが分かる。χ^2 の最小値はおよそ $m_\chi \sim 300$ GeV かつ $m_\phi \sim 100$ GeV のときである。したがって、このようなシナリオでは電弱精密測定（ミューオン g − 2 を含む）から、比較的軽い新粒子が好ましいことがわかる。

3.2.2 SU(2)$_L$ doublet scalar (Φ) と singlet scalar (ϕ) および singlet fermion (χ) をもつ模型

SU(2)$_L$ singlet fermion からの寄与は、前節の議論と同様である。なので、まずここでは、スカラーのセクターから引き起こされる、gauge boson self-energies に対する 1 ループの寄与

をリストする。

$$\Pi^{(s)}_{WW}(p^2) = \frac{g^2}{8\pi^2}\left[\sum_i \left\{|V_{2i}|^2 B_{22}(\phi_1, s_i) - \frac{1}{4}|V_{2i}|^2 A(s_i)\right\} - \frac{1}{4}A(\phi_1)\right], \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{(s)}_{ZZ}(p^2) = \frac{1}{4\pi}\frac{g^2}{c_W^2}&\left[\left(\frac{1}{2} - Q_1 s_W^2\right)^2 \left\{B_{22}(\phi_1, \phi_1) - \frac{1}{2}A(\phi_1)\right\}\right.\\ &+\sum_{ij}\left\{\left(-\frac{1}{2} - Q_2 s_W^2\right)^2 |V_{2i}|^2|V_{2j}|^2 + Q_2^2 s_W^4 |V_{1i}|^2|V_{1j}|^2\right.\\ &\left. - Q_2 s_W^2\left(-\frac{1}{2} - Q_2 s_W^2\right)(V_{2i}^* V_{1i} V_{1j}^* V_{2j} + V_{2j}^* V_{1j} V_{1i}^* V_{2i})\right\} B_{22}(s_i, s_j)\\ &\left. -\sum_i \left\{\left(-\frac{1}{2} - Q_2 s_W^2\right)^2 |V_{2i}|^2 + Q_2^2 s_W^4 |V_{1i}|^2\right\}\frac{1}{2}A(s_i)\right],\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{(s)}_{\gamma\gamma}(p^2) = \frac{e^2}{4\pi^2}&\left[Q_1^2\left\{B_{22}(\phi_1, \phi_1) - \frac{1}{2}A(\phi_1)\right\}\right.\\ &\left. + Q_2^2\sum_i\left\{B_{22}(s_i, s_i) - \frac{1}{2}A(s_i)\right\}\right],\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{(s)}_{\gamma Z}(p^2) = \frac{e}{4\pi^2}\frac{g}{c_W}&\left[Q_1\left(\frac{1}{2} - Q_1 s_W^2\right)\left\{B_{22}(\phi_1, \phi_1) - \frac{1}{2}A(\phi_1)\right\}\right.\\ &+Q_2\sum_i\left\{\left(-\frac{1}{2} - Q_2 s_W^2\right)|V_{2i}|^2 - Q_2 s_W^2 |V_{1i}|^2\right\}\\ &\left.\times\left\{B_{22}(s_i, s_i) - \frac{1}{2}A(s_i)\right\}\right],\end{aligned} \tag{3.60}$$

ここで $B_X(i,j)(= B_X(m_i^2, m_j^2; p))$ と $A(i)$ は Passarino-Veltman functions で、その陽な表式は Appendix A に載せた。また、(3.57), (3.58), (3.59), (3.60) 式の導出は Appendix F にまとめた。

前節の模型と異なり、今度は $SU(2)_L$ scalar doublet が STU パラメーターに寄与することができる。そのため主要な量子補正は、S パラメーターと T パラメーターで表される。(3.41),

(3.42) 式より S パラメーターと T パラメーターの表式

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{2Y_\Phi}{\pi M_Z^2}\left[B_{22}(\phi_1,\phi_1,M_Z)-\frac{1}{2}A_0(\phi_1)\right] \\
&\quad +\frac{4}{\pi M_Z^2}\sum_i\sum_j\left|-s_W^2Q_2V_{1j}^*V_{1i}+(T_{\phi_2}^3-s_W^2Q_2)V_{2j}^*V_{2i}\right|^2 \\
&\quad \times\left[B_{22}(s_i,s_j,M_Z)-B_{22}(s_i,s_j,0)\right] \\
&\quad -(c_W^2-s_W^2)\frac{4}{\pi M_Z^2}\sum_i Q_2\left[-s_W^2Q_2|V_{1i}|^2+(T_{\phi_2}^3-s_W^2Q_2)|V_{2i}|^2\right] \\
&\quad \times\left[B_{22}(s_i,s_i,M_Z)-\frac{1}{2}A_0(s_i)\right] \\
&\quad -\frac{4s_W^2c_W^2}{\pi M_Z^2}\sum_i Q_2^2\left[B_{22}(s_i,s_i,M_Z^2)-\frac{1}{2}A_0(s_i)\right], \qquad (3.61) \\
T &= \frac{1}{2\pi s_W^2M_W^2}\left[\sum_i|V_{2i}|^2B_{22}(\phi_1,s_i,0)-\frac{1}{4}A_0(\phi_1)-\sum_i|V_{2i}|^2\frac{1}{4}A_0(s_i)\right] \\
&\quad -\frac{1}{\pi s_W^2c_W^2M_Z^2}\left[\sum_i\sum_j\left|(-s_W^2Q_2)V_{1j}^*V_{1i}+(T_{\phi_2}^3-s_W^2Q_2)V_{2j}^*V_{2i}\right|^2B_{22}(s_i,s_j,0)\right. \\
&\quad \left.+\sum_i\left[(-s_W^2Q_2)^2|V_{1i}|^2+(T_{\phi_2}^3-s^2Q_2)^2|V_{2i}|^2\right]\left(-\frac{1}{2}A_0(s_i)\right)\right] \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

を得る。ただし、Y_Φ は $\mathrm{SU}(2)_L$ doublet スカラーのハイパーチャージ、$T_{\phi_2}^3$ は ϕ_2 のアイソスピン、Q_2 は ϕ_2 の QED 電荷である。ここで、S パラメーターと T パラメーターの振る舞いを理解するため、S パラメーターと T パラメーターの近似式を求める。簡単のため、$V_{22}=V_{11}=1,\ V_{12}=V_{21}=0$ を仮定し、スカラーの混合がない場合を考えると、s_2 の状態は $\mathrm{SU}(2)_L$ scalar doublet Φ の ϕ_2 成分に対応する。このとき、S パラメーターと T パラメーターは

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{2Y_\Phi}{\pi M_Z^2}\left[\left\{B_{22}(\phi_1,\phi_1,M_Z)-\frac{1}{2}A_0(\phi_1)\right\}-\left\{B_{22}(\phi_2,\phi_2,M_Z)-\frac{1}{2}A_0(\phi_2)\right\}\right] \qquad (3.63) \\
T &= \frac{1}{2\pi s_W^2M_W^2}\left[B_{22}(\phi_1,\phi_2,0)-\frac{1}{4}\left\{A_0(\phi_1)+A_0(\phi_2)\right\}\right] \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

となる。(3.63), (3.64) 式を計算すると、S パラメーターと T パラメーターの近似式は

$$\begin{aligned}
S &\simeq \frac{Y_\Phi}{6\pi}\Delta+\cdots, \\
T &\simeq \frac{m_{\phi_1}^2}{16\pi s_W^2M_W^2}(\Delta)^2+\cdots. \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

と求まる。ここで、$\Delta=(m_{\phi_2}^2-m_{\phi_1}^2)/m_{\phi_1}^2$ であり、この場合 $m_{\phi_2}=m_{s_2}$ である。ここで、(3.65) 式における Δ と $m_Z^2/m_{\phi_1}^2$ の高次の項は無視した。また、(3.63) 式の S パラメーターは、m_{ϕ_1} と m_{ϕ_2} が M_Z に比べて十分大きいと仮定し、$(M_Z^2/m_{\phi_1}^2)$, $(M_Z^2/m_{\phi_2}^2)$ で展開した。

Δ は $\mathrm{SU}(2)_L$ scalar doublet Φ の non-degeneracy をパラメトライズしていることに注意。Y_Φ は Φ のハイパーチャージで、$Y_\Phi = \frac{1}{2} + Q_2$ である。$\mathrm{SU}(2)_L$ scalar doublet の non-degeneracy は、non-zero の T と non-zero の S を引き起こすことに注意。また、T の符号は常に正である。それに対しこの模型では、S の符号は Y_Φ と Δ の符号によって、正にも負にもなり得る。

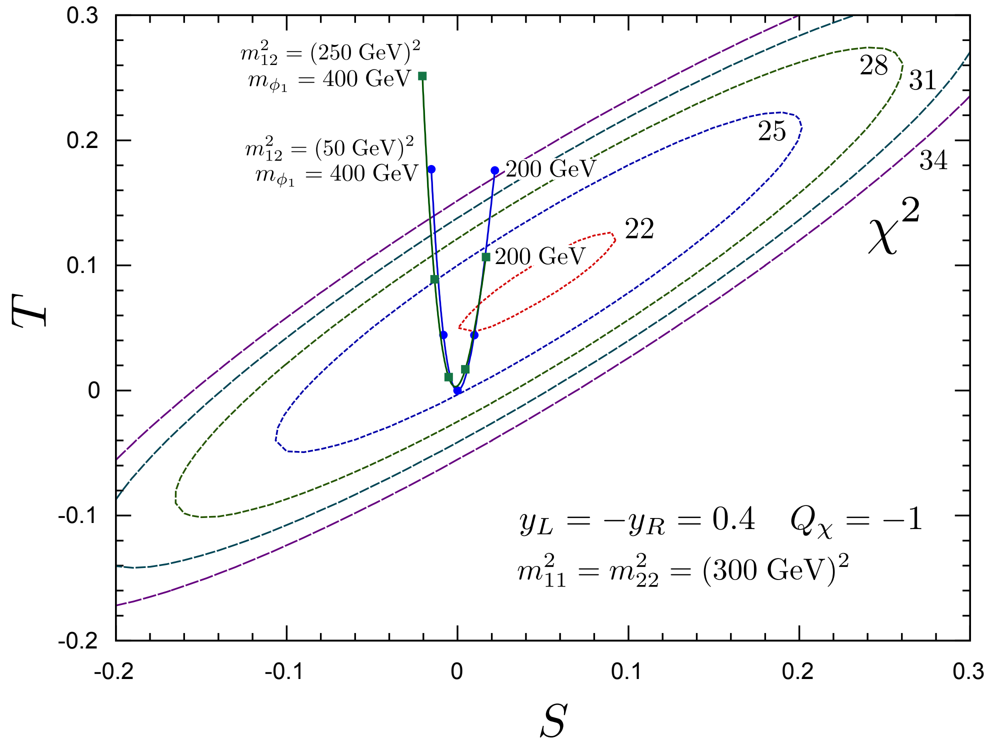


図 16: この模型における、S-T plane での（ミューオン g − 2 の結果は除く）χ^2 の等高線（$\chi^2 = 22$ から 34 を破線で示した）と S-T の値（点が打たれた実線）。ここで、$y_L = -y_R = 0.4$, $Q_\chi = -1$ （$Q_1 = 1$ かつ $Q_2 = 0$ に対応）かつ $m_{11}^2 = m_{22}^2 = (300\ \mathrm{GeV})^2$ にとった。2 本の実線は、2 つの異なる m_{12}^2 の値、$m_{12}^2 = (50\ \mathrm{GeV})^2$ と $(250\ \mathrm{GeV})^2$ に対応し、m_{ϕ_1} の値は 200 GeV から 400 GeV まで 50 GeV 刻みで変化させている（実線上に点で示した）。

図 16 では、S-T plane 上での χ^2 の等高線の計算結果（ミューオン g − 2 の結果は除く）を破線で示した。S-T plane 上で χ^2 の等高線を描く際、他の oblique corrections (U, R_Z, R_W) ならびに vertex corrections はゼロと仮定した。図からわかるように、わずかに正の S と T ($S \sim 0.05$ および $T \sim 0.1$) が電弱精密測定からは好ましい。加えて図 16 では、この模型における S-T パラメーターの予言値を実線で示した。ここで、$y_L = -y_R = 0.4$, $Q_\chi = -1$（$Q_1 = 1$ かつ $Q_2 = 0$ に対応）かつ $m_{11}^2 = m_{22}^2 = (300\ \mathrm{GeV})^2$ にとった。2 本の実線は、2 つの異なる m_{12}^2 の値、$m_{12}^2 = (50\ \mathrm{GeV})^2$ と $(250\ \mathrm{GeV})^2$ に対応する。実線上の点は、m_{ϕ_1} を 200 GeV から 400 GeV まで 50 GeV 刻みで変えたときの、S と T の予言値を表す。

$m_{11}^2 = m_{22}^2 = (300\ \mathrm{GeV})^2$ かつ $m_{12}^2 = (50\ \mathrm{GeV})^2$ のとき、$m_{s_1} \simeq 296$ GeV かつ $m_{s_2} \simeq 304$

GeV である。(3.65) 式で大体示されるように、$m_{\phi_1} = 200$ GeV かつ $Q_2 = 0$ のとき、$\Delta > 0$ かつ $Y_\Phi = \frac{1}{2} > 0$ となるため、$S > 0$ かつ $T > 0$ である。m_{ϕ_1} が 300 GeV 程度まで大きくなると、doublet scalars がほとんど縮退するため、S と T は共にゼロに近づく。それから m_{ϕ_1} がより大きくなると、$\Delta < 0$ のため S は負になるが、$T > 0$ である。図 16 から、この振る舞いが見て取れる。また m_{12}^2 を大きくした場合でも、この振る舞いはほとんど同じである。図 17 では、$y_L = y_R = 0.4$ かつ $Q_\chi = 0$ （$Q_1 = 0$ かつ $Q_2 = -1$ に対応）であることを除い

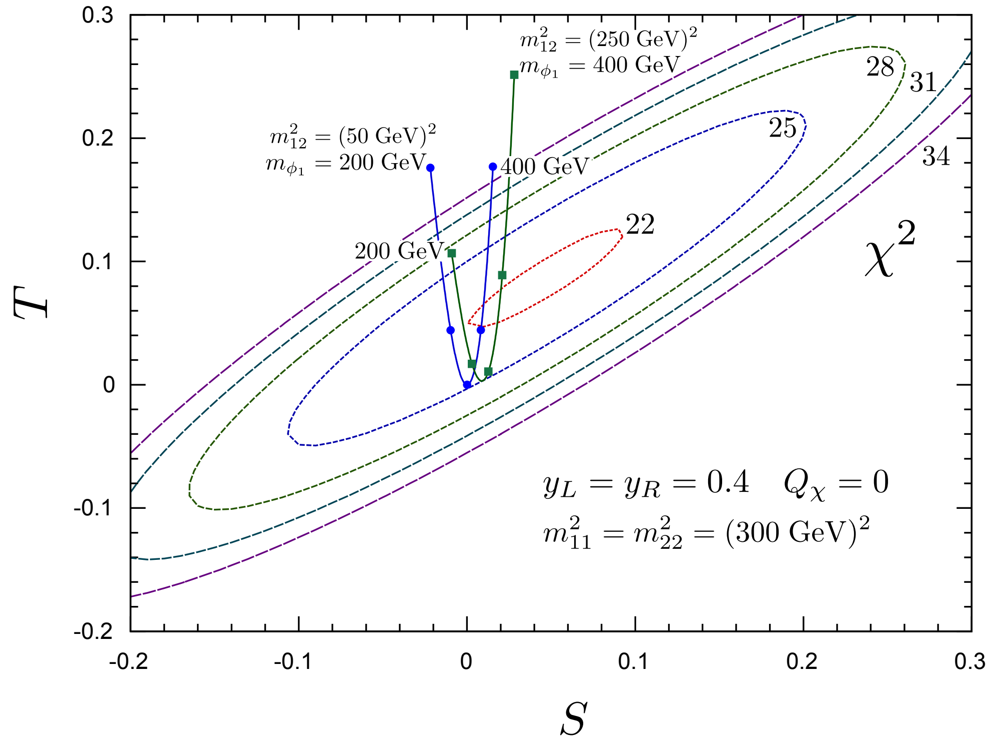


図 17: $y_L = y_R = 0.4$ かつ $Q_\chi = 0$（$Q_1 = 0$ かつ $Q_2 = -1$ に対応）であることを除いて、図 16 と同様である。

て、図 16 と同じ図を示した。$Q_\chi = 0$ ($Q_2 = -1$) かつ $m_{\phi_1} = 200$ GeV のとき、$Y_\Phi = -\frac{1}{2} < 0$ かつ $\Delta > 0$ のため、S は負である。m_{ϕ_1} が大きくなるにつれ、S は大きくなる。$m_{\phi_1} \sim 300$ GeV のとき、doublet scalars がほとんど縮退するため、$S \sim 0$ となる。$m_{\phi_1} > 300$ GeV のとき、S は正になる。この振る舞いは、前の $Q_2 = 0$ の場合と異なる。なぜなら、Y_Φ の符号が異なるからである。T は SU(2) scalar doublet が縮退しない限り、常に正であることに注意。両方のケースを見てわかるように、SU(2) scalar doublet のわずかな non-degeneracy は、χ^2 を改善できる。

本研究では数値解析を行うにあたって、例えこの模型では湯川結合定数 y_L, y_R を小さく取れるとしても、電弱精密測定に $Z\mu^+\mu^-$, $Z\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$, $W\mu\nu_\mu$ の vertex corrections を含めた。vertex correction の表式は、以下のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
\Delta g_L^\mu &= \frac{y_L^2}{16\pi^2}\left[2\sum_{ij}\left\{\left(-\frac{1}{2}-Q_\phi s_W^2\right)V_{2i}^*V_{2j}-Q_\phi s_W^2 V_{1i}^*V_{1j}\right\}V_{2i}V_{2j}^*C_{24}(s_i,\chi,s_j;p,q-p)\right.\\
&\quad +\sum_i Q_\chi s_W^2|V_{2i}|^2\left\{\frac{1}{2}-2C_{24}-M_Z^2(C_{12}+C_{23})+m_\chi^2 C_0\right\}(\chi,s_i,\chi;q-p,p)\\
&\quad \left.-\sum_i\left(-\frac{1}{2}+s_W^2\right)|V_{2i}|^2(B_0+B_1)(s_i,\chi;p)\right], \qquad (3.66)\\
\Delta g_R^\mu &= \frac{y_R^2}{16\pi^2}\left[2\sum_{ij}\left\{\left(-\frac{1}{2}-Q_\phi s_W^2\right)V_{2i}^*V_{2j}-Q_\phi s_W^2 V_{1i}^*V_{1j}\right\}V_{1i}V_{1j}^*C_{24}(s_i,\chi,s_j;p,q-p)\right.\\
&\quad +\sum_i Q_\chi s_W^2|V_{1i}|^2\left\{\frac{1}{2}-2C_{24}-M_Z^2(C_{12}+C_{23})+m_\chi^2 C_0\right\}(\chi,s_i,\chi;q-p,p)\\
&\quad \left.-\sum_i s_W^2|V_{1i}|^2(B_0+B_1)(s_i,\chi;p)\right], \qquad (3.67)\\
\Delta g_L^{\nu_\mu} &= \frac{y_N^2}{16\pi^2}\left[2\left(\frac{1}{2}-s_W^2 Q_{\phi_1}\right)C_{24}(\phi_1,\chi,\phi_1;q-p,p)\right.\\
&\quad +Q_\chi s_W^2\left\{\frac{1}{2}-2C_{24}-M_Z^2(C_{12}+C_{23})+m_\chi^2 C_0\right\}(\chi,\phi_1,\chi;q-p,p)\\
&\quad \left.-\frac{1}{2}(B_0+B_1)(\phi_1,\chi;p)\right], \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

ここで p と q は、それぞれ $\Delta g_{L,R}^\mu$ でのミューオンの運動量（$\Delta g_L^{\nu_\mu}$ ではミューオン・ニュートリノの運動量）と Z ボソンの運動量である。(3.66) 式および (3.67) 式の第 1 項と第 2 項はスカラー s_i とフェルミオン χ からの寄与、第 3 項はミューオンの波動関数くり込みをそれぞれ表す。(3.68) 式の第 1 項と第 2 項はスカラー ϕ_1 とフェルミオン χ からの寄与、第 3 項はニュートリノの波動関数くり込み[#13]をそれぞれ表す。

$\mu\nu_\mu W$-vertex への補正は

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{\delta}_G &= \frac{y_L^2}{8\pi^2}\left[\sum_i|V_{2i}|^2 C_{24}(\phi_1,s_i,\chi;-q,p)\right.\\
&\quad \left.-\frac{1}{4}\left\{(B_0+B_1)(\phi_1,\chi;p-q)+\sum_i|V_{2i}|^2(B_0+B_1)(s_i,\chi;p)\right\}\right], \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

と表される。ここで p, $p-q$, q は、それぞれミューオン、ミューオン・ニュートリノ、W ボソンの運動量である。ただし $q^2=0$ の近似を用いた。(3.69) 式の第 1 項は ϕ_1, s_i, χ からの寄

[#13] ただし、ニュートリノの有限な波動関数くり込みを含む。

与、第２項はミューオンの波動関数くり込みとニュートリノの有限な波動関数くり込みをそれぞれ表す。これらの vertex correction の相殺項に関する議論は Appendix D を参照。また、$\mu\nu_\mu W$-vertex への補正 (3.69) 式の解析的な表式は

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{\delta}_G \;=\; & -\sum_i \frac{|V_{2i}|^2 y_L^2}{(4\pi)^2}\left[-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\frac{a_i}{a_1-a_i}-\frac{1}{2}\frac{1}{a_i-1}\left\{1-\frac{a_i(a_1-1)}{a_1-a_i}\right\}\right. \\
& +\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{a_i-1}\right)\left(\frac{1}{a_1-1}\right)\right\}\ln a_1 \\
& \left.+\frac{a_i}{a_1-a_i}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{a_i}{a_1-a_i}+\left(\frac{1}{a_i-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{a_i(a_1-1)}{a_1-a_i}\right)\right\}\ln\frac{a_1}{a_i}\right] \\
& +\sum_i \frac{|V_{2i}|^2 y_L^2}{(4\pi)^2}\left[-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\frac{a_i}{1-a_i}-\frac{a_i}{1-a_i}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a_i}{1-a_i}\right)\ln a_i\right] \\
& +\sum_i \frac{1}{2}\frac{|V_{2i}|^2 y_L^2}{(4\pi)^2}\left[-\frac{1}{2}\frac{a_1}{1-a_1}-\frac{a_1}{1-a_1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a_1}{1-a_1}\right)\ln a_1\right. \\
& \left.+\frac{1}{2}\frac{a_i}{1-a_i}+\frac{a_i}{1-a_i}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a_i}{1-a_i}\right)\ln a_i\right] \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

である。ただし、$a_1 = m_{\phi_1}^2/m_\chi^2$, $a_i = m_{s_i}^2/m_\chi^2$ である。

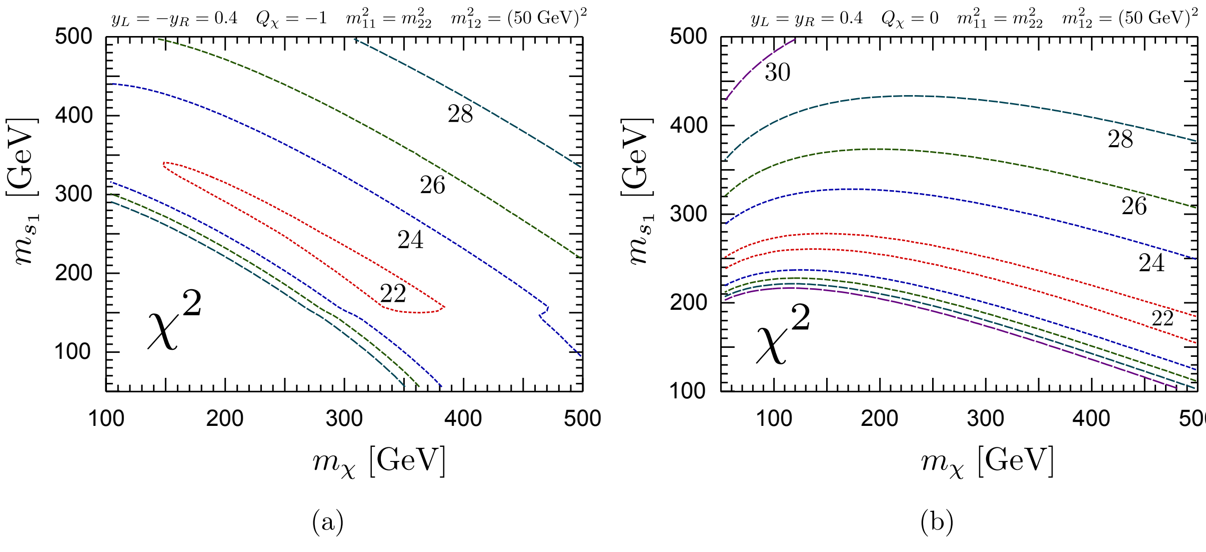


図 18: (a) $Q_\chi = -1$ かつ $y_L = -y_R = 0.4$ ならびに (b) $Q_\chi = 0$ かつ $y_L = y_R = 0.4$ における χ^2 を、m_χ と m_{s_1} の関数として表した。ここで $m_{11}^2 = m_{22}^2$ かつ $m_{12}^2 = (50\ \text{GeV})^2$ にとった。

図 18 では、(a) $Q_\chi = -1$ かつ $y_L = -y_R = 0.4$ ならびに (b) $Q_\chi = 0$ かつ $y_L = y_R = 0.4$ における χ^2 の等高線を、m_χ と m_{s_1} の関数として表した。ここで、$m_{12}^2 = (50\ \text{GeV})^2$ かつ $m_{11}^2 = m_{22}^2$ にとった。m_{ϕ_1} の値は、それぞれ、$Q_\chi = -1$ のとき $m_{\phi_1} > 105$ GeV 、$Q_\chi = 0$ の

とき $m_{\phi_1} > 46$ GeV、の範囲で χ^2 が最小になるように決めた。図 18 の両方のケースにおいて、χ^2 は 22 まで小さくなることができる。これは前に議論した、right-handed ミューオンのみが新しい湯川結合をもつ場合よりも小さい。図 18 を見ると、電弱精密測定から比較的軽い χ と s_i が好ましいことが分かる。表 2 で、$Q_\chi = 0$, $m_{\phi_1} = 300$ GeV, $m_\chi = 200$ GeV, $m_{11}^2 = m_{22}^2 = (250)^2$ GeV^2, $m_{12}^2 = (50)^2$ GeV^2 の場合における、電弱精密測定の予言値を示した。表 2 が示すように、電弱精密測定のフィットは非常に良い。したがって、LHC でこれらの粒子からどのような効果が期待できるか知ることは、重要である。後の 3.3 節では、LHC でこのような新粒子が与える効果について議論する。

最後に補足として、この節で議論した新しい湯川相互作用をもつ模型を、第 4 節で議論するニュートリノの質量と混合を説明する模型に拡張した場合に、他にどのような新粒子が電弱精密測定に寄与し得るかについて述べておく。本節で議論した模型は、SU(2)$_L$ singlet のフェルミオンに、χ_i $(i = 1, 2, 3)$ のようにフレーバーの構造を導入することによって、ニュートリノの質量と混合を説明する模型に拡張できる。そのため、新たに追加される新粒子は SU(2)$_L$ singlet であり、S,T パラメーターには寄与しない。したがって、本節で解析した模型と同様、第 4 節で議論するニュートリノの質量と混合を説明する模型は、電弱精密測定と無矛盾であると考えることができる。

3.3 新しい湯川相互作用をもつ模型の LHC 探索

今までの節で、ミューオン g − 2 のアノマリーは、電弱スケールに新粒子が存在することを強く示唆していることを示した。また、ミューオン g − 2 のアノマリーは多価の荷電粒子が好ましいことも示唆している。したがって、これらの粒子は直接的ないし間接的に LHC で検証できる可能性がある。この節では、これらの新粒子が $h \to \gamma\gamma$ のヒッグス粒子の崩壊過程に及ぼす影響、ならびに、LHC におけるこれらの新粒子の直接生成について議論する。

3.3.1 $h \to \gamma\gamma$ への効果

SU(2)$_L$ singlet と doublet のスカラーは、次のようなスカラーの相互作用を通して、ヒッグスと結合できる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\kappa_1 \phi^\dagger \phi (H^\dagger H) - \kappa_2 (\Phi^\dagger \Phi)(H^\dagger H) - \kappa_3 (H^\dagger \Phi)(\Phi^\dagger H) \\ &\quad -\kappa_4 M \left\{ (H^\dagger \Phi)\phi^\dagger + \text{h.c.} \right\}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

ここで H は、標準模型の SU(2)$_L$ doublet のヒッグスである。SU(2)$_L$ singlet スカラー ϕ のみが存在する場合、結合定数は κ_1 以外ゼロであるが、SU(2)$_L$ singlet のスカラー ϕ と doublet のスカラー Φ の両方が存在する場合、全ての結合が許される[#14]。

[#14] ϕ の QED 電荷 (Q_ϕ) がゼロの場合、$(H^\dagger \Phi)\phi$ や $(H^\dagger \Phi)^2$ のような項も可能である。本論文の解析では、簡単のため、このような項は小さいと仮定する。例えこのような項を含めたとしても、定性的な結果は変わらない。

right-handend ミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ場合は、$\mathrm{SU}(2)_L$ singlet のスカラー ϕ が存在し、ヒッグスとの相互作用は

$$\mathcal{L} = -\lambda v h \phi^\dagger \phi, \tag{3.72}$$

となる。この模型では $\lambda = \kappa_1$ である。また、v はヒッグスの真空期待値で、$v \simeq 246$ GeV である。ϕ の QED 電荷 Q_ϕ がゼロでないとき、ϕ はヒッグスの崩壊 $h \to \gamma\gamma$ に寄与することが可能である。$\Gamma(h \to \gamma\gamma)$ の崩壊幅は

$$\Gamma(h \to \gamma\gamma) \;=\; \frac{\alpha^2 m_h^3}{256\pi^3 v^2}|S(m_h)|^2, \tag{3.73}$$

で与えられる。ここで、振幅 $S(m_h)$ はリーディング・オーダーで

$$S(m_h) = \frac{8}{3}F_t(\tau_t) - F_W(\tau_W) + Q_\phi^2 \lambda \frac{v^2}{2m_\phi^2} F_\phi(\tau_\phi). \tag{3.74}$$

と書き表すことができる。第 1 項、第 2 項、第 3 項は、それぞれトップ、W、ϕ からの寄与であり、$\tau_x = \frac{m_h^2}{4m_x^2}$ $(x = t, W,\ \phi)$ である。関数 $F_t,\ F_W,\ F_\phi$ は

$$F_t(\tau) \;=\; \tau^{-1}\left[1 + (1-\tau^{-1})f(\tau)\right], \tag{3.75}$$

$$F_W(\tau) \;=\; 2 + 3\tau^{-1} + 3\tau^{-1}(2-\tau^{-1})f(\tau), \tag{3.76}$$

$$F_\phi(\tau_\phi) \;=\; \tau^{-1}\left[-1 + \tau^{-1}f(\tau)\right], \tag{3.77}$$

で与えられる。ただし、$\tau < 1$ のとき $f(\tau) = \arcsin^2(\sqrt{\tau})$ である。$h \to \gamma\gamma$ の分岐比は近似的に

$$\frac{\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)}{\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)_{\mathrm{SM}}} \;\simeq\; \frac{\Gamma(h \to \gamma\gamma)}{\Gamma(h \to \gamma\gamma)_{\mathrm{SM}}} = \left| \frac{\frac{8}{3}F_t(\tau_t) - F_W(\tau_W) + Q_\phi^2 \lambda \frac{v^2}{2m_\phi^2} F_\phi(\tau_\phi)}{\frac{8}{3}F_t(\tau_t) - F_W(\tau_W)} \right|^2, \tag{3.78}$$

で与えられる。なぜなら $\Gamma(h \to \gamma\gamma)$ の値が変わったとしても、全崩壊幅の値は殆ど変わらないからである。ここで、$\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)_{\mathrm{SM}}$ ならびに $\Gamma(h \to \gamma\gamma)_{\mathrm{SM}}$ は、リーディング・オーダーでの標準模型の予言である。ヒッグスの質量 m_h を固定すれば、この分岐比は m_ϕ と $Q_\phi^2\lambda$ の関数であることに注意する。前に述べたように、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するには、より大きな Q_ϕ が好ましい。(3.78) 式から明らかなように、より大きな Q_ϕ は $h \to \gamma\gamma$ により大きい影響を及ぼす。

図 19 で $\Gamma(h \to \gamma\gamma)/\Gamma(h \to \gamma\gamma)_{\mathrm{SM}}$ の比を、m_ϕ と $Q_\phi^2\lambda$ の関数として表した。ここで、$m_h = 125$ GeV にとった。この図からわかるように、もし $Q_\phi^2\lambda$ が大きく、かつ、m_ϕ が $O(100)$ GeV であれば、その影響は重要になり得る。例えば、前に議論した $Q_\phi = 4,\ \lambda = 1\ (-1)$ かつ $m_\phi = 200$ GeV の場合は、$\Gamma(h \to \gamma\gamma)/\Gamma(h \to \gamma\gamma)_{\mathrm{SM}} = 0.12\ (2.7)$ になる。残念ながら、λ の

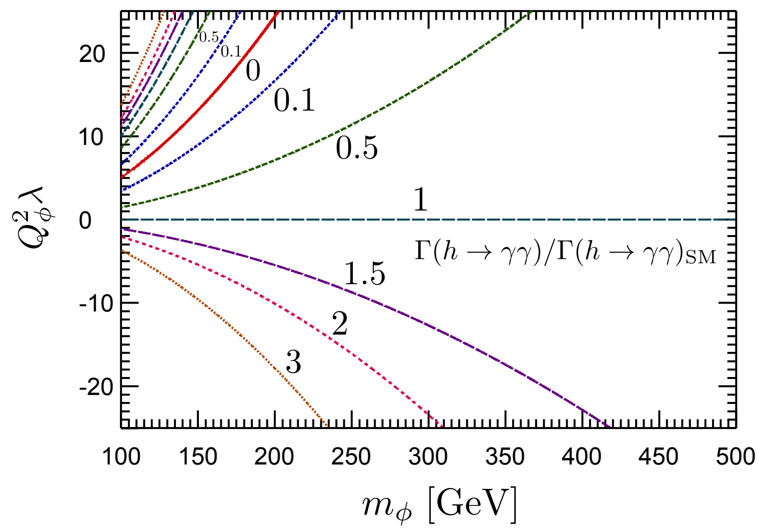


図 19: ヒッグスの崩壊幅 $h \to \gamma\gamma$ を標準模型の予言で規格化した $\frac{\Gamma(h\to\gamma\gamma)}{\Gamma(h\to\gamma\gamma)_{\rm SM}}$ を、m_ϕ と $Q_\phi^2\lambda$ の関数で表した。ここで、$m_h = 125$ GeV にとった。

値がわからないため、この模型では $\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)$ の分岐比を予言することはできない。しかしながら、$\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)$ が標準模型の予言から非常に違っていたとしても、驚くには当たらない。

right-handed と left-handed 両方のミューオンが新しい湯川相互作用をもつ場合、$SU(2)_L$ singlet と doublet のスカラーは (3.71) 式で示したヒッグスとの相互作用を持ち、これらは次のような相互作用を生じさせる。

$$\mathcal{L} = -\kappa_2 v h \phi_1^* \phi_1 - \sum_{ij} \lambda_{ij} v h s_i^* s_j, \tag{3.79}$$

ただし

$$\lambda_{ij} = \kappa_1 V_{1i}^* V_{1j} + (\kappa_2 + \kappa_3) V_{2i}^* V_{2j} + \frac{M}{\sqrt{2}v} \kappa_4 (V_{1i}^* V_{2j} + V_{2i}^* V_{1j}). \tag{3.80}$$

である。これらは $h \to \gamma\gamma$ の崩壊幅に寄与して

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)}{\mathrm{BR}(h \to \gamma\gamma)_{\rm SM}} \\ \simeq &\left| \frac{\frac{8}{3}F_t(\tau_t) - F_W(\tau_W) + Q_1^2 \kappa_2 \frac{v^2}{2m_{\phi_1}^2} F_\phi(\tau_{\phi_1}) + Q_2^2 \sum_i \lambda_{ii} \frac{v^2}{2m_{s_i}^2} F_\phi(\tau_{s_i})}{\frac{8}{3}F_t(\tau_t) - F_W(\tau_W)} \right|^2 . \end{aligned} \tag{3.81}$$

となる。$Q_\chi = -1$ のとき（$Q_1 = 1$ かつ $Q_2 = 0$ に対応)、上で議論した例のように、ϕ_1 のみが $h \to \gamma\gamma$ に寄与することができる。なぜなら s_i はフォトンと結合しないからである。その

結果は、図 19 で $\lambda = \kappa_2$ かつ $Q_\phi = Q_1 = 1$ とした場合に等しい。この場合、もし κ_2 が大きければ、その影響は重要になり得る。例えば、$m_{\phi_1} = 250$ GeV で $\kappa_2 = 1$ と $\kappa_2 = -1$ のときは、$\Gamma(h \to \gamma\gamma)/\Gamma(h \to \gamma\gamma)_{\rm SM} = 0.95$ と 1.05 にそれぞれなる。

$Q_\chi = 0$ のとき（$Q_1 = 0$ かつ $Q_2 = -1$ に対応)、スカラー s_i $(i = 1, 2)$ は $h \to \gamma\gamma$ に寄与することができる。前の場合と同様、ヒッグスとの結合 λ_{11} と λ_{22} が大きければ、$h \to \gamma\gamma$ への影響は重要になり得る。例えば、 $m_{11}^2 = m_{22}^2$ かつ $M = \frac{v}{\sqrt{2}}$ のとき、$\kappa_i = \kappa > 0$ $(i = 1 - 4)$ に対し $\lambda_{11} = \kappa$ かつ $\lambda_{22} = 2\kappa$ を得る。一方で、$\kappa_i = \kappa < 0$ $(i = 1 - 4)$ に対しては、$\lambda_{11} = 2\kappa$ かつ $\lambda_{22} = \kappa$ を得る。結果として、$m_{11}^2 = m_{22}^2 = (300 \text{ GeV})^2$ のとき、$\kappa = 1$ と $\kappa = -1$ に対し、それぞれ $\Gamma(h \to \gamma\gamma)/\Gamma(h \to \gamma\gamma)_{\rm SM} = 0.90$ と 1.14 になる（$\kappa = 2$ と $\kappa = -2$ に対しては、それぞれ 0.71 と 1.56 になる)。

この模型における $h \to \gamma\gamma$ の崩壊分岐比を予言することは、スカラーの相互作用に係る、多くの未知のパラメーターに依るため困難であるが、$h \to \gamma\gamma$ の過程に大きな影響を与える可能性がある。

3.3.2 LHC での直接生成

前節で議論したように、ミューオン g − 2 のアノマリーは、電弱スケールに新粒子が存在することを強く示唆している。ただし本論文の 3.1 節で議論した模型は、次の 4 節で議論するような、ミューオン g − 2 のアノマリーだけでなくニュートリノの質量や混合も説明するような、より現象論的に魅力的な模型の一部であると考えられる。すなわち 3.1 節で議論した模型に含まれる粒子以外にも、さらに多くの粒子が存在すると考えられる。そのため、本論文では明確に定義された LHC でのシグネチャーは議論しない。しかしながら、新粒子に関するイベントをどれぐらい LHC で生成できるかを知ることは重要である。よって、ここでは LHC における新粒子の生成断面積を示すことにする。

right-handed ミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ場合、模型には $\mathrm{SU}(2)_L$ singlet スカラー (ϕ) と singlet フェルミオン (χ) が存在する。$Q_\chi = -1$ のとき $Q_\phi = 0$ なので、χ のみが標準模型のゲージボソン $(Z$ と $\gamma)$ と結合する。したがって、電弱ゲージ相互作用を通してフェルミオン χ を対生成することができる。図 20 (a) で示したように、LHC ($\sqrt{s} = 8$ TeV and 14 TeV) と Tevatron ($\sqrt{s} = 1.96$ TeV) における χ の対生成断面積を、m_χ の関数として計算した。生成断面積を計算するに当たって、MadGraph [76] を用いた[#15]。ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するには、フェルミオン χ の質量は 100 GeV 程度のオーダーでなければならない。図 20 (a) で示したように、$\sqrt{s} = 8$ TeV ($\sqrt{s} = 14$ TeV) の LHC で、$m_\chi = 100 - 500$ GeV に対して χ の生成断面積は 0.5-0.0005 pb (1-0.001 pb) の範囲内になり、また $\sqrt{s} = 1.96$ TeV の Tevatron では、$m_\chi = 100 - 250$ GeV に対して 0.1-0.001 pb になる。もし $\sqrt{s} = 8$ TeV と 14 TeV に対し、10 fb^{-1} のルミノシティーを考えると、LHC で生成されるイベント数は、それぞれ 5-5000 および 10-10000 のオーダーとなる。したがって、シグナルのイベント数は有意

[#15] MadGraph のモデルファイルは、Appendix E にのせた。

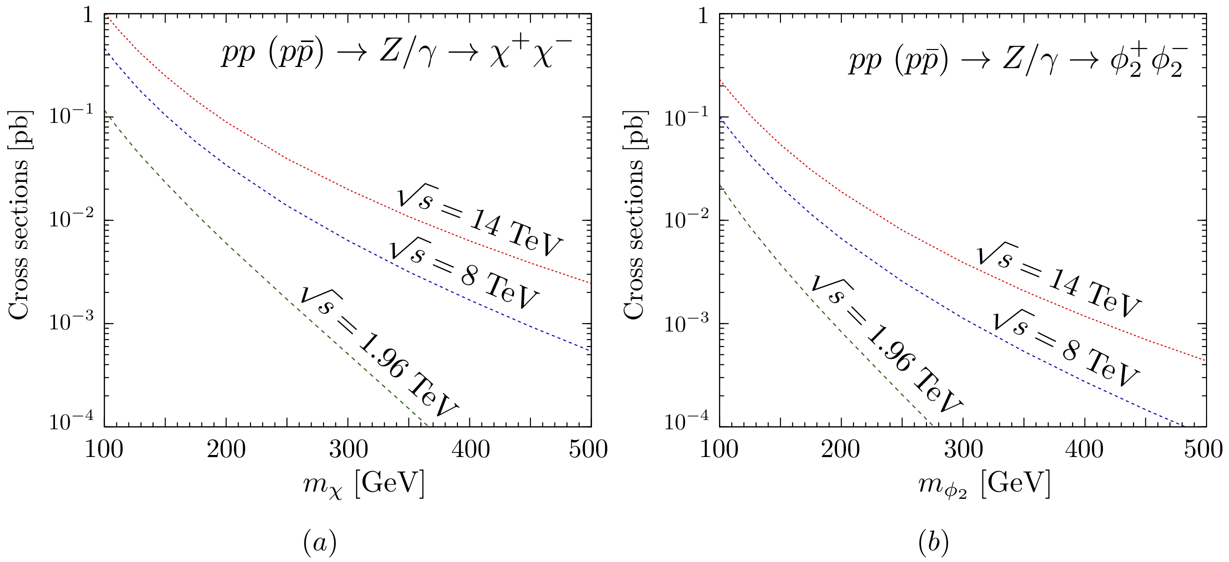


図 20: (a) χ が $Q_\chi = -1$: $pp\ (p\bar{p}) \to Z/\gamma \to \chi^+\chi^-$、ないし、(b) ϕ_2^- が $Q_2 = -1$: $pp\ (p\bar{p}) \to Z/\gamma \to \phi_2^+\phi_2^-$、の場合の LHC (Tevatron) における対生成断面積を、m_χ と m_{ϕ_2} の関数としてそれぞれ表した。ここで、LHC については $\sqrt{s} = 8$ TeV と 14 TeV、Tevatron については 1.96 TeV にそれぞれとった。

になり得る。この場合、もし ϕ が χ よりも軽ければ、χ は μ と ϕ に崩壊できる。もし ϕ が安定な中性の粒子であれば、最終的なシグネチャーは $\mu^+\mu^- +$ missing energy になると考えられる。これは $W^+W^-(\to \mu^+\mu^-)$ 生成のようなバックグラウンドの影響を受け、このバックグラウンドの生成率は $\sqrt{s} = 8$ TeV (14 TeV) の LHC で 0.29 (0.51) pb 程度である。したがって、このようなシグナルイベントの検証可能性を議論するためにも、より詳細な解析が重要になってくる。もし多価の QED 電荷の χ を考えると、断面積は Q_χ^2 のファクター分だけ増え、断面積はより一層大きくなるため、LHC からの制限は重要になる[#16]。

ϕ と χ に加えて $\mathrm{SU}(2)_L$ doublet スカラーをもつ 2 番目の模型では、電弱ゲージ相互作用を通して、これらのスカラーを対生成することができる。例えば図 20 (b) は、$Q_\chi = 0$（$Q_1 = 0$ かつ $Q_2 = -1$ に対応）における荷電スカラー $\phi_2^+\phi_2^-$ の生成断面積を、m_{ϕ_2} の関数として表している。ここでは $\sqrt{s} = 8$ TeV と 14 TeV の LHC、および $\sqrt{s} = 1.96$ TeV の Tevatron での予言値を示した。図から分かるように、$\sqrt{s} = 8$ TeV ($\sqrt{s} = 14$ TeV) では $m_{\phi_2} = 100 - 500$ GeV に対して、生成断面積は 0.1-0.0001 pb (0.2-0.0005 pb) の範囲内になり、Tevatron では $m_{\phi_2} = 100 - 250$ に対して、0.02-0.0001 pb の範囲内になる。簡単のため、ϕ-ϕ_2 のスカラーの混合はないと仮定した。この場合、W ボソンを通して $\phi_1 + \phi_2$ も生成される。もし $\mathrm{SU}(2)_L$ doublet スカラーの質量が縮退していれば、断面積は図 20 (b) と同じようになることが確かめられる。一般的に、シグナルイベントは $pp\ (p\bar{p}) \to V \to \phi_i^*\phi_j$ の形になり、$V = Z, \gamma, W$ か

[#16] それに加えて、この場合は ϕ の対生成も無視できない。

つ $i, j = 1, 2$ である。したがって図 20 は、この模型における典型的な断面積を表している。

この模型は、次の 4 節で議論するような、ミューオン g − 2 のアノマリーだけでなくニュートリノの質量や混合も説明する模型の一部であると考えられ、本論文ではその完全なシグネチャーまで議論しない。ただし、ミューオン g − 2 のアノマリーをこれらの新粒子によって説明する模型を考える上で、電弱相互作用を通したこれらの新粒子の生成プロセスを探求することは、非常に重要であると強調しておく。

4 ニュートリノの質量と混合を説明する模型への拡張

前節では、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する新しい湯川相互作用を考え、カイラリティー・フリップによるエンハンスメントがある模型が好ましいことを示した。しかしながら、これまで議論してきた模型はミューオン g − 2 のアノマリーを説明することができるが、ニュートリノの質量や混合の現象を説明できないという点で、現象論的に不完全な模型となっている。そのため、最後にこの節では、3.1.2 節で議論した right-handed と left-handed 両方のミューオンが「新しい湯川相互作用」をもつ模型を拡張した、ミューオン g − 2 のアノマリーとニュートリノの質量と混合を、同時に説明する模型を考察する。3.1.2 節の解析から分かるように、この right-handed と left-handed 両方のミューオンが「新しい湯川相互作用」をもつ模型は、電弱精密測定と矛盾せず、ミューオン g − 2 のアノマリーをうまく説明できる可能性がある。それだけでなく、この模型は新しいフェルミオンにフレーバーの構造を持たせることによって、ニュートリノの小さな質量を輻射補正によって説明する Radiative Inverse Seesaw Model [77] に拡張できる。

以下では、初めに 4.1 節で、本論文 3.1.2 節の right-handed と left-handed 両方のミューオンが「新しい湯川相互作用」をもつ模型にレプトンフレーバーの構造を導入した模型 (Radiative Inverse Seesaw Model [77]) を考え、輻射補正から生じるニュートリノの質量を議論する。続いて 4.2 節で、Radiative Inverse Seesaw Model において、レプトン・フレーバーの破れからの制限を満たしつつ、ミューオン g − 2 のアノマリーとニュートリノの質量行列を説明するには、どのような理論領域が好ましいか議論する。

4.1 Radiative Inverse Seesaw Model

初めにこの節では、Radiative Inverse Seesaw Model [77] における、輻射補正を通して得られるニュートリノの質量を議論する。まず、3.1.2 節の right-handed と left-handed 両方のミューオンが「新しい湯川相互作用」をもつ模型に、レプトンのフレーバーの足を拡張することを考える。フレーバーの足を拡張した湯川相互作用は、次のように与えられる[#17]。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& -(y_L)_{\alpha i}\bar{L}_\alpha \Phi \chi_{Ri} - (y_R)_{\alpha i}\bar{l}_{R\alpha}\phi\chi_{Li} - m_{\chi_i}\bar{\chi}_{Li}\chi_{Ri} + \text{h.c.} \\
& -\frac{1}{2}M_{ij}\bar{\chi}^c_{Ri}\chi_{Rj} - \frac{1}{2}M'_{ij}\bar{\chi}^c_{Li}\chi_{Lj} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{4.82}
$$

ただし、新しいフェルミオン χ_i がフレーバーの足をもつ場合を考えた。ここで L_α $(= (\nu_{L\alpha},\, l_{L\alpha})^{\mathrm{T}})$, $l_{R\alpha}$, $(\alpha = 1,2,3 = e,\mu,\tau)$, Φ $(= (\phi_1,\phi_2)^{\mathrm{T}})$, ϕ はそれぞれ、3 世代の $\mathrm{SU}(2)_L$ doublet のレプトンと $\mathrm{SU}(2)_L$ singelt のレプトン、$\mathrm{SU}(2)_L$ doublet のスカラー、$\mathrm{SU}(2)_L$ sinlget のスカラーを表す。また χ_i $(i = 1,2,3)$ は $\mathrm{SU}(2)_L$ singlet のフェルミオンで QED 電荷は $Q_{\chi_i} = 0$ とす

[#17] 例えば $\bar{\chi}^c_{Ri}$ と書いたとき、フェルミオンのバー $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ と charge congugation $\psi^c = C\bar{\psi}^T$ と projection operator P_R が χ に作用する順は、1.projection operator 2.charge conjugation 3.bar の順とする。より明示的に書けば $\bar{\chi}^c_{Ri} = \overline{(\chi_{Ri})^c}$ である。

る[#18]。したがって、χ_i は Dirac mass m_{χ_i} に加えて Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} をもつことができる。フレーバーの足 α, β はレプトン e, μ, τ の mass eigenstates を、またフレーバーの足 i, j は χ_L, χ_R の Dirac mass m_{χ_i} の mass eingen states を表す。これまでに議論した模型と同様、標準模型の粒子を even、新粒子 ϕ,Φ,χ_i を odd とする Z_2 パリティーを仮定する。

さらに $Q_{\chi_i} = 0$ のとき Φ のハイパーチャージは $Y_\Phi = -1/2$ であるから、ヒッグス H とスカラー Φ に関して次のような項が許される。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\kappa_5(H^\dagger\tilde{\Phi})^2 + \text{h.c} = -\frac{\kappa_5}{4}v^2\phi_1^{*2} + \cdots, \tag{4.83}$$

ただし、電弱対称性の自発的破れの真空期待値は $\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ v)^{\mathrm{T}}$ とする。また $\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi^*$ である。

Radiative Majorana neutrino mass　(4.82) 式から、輻射補正によって生じるニュートリノの質量を求める。Z_2 パリティーは、$-(y_L)_{\alpha i}\bar{L}_\alpha\tilde{H}\chi_{Ri}$ のような type-1 see-saw [78] における、χ_{Ri} を right-handed neutrino とした Dirac mass terms を禁止している。したがって、ニュートリノは tree level では massless であるが、図 21 の 1-loop ダイアグラムから radiative masses を獲得する。

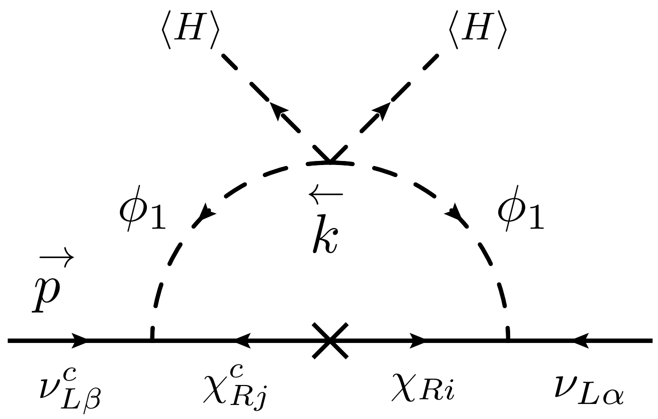


図 21: Radiative Majorana neutirno mass の 1-loop ダイアグラム。

この節では図 21 の 1-loop ダイアグラムの散乱振幅 $-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R$ を、Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} が Dirac mass m_{χ_i} に比べて小さいとして、これを摂動として扱う、mass insertion approximation の方法で計算する。mass insertion approximation による図 21 の 1-loop ダイアグラムの散乱振幅 $-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R$ の計算過程は、Appendix G に載せた。また、mass eingenstates による計算についても Appendix G を参照。

Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} が小さい理由は、Majorana mass terms がグローバルなレプトン $\mathrm{U}(1)_L$ 対称性を、ソフトに破る項であるためと考えることができる [77]。また結合定数 κ_5 に

[#18] $Q_{\chi_i} = 0$ のとき、$Q_1 = 0,\ Q_2 = -1,\ Q_\phi = -1$ である。

関しても、スカラー ϕ_1 がレプトン数をもつと仮定した場合、$(\kappa_5/4)v^2\phi_1^{*2}$ の項はレプトン数を破るため、κ_5 は小さいと考えることができる。以下では、ϕ_1 の質量項を実部と虚部に分ける $\kappa_5 v^2/2$ が、$m_{\phi_1}^2$ に比べて小さいとして、結合定数 κ_5 も摂動として扱うことにする。このように Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} と結合定数 κ_5 を摂動的に扱うと、得られたニュートリノの質量行列の表式と、元の Lagragian に含まれるパラーメーターとの対応が見やすいという利点がある。

図21の1-loopダイアグラムの散乱振幅 $-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R$ より、ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} &= \sum_{i,j}(y_L)_{\alpha i}(y_L)_{\beta j}\frac{\kappa_5}{2}v^2\frac{1}{16\pi^2(m_{\chi_i}^2-m_{\chi_j}^2)} \\ &\quad\times\left[M_{ij}\left\{\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2}+\frac{m_{\chi_i}^4}{(m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2)^2}\ln\left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2}\right]-(i\leftrightarrow j)\right\}\right. \\ &\quad\left.+M'_{ij}m_{\chi_i}m_{\chi_j}\left\{\frac{1}{m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2}+\frac{m_{\chi_i}^2}{(m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2)^2}\ln\left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2}\right]-(i\leftrightarrow j)\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.84}$$

を得る[#19]。この模型は (4.84) 式のように、ニュートリノの質量が Majorana mass に比例するため、Radiative Inverse Seesaw Model と呼ばれる。

4.2 Lepton flavor violation からの制限

次に、Radiative Inverse Seesaw Model における新しい湯川相互作用 (4.82) 式が引き起こす、レプトン・フレーバーの破れ (lepton flavor violation : LFV) を議論する。この節では、dipole-type operator から来る LFV として、$\mu\to e\gamma$, $\tau\to\mu\gamma$, $\tau\to e\gamma$ の過程を考える。

dipole-type operator が媒介する LFV の過程 $l_\beta\to l_\alpha\gamma$ ($l_e=e,\ l_\mu=\mu,\ l_\tau=\tau$) は、ローレンツ共変性とゲージ対称性から、次のような effective Lagrangian で表すことができる [79, 80]。

$$\delta\mathcal{L}_{\rm eff}^{\rm cLFV} = e\frac{m_{l_\beta}}{2}\,\bar{l}_\alpha\sigma^{\mu\nu}\left(L_{\alpha\beta}P_L+R_{\alpha\beta}P_R\right)l_\beta F_{\mu\nu} \tag{4.85}$$

ここで、m_{l_β} は l_β の質量、P_L, P_R の係数 $L_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ は新しい粒子の質量、電荷、湯川結合定数の関数である。effective Lagrangian (4.85) 式より、$l_\beta\to l_\alpha\gamma$ の過程の散乱振幅は次のようになる。

$$\mathcal{M} = e\epsilon_\mu^*(q)\bar{u}_\alpha(p')\left[m_{l_\beta}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu(L_{\alpha\beta}P_L+R_{\alpha\beta}P_R)\right]u_\beta(p) \tag{4.86}$$

ここで、$u_{\alpha(\beta)}$ と ϵ は、$l_{\alpha(\beta)}$ とフォトンの波動関数、p, p', q は l_β, l_α, フォトンの運動量をそれぞれ表す。ただし、$p^\mu-p'^\mu=q^\mu$ である。散乱振幅 (4.86) 式から、$l_\beta\to l_\alpha\gamma$ の崩壊幅は次の

[#19] 先行研究 [77] では、(4.84) 式の M' に比例する項からの寄与を見落としていた。

ように求められる。

$$\Gamma(l_\beta \to l_\alpha\gamma) = \frac{e^2}{16\pi^2} m_\beta^5 \left(|L_{\alpha\beta}|^2 + |R_{\alpha\beta}|^2\right) \tag{4.87}$$

ただし、l_α の質量を無視した。さらに、$l_\beta \to l_\alpha\gamma$ の分岐比は、W ボソンによる崩壊 $l_\beta \to l_\alpha \nu_\beta \bar{\nu}_\alpha$ の分岐比を使って次のように表すことができる。

$$\frac{\mathrm{Br}(l_\beta \to l_\alpha\gamma)}{\mathrm{Br}(l_\beta \to l_\alpha \nu_\beta \bar{\nu}_\alpha)} = \frac{48\pi^3\alpha}{G_F^2} \left(|L_{\alpha\beta}|^2 + |R_{\alpha\beta}|^2\right) \tag{4.88}$$

ここで $\alpha \equiv e^2/4\pi$ は fine structure constant、G_F は Fermi constant をそれぞれ表す。したがって、$l_\beta \to l_\alpha\gamma$ の散乱振幅 (4.86) 式から係数 $L_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ を求めれば、(4.88) 式より $l_\beta \to l_\alpha\gamma$ の分岐比が得られる。この分岐比を実験の上限値と比較することで、新しい湯川相互作用が引き起こす LFV に対する制限を調べることができる。

Radiative Inverse Seesaw Model の新しい湯川相互作用 (4.82) 式が引き起こす、$l_\beta \to l_\alpha\gamma$ のダイアグラム、ならびに、散乱振幅 (4.86) 式の計算は Appendix B.3 に載せた。Appendix B.3 の (B.214) 式より、m_{l_α} が m_{l_β} に比べて小さいとして無視すると、この模型における係数 $L_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= \sum_n \sum_i \frac{Q_\chi}{(4\pi)^2} \Bigg[-\frac{1}{2} |V_{1n}|^2 (y_R)_{\alpha i} (y_R)^*_{\beta i} (C_{11} + C_{12})(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) \\
&\quad - \frac{m_{\chi_i}}{m_{l_\beta}} V_{1n} V^*_{2n} (y_R)_{\alpha i} (y_L)^*_{\beta i} C_{11}(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) \Bigg] \\
&\quad + \sum_n \sum_i \frac{Q_2}{(4\pi)^2} \Bigg[\frac{1}{2} |V_{1n}|^2 (y_R)_{\alpha i} (y_R)^*_{\beta i} (C_{22} + C_{12})(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) \\
&\quad + \frac{m_{\chi_i}}{m_{l_\beta}} V_{1n} V^*_{2n} (y_R)_{\alpha i} (y_L)^*_{\beta i} C_{12}(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= \sum_n \sum_i \frac{Q_\chi}{(4\pi)^2} \Bigg[-\frac{1}{2} |V_{2n}|^2 (y_L)_{\alpha i} (y_L)^*_{\beta i} (C_{11} + C_{12})(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) \\
&\quad - \frac{m_{\chi_i}}{m_{l_\beta}} V_{2n} V^*_{1n} (y_L)_{\alpha i} (y_R)^*_{\beta i} C_{11}(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) \Bigg] \\
&\quad + \sum_n \sum_i \frac{Q_2}{(4\pi)^2} \Bigg[\frac{1}{2} |V_{2n}|^2 (y_L)_{\alpha i} (y_L)^*_{\beta i} (C_{22} + C_{12})(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) \\
&\quad + \frac{m_{\chi_i}}{m_{l_\beta}} V_{2n} V^*_{1n} (y_L)_{\alpha i} (y_R)^*_{\beta i} C_{12}(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.90}$$

ここで、Q_χ と Q_2 はフェルミオン χ_i とスカラー s_n の QED 電荷をそれぞれ表す。また、上式の Passarino-Veltman functions の陽な表式は、Appendix B.3 節の (B.215), (B.216) , (B.217), (B.218) 式である。

LFV 過程	現在の上限値	将来の感度
$\mu \to e\gamma$	5.7×10^{-13} [81]	6×10^{-14} [85]
$\tau \to \mu\gamma$	4.4×10^{-8} [82]	$\sim 3 \times 10^{-9}$ [86]
$\tau \to e\gamma$	3.3×10^{-8} [82]	$\sim 3 \times 10^{-9}$
$\mu^-, \mathrm{Ti} \to e^-, \mathrm{Ti}$	4.3×10^{-12} [83]	$\sim 10^{-18}$ [87]
$\mu^-, \mathrm{Au} \to e^-, \mathrm{Au}$	7×10^{-13} [84]	
$\mu^-, \mathrm{Al} \to e^-, \mathrm{Al}$		$\sim 10^{-16}$ [88, 89]

表 3: LFV 過程に対する現在の実験からの制限と将来の感度。

フレーバーの足をそれぞれ $\alpha = 1, 2, 3 = e, \mu, \tau$ のように対応させると、$l_\beta \to l_\alpha\gamma$ の分岐比 (4.88) 式から $\mu \to e\gamma$, $\tau \to \mu\gamma$, $\tau \to e\gamma$ の分岐比はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}(\mu \to e\gamma) &= \frac{48\pi^3\alpha}{G_F^2}\left(|L_{12}|^2 + |R_{12}|^2\right) && (4.91) \\ \mathrm{Br}(\tau \to \mu\gamma) &\simeq (0.1741) \times \frac{48\pi^3\alpha}{G_F^2}\left(|L_{23}|^2 + |R_{23}|^2\right) && (4.92) \\ \mathrm{Br}(\tau \to e\gamma) &\simeq (0.1783) \times \frac{48\pi^3\alpha}{G_F^2}\left(|L_{13}|^2 + |R_{13}|^2\right) && (4.93) \end{aligned}$$

となる。ただし、τ の崩壊分岐比の値として実験値、$\mathrm{Br}(\tau \to \mu\nu_\tau\bar{\nu}_\mu) = 0.1741$ および $\mathrm{Br}(\tau \to e\nu_\tau\bar{\nu}_e) = 0.1741$ [7] を用いた。LFV 過程の分岐比 (4.91), (4.92), (4.93) 式と係数 $L_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ (4.89), (4.90) 式から分かるように、LFV は湯川行列 $(y_R y_R^\dagger)_{\alpha\beta}$, $(y_L y_L^\dagger)_{\alpha\beta}$, $(y_R y_L^\dagger)_{\alpha\beta}$, $(y_L y_R^\dagger)_{\alpha\beta}$ の非対角成分から生じる。表 3 に、LFV 過程に対する現在の実験からの制限と将来の感度をまとめた。

次に、この湯川結合定数 $(y_R)_{\alpha i}$, $(y_L)_{\alpha i}$ から、4.1 節で議論した radiative Majorana neutrino mass の質量行列 (4.84) 式と LFV の議論を関係づける。radiative Majorana neutrino mass の質量行列 (4.84) 式は、PMNS 行列 (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata matrix) を用いて次のように表すことができる。

$$(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} = \left(U_{\mathrm{PMNS}}\mathcal{M}_{\mathrm{diag}}U_{\mathrm{PMNS}}^{\mathrm{T}}\right)_{\alpha\beta} \tag{4.94}$$

ここで U_{PMNS} は PMNS 行列で、3 つの混合角、1 つの Dirac CP 位相、2 つの Majorana CP 位相でパラメトライズされ

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{PMNS}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \mathrm{diag}(1,\ e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}},\ e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}}) && (4.95) \end{aligned}$$

ニュートリノの質量の二乗差 [90]	
Δm^2_{21}	$7.60 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$
$\lvert\Delta m^2_{31}\rvert$ (NH)	$2.48 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$
$\lvert\Delta m^2_{31}\rvert$ (IH)	$2.38 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$
ニュートリノの混合角 [90]	
$\sin^2\theta_{12}$	0.323
$\sin^2\theta_{23}$ (NH)	0.567
$\sin^2\theta_{23}$ (IH)	0.573
$\sin^2\theta_{13}$ (NH)	0.0234
$\sin^2\theta_{23}$ (IH)	0.0240
ニュートリノの質量和 [91]	
$m_1 + m_2 + m_3$	$0.32\,\mathrm{eV}^2$

表 4: ニュートリノの質量の二乗差と混合角 [90]、およびニュートリノの質量和の値 [91]。(NH), (IH) は、Normal Hierarchy, Inverted Hierarchy をそれぞれ表す。

で与えられる [7]。ここで $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$、θ_{ij} は混合角、δ は Dirac CP 位相、α_{21}, α_{31} は２つの Majorana CP 位相をそれぞれ表す。以下では、簡単のため CP 位相は無視する。すると (4.95) 式は

$$U_{\mathrm{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

となる。また、(4.94) 式の対角化された質量行列 $\mathcal{M}_{\mathrm{diag}}$ は、$\mathcal{M}_{\mathrm{diag}} = \mathrm{diag}(m_1,\ m_2,\ m_3)$ で与えられる。本論文では、ニュートリノの混合角と質量の二乗差の値 [90]、およびニュートリノの質量和の値 [91] として、表 4 の値を用いた。表 4 の混合角、質量の二乗差、質量和の値から、以下のような U_{PMNS} 行列と $\mathcal{M}_{\mathrm{diag}}$ 行列の成分（括弧の値は Inverted hierarchy の場合）を得る[#20]。

$$\begin{aligned} s_{12} &= 0.5683\ (0.5683), \quad s_{23} = 0.7530\ (0.7570), \quad s_{13} = 0.1530\ (0.1549) \\ c_{12} &= 0.8228\ (0.8228), \quad c_{23} = 0.6580\ (0.6535), \quad c_{13} = 0.9882\ (0.9879) \\ m_1 &= 0.1027330\ (0.1103430)\,\mathrm{eV} \\ m_2 &= 0.1031022\ (0.1106868)\,\mathrm{eV} \\ m_3 &= 0.1141668\ (0.09897261)\,\mathrm{eV} \end{aligned} \tag{4.97}$$

[#20] ニュートリノの質量 m_1, m_2, m_3 の有効数字の桁数は、質量の二乗差を計算したとき、表 4 に与えられた値（有効数字３桁）になるように決めた。

(4.97) 式で与えられた U_{PMNS} 行列と $\mathcal{M}_{\text{diag}}$ 行列の成分を (4.94) 式に代入すれば、この模型におけるニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ が決まり、それにより模型のパラメーター領域がどのように制限されるか調べることができる。実験値 (4.97) 式から決まるニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ のオーダーを見積もるために、その成分を計算すると有効数字 3 桁で

$$(\mathcal{M}_\nu)_{\text{NH}} = \begin{pmatrix} 1.03 & 5.92\times10^{-2} & 9.97\times10^{-3} \\ 5.92\times10^{-2} & 1.17 & -4.17\times10^{-4} \\ 9.97\times10^{-3} & -4.17\times10^{-4} & 1.07 \end{pmatrix} \times 10^{-10}\,\text{GeV} \tag{4.98}$$

$$(\mathcal{M}_\nu)_{\text{IH}} = \begin{pmatrix} 1.10 & 4.06\times10^{-2} & -1.26\times10^{-2} \\ 4.06\times10^{-2} & 1.13 & -1.20\times10^{-1} \\ -1.26\times10^{-2} & -1.20\times10^{-1} & 1.05 \end{pmatrix} \times 10^{-10}\,\text{GeV} \tag{4.99}$$

となる。ただし、$(\mathcal{M}_\nu)_{\text{NH}}$, $(\mathcal{M}_\nu)_{\text{IH}}$ は Normal Hierarchy, Inverted Hierarchy の場合をそれぞれ表す。一方で、理論から決まるニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ は (4.84) 式より

$$(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} = \sum_{ij} (y_L)_{\alpha i}(y_L)_{\beta j}\tilde{m}_{ij} \tag{4.100}$$

である。ここで $\tilde{m}_{ij}$ を

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{ij} &= \frac{\kappa_5}{2}v^2\frac{1}{16\pi^2(m_{\chi_i}^2-m_{\chi_j}^2)} \\ &\times\left[M_{ij}\left\{\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2}+\frac{m_{\chi_i}^4}{(m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2)^2}\ln\left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2}\right]-(i\leftrightarrow j)\right\}\right. \\ &\left.+M'_{ij}m_{\chi_i}m_{\chi_j}\left\{\frac{1}{m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2}+\frac{m_{\chi_i}^2}{(m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2)^2}\ln\left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2}\right]-(i\leftrightarrow j)\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.101}$$

と置いた。以下では簡単のため、ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ について、次の 2 つの場合を考える。1. 湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ が単位行列に比例する場合、2. Majorana 質量行列 $\tilde{m}_{ij}$ が単位行列に比例する場合 。

1. 湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ が単位行列に比例する場合

- ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ の構造
  - ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ の構造は、Majorana 質量行列 $\tilde{m}_{ij}$ によって実現されると考えることができる。
- レプトン・フレーバーの破れからの制限

– (4.90) 式の湯川行列 $(y_L y_L^\dagger)_{\alpha\beta}$ の非対角成分はゼロとなるため、LFV の過程に寄与しない。また、湯川行列 $(y_R)_{\alpha i}$ も対角行列にとることで、湯川行列 $(y_R y_R^\dagger)_{\alpha\beta}$, $(y_R y_L^\dagger)_{\alpha\beta}$, $(y_L y_R^\dagger)_{\alpha\beta}$ からの LFV 過程への寄与もゼロとなる。したがって、このシナリオでは対角的な湯川行列を考えることで、LFV からの制限を避けることができる。

- ミューオン g − 2 のアノマリーの説明

  – 本論文 3.2 節の表 2 で示したように、電弱スケールの新粒子と $\mathcal{O}(1)$ の湯川結合定数によって、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明することができる。ただし、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ は単位行列に比例するため、$(y_L y_L^\dagger)_{11}$ の成分はエレクトロン g − 2 に寄与する。例えば、表 2 で示したようなパラメーターとして、$(y_L)_{11} = 0.4$、$m_{\chi_1} = 200$ GeV, $m_{\phi_1} = 300$ GeV, $m_{11}^2 = m_{22}^2 = (250)^2$ (GeV)^2, $m_{12}^2 = (50)^2$ (GeV)^2 の場合を考えると、エレクトロン g − 2 の値は $a_e^{\rm new} = -4.15 \times 10^{-16}$ となる。これはエレクトン g − 2 の標準模型の予言と実験値との差 [92]

$$\Delta a_e = a_e^{\rm EXP} - a_e^{\rm SM} = -10.5\,(8.1) \times 10^{-13}, \tag{4.102}$$

  に比べて十分小さい。ただし、湯川行列 $(y_R)_{\alpha i}$ を $(y_R)_{11} = 0$ にとった。例えば、もし湯川結合定数 $(y_R)_{11}$ を $(y_L)_{11}$ と同じ大きさの $(y_R)_{11} = 0.4$ にとると、エレクトロン g − 2 の値は $a_e^{\rm new} = 1.54 \times 10^{-11}$ となり、理論と実験の不一致を 2σ 以内にするには、m_{χ_1} の値を 2 TeV 程度まで重たくとる必要がある。

2. Majorana 質量行列 $\tilde{m}_{ij}$ が単位行列に比例する場合　Majorana 質量行列 $\tilde{m}_{ij}$ が単位行列に比例する場合 $\tilde{m}_{ij} = \tilde{m}$ とすると、ニュートリノの質量行列 (4.100) 式は

$$(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} \;=\; \sum_{ij} (y_L)_{\alpha i} (y_L)_{\beta i} \tilde{m} \tag{4.103}$$

となる。ここで $\tilde{m}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{m} \;=\; & \frac{\kappa_5}{2} v^2 \frac{1}{16\pi^2 (m_{\phi_1}^2 - m_\chi^2)^2} \left[M \left\{ m_{\phi_1}^2 + m_\chi^2 + \frac{2 m_{\phi_1}^2 m_\chi^2}{m_{\phi_1}^2 - m_\chi^2} \ln \left[\frac{m_\chi^2}{m_{\phi_1}^2} \right] \right\} \right. \\ & \left. + M' m_\chi^2 \left\{ 2 + \frac{m_{\phi_1}^2 + m_\chi^2}{m_{\phi_1}^2 - m_\chi^2} \ln \left[\frac{m_\chi^2}{m_{\phi_1}^2} \right] \right\} \right] \end{aligned} \tag{4.104}$$

である。ただし、$m_{\chi_i} = m_\chi$ とした。この場合、2 つのユニタリー行列 U, V によって

$$y_L = U y_L^{\rm diag} V \tag{4.105}$$

のように湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ を対角化すると、(4.103) 式は

$$U_{\rm PMNS}\mathcal{M}_{\rm diag}U_{\rm PMNS}^{\rm T} = \tilde{m}Uy_L^{\rm diag}VV^{\rm T}y_L^{\rm diag}U^{\rm T} \tag{4.106}$$

となる。ここでは簡単のため $V = 1$ にとり、さらに $U = U_{\rm PMNS}$ にとる。そうすると $y_L^{\rm diag}$ は、$y_L^{\rm diag} = (1/\sqrt{\tilde{m}}){\rm diag}(\sqrt{m_1},\ \sqrt{m_2},\ \sqrt{m_3})$ のように表すことができる。このとき、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ は

$$y_L = \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}}}U_{\rm PMNS}\,{\rm diag}(\sqrt{m_1},\ \sqrt{m_2},\ \sqrt{m_3}) \tag{4.107}$$

で与えられる。

- ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ の構造
  - ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ の構造は、湯川行列 $(y_Ly_L^{\rm T})_{\alpha\beta}$ によって実現されていると考えることができる。
- レプトン・フレーバーの破れからの制限
  - 湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ が単位行列に比例する場合の解析と同様、表 2 で示したパラメーターより、$m_{\chi_1} = 200$ GeV, $m_{\phi_1} = 300$ GeV, $m_{11}^2 = m_{22}^2 = (250)^2$ $({\rm GeV})^2$, $m_{12}^2 = (50)^2$ $({\rm GeV})^2$ の場合を考える。初めに、湯川行列 $(y_R)_{\alpha i}$ を $(y_R)_{\alpha i} = 0$ と置き、(4.107) 式で決まる湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ から生じるレプトン・フレーバーの破れを評価する。この場合、レプトン・フレーバーの破れは (4.90) 式の湯川行列 $(y_Ly_L^\dagger)_{\alpha\beta}$ からのみ生じる。ただし、(4.107) 式の $\tilde{m}$ の大きさを相対的に変えることで、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の成分の大きさを変えることができる。$\tilde{m}$ を $\tilde{m} = 10^{-7}$ GeV 程度にとると、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の成分の大きさは $\mathcal{O}(0.01)$ 程度の大きさとなり、表 3 にまとめた、LFV 過程に対する実験からの制限（特に $\mu \to e\gamma$ からの制限）を避けることができる。一方で、もし $(y_R)_{\alpha i}$ の成分を $\mathcal{O}(0.1)$ 程度の大きさにとると、LFV 過程に非常に大きな寄与を与える。したがって、このようなシナリオは実験から強く制限される。
- ミューオン g − 2 のアノマリーの説明
  - LFV 過程の解析で示したように、レプトン・フレーバーの破れの制限から、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の成分の大きさは $\mathcal{O}(0.01)$ 程度の大きさにとらなければならない。しかし、このような小さい湯川結合定数では、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明することはできない。したがって、このようなシナリオではミューオン g − 2 のアノマリーを説明することは困難である。

以上で議論したように、レプトン・フレーバーの破れ（特に $\mu \to e\gamma$）は、模型のフレーバーの構造に強い制限を与える。ただし、上に挙げたような模型のフレーバーの構造は極端な場

合であり、一般的には湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ と Majorana 質量行列 $\tilde{m}_{ij}$ の両方によって、ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ の構造が決定されるように思われる。そこで、表 3 にまとめた LFV 過程のイベントレートの上限から、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の混合に対する制限を示す。図 22 は $\mu \to e\gamma$ $(\tau \to \mu\gamma)$ の LFV 過程の崩壊分岐比を、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の非対角成分 $(y_L)_{12}$ $((y_L)_{32})$ と対角成分 $(y_L)_{22}$ の比の関数として表したものである。ここで、ミューオン g − 2 のアノマリーを説

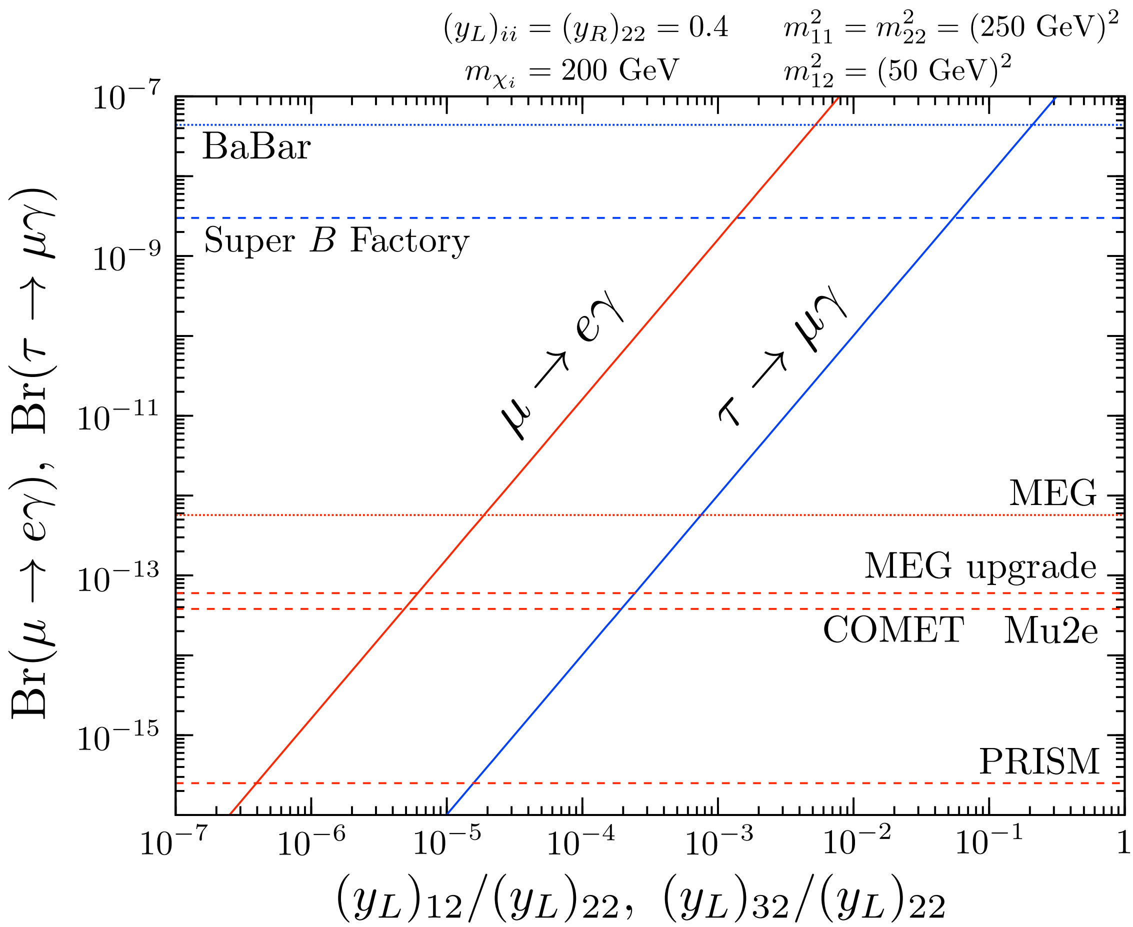


図 22: $\mu \to e\gamma$ $(\tau \to \mu\gamma)$ の崩壊分岐比を、湯川行列の非対角成分 $(y_L)_{12}$ $((y_L)_{32})$ と対角成分 $(y_L)_{22}$ の比の関数として表した。ここで、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するようなパラメーターとして表 2 より $(y_L)_{ii} = (y_R)_{22} = 0.4$, $M^2_{11} = m^2_{22} = (250\ \mathrm{GeV})^2$, $m_{\chi_i} = 200$ GeV, $m^2_{12} = (50\ \mathrm{GeV})^2$ にそれぞれとった。ただし、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の $(y_L)_{12}$ と $(y_L)_{32}$ 以外の非対角成分と、湯川行列 $(y_R)_{\alpha i}$ の $(y_R)_{22}$ 以外の成分はゼロと仮定した。また、$\mu \to e$ conversion からの制限は $\mu \to e\gamma$ の崩壊分岐比に換算して示した。

明するようなパラメーターとして表 2 より $(y_L)_{ii} = (y_R)_{22} = 0.4$, $M^2_{11} = m^2_{22} = (250\ \mathrm{GeV})^2$, $m_{\chi_i} = 200$ GeV, $m^2_{12} = (50\ \mathrm{GeV})^2$ にそれぞれとった。ただし、湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の $(y_L)_{12}$ と $(y_L)_{32}$ 以外の非対角成分と、湯川行列 $(y_R)_{\alpha i}$ の $(y_R)_{22}$ 以外の成分はゼロと仮定した。また、

この模型における LFV 過程の主要な寄与は、(4.85) 式の dipole 型の演算子から生じるため、文献 [93] で与えられた $\mu \to e\gamma$ と $\mu \to e$ conversion の分岐比の関係

$$\mathrm{Br}(\mu\mathrm{Ti} \to e\mathrm{Ti}) \sim 4.0 \times 10^{-3}\, \mathrm{Br}(\mu \to e\gamma) \quad (4.108)$$

$$\mathrm{Br}(\mu\mathrm{Al} \to e\mathrm{Al}) \sim 2.6 \times 10^{-3}\, \mathrm{Br}(\mu \to e\gamma) \quad (4.109)$$

を用いて、$\mu \to e$ conversion からの制限を $\mu \to e\gamma$ の崩壊分岐比に換算して示した。

図 22 から、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するために新粒子の質量が電弱スケール程度の場合を考えると、特に、湯川行列の $(y_L)_{12}$ と $(y_L)_{22}$ の成分の間に大きなヒエラルキーが必要であり、$\mu \to e\gamma$ の実験が湯川行列 $(y_L)_{\alpha i}$ の混合に対して強い制限を与えることがわかる。しかし、もしこのような模型が正しければ、図 22 に示した将来実験でレプトン・フレーバーの破れが観測される可能性も存在する。

5　結論

この研究においては、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する素粒子模型を考察した。もし指摘されているミューオン g − 2 のアノマリーを新しい素粒子模型によって説明しようとすると、アノマリーの大きさは標準模型の電弱ゲージボソンからの寄与と同じ程度であるため、素朴には電弱スケールに新粒子が存在することが期待される。

この研究ではまず例として、ミューオンが新しい湯川相互作用をもつような模型を２種類解析した。一つの例は、right-handed ミューオンが $\mathrm{SU}(2)_L$ singlet のスカラーおよびフェルミオンと新しい湯川相互作用をもつ模型である。このような模型において、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するだけでなく電弱精密測定からの制限を満たすには、比較的大きい湯川結合もしくは電弱スケール以下の新粒子が必要であることが分かった。

もう一つの例として、ミューオン g − 2 の１ループダイアグラムの内線のフェルミオンでカイラリティー・フリップを起こすことができるような、right-handed と left-handed 両方のミューオンが $\mathrm{SU}(2)_L$ doublet のスカラーおよび singlet のスカラーないしフェルミオンと新しい湯川相互作用をもつ模型を解析した。このような模型ではミューオン g − 2 への寄与は大きくなるため、比較的小さい湯川結合でもミューオン g − 2 のアノマリーを説明することができる。また、このような模型に含まれる新粒子は、電弱精密測定のフィットにとっても好ましいことを示した。

これら２種類の模型は、ミューオン g − 2 のアノマリー以外の問題、例えばニュートリノの質量や混合といった現象も説明できる模型の一部であると考えられるが、この２種類の模型の解析によって、ミューオン g − 2 および電弱精密測定から、新粒子の電荷、新粒子のスケール、ならびに湯川結合の大きさを制限できることが分かった。

このような模型に含まれる電弱スケールの新粒子は、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明することができ、また、電弱精密測定ならびにレプトン・フレーバーの破れに対しても無矛盾になり得るため、LHC での検証可能性を解析することは重要である。ヒッグスに結合する新粒子のいくつかは QED 電荷をもつため、$h \to \gamma\gamma$ の崩壊分岐比に影響を与え得る。したがって、ヒッグスの物理は、本論文で議論した模型に影響を与えると考えられる。さらに、ミューオン g − 2 を動機とする新粒子の直接的な生成断面積を計算し、それらのシグナルイベントの数は無視できず、ミューオン g − 2 のアノマリーを説明する模型を LHC で明らかにできる可能性があることを指摘した。ミューオン g − 2 のアノマリーを説明するのにカラーをもつ粒子は必要ないため、電弱相互作用のみをもつ新粒子の探索が重要になるように思われる。

最後に、２番目に解析したカイラリティー・フリップによるエンハンスメントがある模型の拡張である、輻射補正を通してニュートリノに質量を与える模型を解析した。このような模型はフレーバーの構造を持っており、模型に含まれる電弱スケールの新粒子は、一般的に、レプトン・フレーバーの破れに影響を与える。そしてフレーバーの破れに関する解析を行った結果、フレーバーの破れに対する制限とは無矛盾で、かつ、現実的なニュートリノの質量

行列を再現し、さらにミューオンｇ－２のアノマリーを説明するような模型は存在し得ることを明らかにした。

本研究で行ったアプローチによる解析から、ミューオンｇ－２のアノマリーを説明する上で何が重要かの理解が進み、本研究の解析で得られた経験をもとに標準模型を超える物理が明らかになることを期待したい。

A Passarino-Veltman Reduction

A.1 Passarino-Veltman functions

次元正則化　ループ積分には、次のように 4 次元積分を d 次元積分に置き換える次元正則化の方法を用いる。

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to \mu^{4-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \tag{A.110}$$

ただし次元 d は $d = 4 - 2\epsilon$ とする。ここで μ は結合定数を無次元に保つために導入された、質量次元をもつ任意のパラメーターである。(A.110) 式は、結合定数 g を $g \to g\mu^\epsilon$ に置き換えたことに相当する。

本論文では、Passarino-Veltman functions [66] を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
A(A) &= 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m_A^2 + i\epsilon}, \qquad \text{(A.111)} \\
B_0(A,B;p) &= 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - m_A^2 + i\epsilon]\,[(k+p)^2 - m_B^2 + i\epsilon]}, \\
p^\mu B_1(A,B;p) &= 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{[k^2 - m_A^2 + i\epsilon]\,[(k+p)^2 - m_B^2 + i\epsilon]}, \\
p^\mu p^\nu B_{21}(A,B;p) &+ g^{\mu\nu} B_{22}(A,B;p) \\
&= 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m_A^2 + i\epsilon]\,[(k+p)^2 - m_B^2 + i\epsilon]}, \qquad \text{(A.112)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_0(A,B,C;p_1,p_2) \\
= \;& 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - m_A^2 + i\epsilon][(k+p_1)^2 - m_B^2 + i\epsilon][(k+p_1+p_2)^2 - m_C^2 + i\epsilon]}, \\
& (p_1^\mu C_{11} + p_2^\mu C_{12})\,(A,B,C;p_1,p_2) \\
= \;& 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{[k^2 - m_A^2 + i\epsilon][(k+p_1)^2 - m_B^2 + i\epsilon][(k+p_1+p_2)^2 - m_C^2 + i\epsilon]}, \\
& \{(p_1^\mu p_1^\nu C_{21} + p_2^\mu p_2^\nu C_{22} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) C_{23} + g^{\mu\nu} C_{24}\}\,(A,B,C;p_1,p_2) \\
= \;& 16\pi^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^nk}{i(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m_A^2 + i\epsilon][(k+p_1)^2 - m_B^2 + i\epsilon][(k+p_1+p_2)^2 - m_C^2 + i\epsilon]},
\end{aligned} \tag{A.113}$$

ただし、$4 - 2\epsilon$ 次元で次元正則化を行うものとする。便宜のため、1 点関数と 2 点関数の vector integrals と tensor integrals の係数 $A_0, B_0, B_1, B_{21}, B_{22}$ の、具体的な関数形を明記して

おく。

$$\begin{aligned} A(m^2) &= m^2\left(\frac{1}{\Delta}+1-\log\frac{m^2}{\mu^2}\right), & \text{(A.114)}\\ B_0(A,B;p) &= \frac{1}{\Delta}-\int_0^1 dx\log\frac{m_1^2(1-x)+m_2^2x-p^2x(1-x)-i\epsilon}{\mu^2}, & \text{(A.115)}\\ B_1(A,B;p) &= -\frac{1}{2\Delta}+\int_0^1 dxx\log\frac{m_1^2(1-x)+m_2^2x-p^2x(1-x)-i\epsilon}{\mu^2}, & \text{(A.116)}\\ B_{21}(A,B;p) &= \frac{1}{3\Delta}-\int_0^1 dxx^2\log\frac{m_1^2(1-x)+m_2^2x-p^2x(1-x)-i\epsilon}{\mu^2}, & \text{(A.117)}\\ B_{22}(A,B;p) &= \frac{1}{4}(m_1^2+m_2^2-\frac{p^2}{3})\left(\frac{1}{\Delta}+1\right) \\ &-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left\{m_1^2(1-x)+m_2^2x-p^2x(1-x)\right\}\log\frac{m_1^2(1-x)+m_2^2x-p^2x(1-x)-i\epsilon}{\mu^2}, & \text{(A.118)}\end{aligned}$$

ここで、$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\epsilon}-\gamma+\log 4\pi$ である。ただし、A,B の質量をそれぞれ m_1,m_2 とおいた。また、$B_0(A,B;p)$ と $B_{22}(A,B;p)$ は、A と B の入れ替え、すなわち m_1^2 と m_2^2 の入れ替えに対して対称である。さらに A の質量を m とすると、$B_{22}(0,A,A)=A_0(m^2)/2$ が成り立つ。

A.2 vector and tensor integrals の scalar integrals への分解

vector integrals の係数 (coefficient functions) B_1,C_{11},C_{12}、ならびに tensor integrals の係数 (coefficient functions) $B_{21},C_{21},C_{22},C_{23},C_{24}$ は、scalar integrals A_0,B_0,C_0 の和に分解できる [114]。

２点関数の vector coefficient B_1 と２点関数の tensor coefficient B_{21},B_{22} は

$$\begin{aligned} B_1(A,B;p) &= \frac{1}{2p^2}\left[A_0(m_1^2)-A_0(m_2^2)+(-m_1^2+m_2^2-p^2)B_0(A,B;p)\right], & \text{(A.119)}\\ B_{21}(A,B;p) &= \frac{1}{p^2}\left[-\frac{m_1^2+m_2^2}{2}+\frac{p^2}{6}+A_0(m_2^2)\right.\\ &\left.-m_1^2B_0(A,B,p)+2(-m_1^2+m_2^2-p^2)B_1(A,B;p)\right], & \text{(A.120)}\\ B_{22}(A,B;p) &= \frac{1}{6}\left[m_1^2+m_2^2-\frac{p^2}{3}+A_0(m_2^2)\right.\\ &\left.+2m_1^2B_0(A,B;p)+(m_1^2-m_2^2+p^2)B_1(A,B;p)\right], & \text{(A.121)}\end{aligned}$$

のように scalar integrals に分解できる。ただし、A,B の質量をそれぞれ m_1,m_2 とおいた。

ちなみに oblique corrections の R_Z パラメーターで用いる、B_1,B_{21},B_{22} を p^2 で微分した形

は（ただし B_0, B_1, B_{21}, B_{22} の引数は全て $(A,B;p)$ とする）

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp^2}B_1 &= -\frac{1}{2p^2}\left[B_0 + 2B_1 + (m_1^2 - m_2^2 + p^2)\frac{d}{dp^2}B_0\right], \\
\frac{d}{dp^2}B_{21} &= \frac{1}{3p^2}\left[-3B_{21} + \frac{1}{6} - m_1^2\frac{d}{dp^2}B_0 - 2B_1\right. \\
&\quad \left. + \frac{(m_1^2 - m_2^2 + p^2)}{p^2}\{B_0 + 2B_1 + (m_1^2 - m_2^2 + p^2)\frac{d}{dP^2}B_0\}\right], \\
\frac{d}{dp^2}B_{22} &= \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{3} + 2m_1^2\frac{d}{dp^2}B_0 + B_1\right. \\
&\quad \left. - \frac{(m_1^2 - m_2^2 + p^2)}{2p^2}\{B_0 + 2B_1 + (m_1^2 - m_2^2 + p^2)\frac{d}{dp^2}B_0\}\right],
\end{aligned} \tag{A.122}$$

となる。

3 点関数の vector coefficients C_{11}, C_{12} は（ただし C_0, C_{11}, C_{12} の引数は全て $(A,B,C;p_1,p_2)$ とする）

$$C_{11} = [p_2^2 - (p_1 \cdot p_2)R_2]/\kappa, \tag{A.123}$$

$$C_{12} = [-(p_1 \cdot p_2) + p_1^2 R_2]/\kappa, \tag{A.124}$$

のように scalar integrals に分解できる。ただし A,B,C の質量をそれぞれ m_1, m_2, m_3 とおいた。ここで

$$\kappa = p_1^2 p_2^2 - (p_1 \cdot p_2)^2 \tag{A.125}$$

かつ

$$R_1 = [B_0(A,C;p_3) - B_0(B,C;p_2) - (p_1^2 + m_1^2 - m_2^2)C_0]/2, \tag{A.126}$$

$$R_2 = [B_0(A,B;p_1) - B_0(A,C;p_3) + (p_1^2 - p_3^2 - m_2^2 + m_3^2)C_0]/2, \tag{A.127}$$

である。ただし

$$p_3^2 = (p_1 + p_2)^2 \tag{A.128}$$

とおいた。

3 点関数の tensor coefficients $C_{24}, C_{21}, C_{23}, C_{22}$ は（ただし $C_0, C_{24}, C_{21}, C_{23}, C_{22}$ の引数は全て $(A,B,C;p_1,p_2)$ とする）

$$C_{24} = [B_0(B,C;p_2) + r_1 C_{11} + r_2 C_{12} + 2m_1^2 C_0 + 1]/4, \tag{A.129}$$

$$C_{21} = [p_2^2 R_3 - (p_1 \cdot p_2)R_5]/\kappa, \tag{A.130}$$

$$C_{23} = [-(p_1 \cdot p_2)R_3 + p_1^2 R_5]/\kappa, \tag{A.131}$$

$$C_{22} = [-(p_1 \cdot p_2)R_4 + p_1^2 R_6]/\kappa, \tag{A.132}$$

のように scalar integrals に分解できる。ここで

$$r_1 = p_1^2 + m_1^2 - m_2^2, \quad r_2 = p_3^2 - p_1^2 + m_2^2 - m_3^2 \tag{A.133}$$

かつ

$$\begin{aligned}
R_3 &= -C_{20} - [r_1 C_{11} - B_1(A,C;p_3) - B_0(B,C;p_2)]/2, & \text{(A.134)}\\
R_5 &= -[r_2 C_{11} - B_1(A,B;p_1) + B_1(A,C;p_3)]/2, & \text{(A.135)}\\
R_4 &= -[r_1 C_{12} - B_1(A,C;p_3) + B_1(B,C;p_2)]/2, & \text{(A.136)}\\
R_6 &= -C_{20} - [r_2 C_{12} + B_1(A,C;p_3)]/2, & \text{(A.137)}
\end{aligned}$$

である。A function、B function、C function のより詳しい議論は文献 [114] の p24 以降を参照。4 点関数の D function まで含めた議論は、文献 [69] の Appendix D を参照。なお、本研究では、A function、B function、C function の数値計算に FF (Form Factor) [94] を用いた。

A.3 Loop Integrals and Dimensional Reguralization

3-point functions

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2}{D^3} l^2 &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ 2\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) - 1 \right\} & \text{(A.138)}\\
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2}{D^3} l^\mu l^\nu &= \frac{i}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) & \text{(A.139)}\\
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2}{D^3} &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Delta} & \text{(A.140)}
\end{aligned}$$

where $\quad D = l^2 - \Delta$

2-point functions and 1-point function

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{D^2} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{2}{\epsilon} - 2\gamma + 1 + 2\ln \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) & \text{(A.141)}\\
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^2} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \Delta \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) & \text{(A.142)}\\
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D^2} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) & \text{(A.143)}\\
\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right) & \text{(A.144)}
\end{aligned}$$

where $\quad D = l^2 - \Delta$

n propagators

$$\int \frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l^2-\Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}} \tag{A.145}$$

$$\int \frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{l^2}{(l^2-\Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \tag{A.146}$$

$$\int \frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{l^\mu l^\nu}{(l^2-\Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{g^{\mu\nu}}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \tag{A.147}$$

A.4 Useful Formulae for Feynman Paramter Integrals

Feynman パラメーター積分を計算する際、典型的な積分を公式化しておくと便利である。

解析解

$$\int_0^1 dt\,\frac{1}{t^2+at+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}}\ln\left|\frac{a+2b+\sqrt{a^2-4b}}{a+2b-\sqrt{a^2-4b}}\right| & (a^2-4b>0) \\ \frac{1}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\left(\tan^{-1}\left[\frac{\left(1+\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right]\right) & (a^2-4b<0) \end{cases} \tag{A.148}$$

$$\int_0^1 dt\,\frac{t^2(t-1)}{at+b} = -\frac{1}{6a}+\frac{b}{2a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\left(\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^2}{a^3}\right)\ln\left[1+\frac{a}{b}\right] \tag{A.149}$$

$$\int_0^t dx\,\frac{Ax+1}{Bx+C} = \frac{1}{B}\left\{At+\left(\frac{B-AC}{B}\right)\ln\left[\frac{Bt+C}{C}\right]\right\} \tag{A.150}$$

近似解

$$\begin{aligned}\int_0^1 dt\,\frac{1}{at^2-t+1} &= -[\ln a+2a\ln a+6a^2\ln a+20a^3\ln\alpha+70a^4\ln a \\ &\quad +2a+7a^2+\frac{74}{3}a^3+\frac{533}{6}a^4+\cdots.] \quad \text{for } |a|<1\end{aligned} \tag{A.151}$$

B　ミューオン g − 2 の基礎

この節では、ミューオン g − 2 の解析を行う上で必要となる基礎についてまとめた。

初めに B.1 節で、異常磁気モーメント (anomalous magnetic moment: g-2) の定義を与え、場の量子論を用いた g − 2 の計算法を示す。g − 2 の計算法は多くの場の量子論の教科書に載っており、例えば Peskin [95] では、場の量子論での Born 近似を用いた導出が与えられている。この節では Peskin の教科書に載っている導出とは別に、effetive Lagrangian を使った、より直観的な方法で g − 2 の計算法を導出する。

次に B.2 節では、ミューオン g − 2 の計算の具体例を示した。ゲージ相互作用と湯川相互作用がミューオン g − 2 に寄与する例を考え、ミューオン g − 2 への寄与を求める計算過程を詳しく示した。

最後に B.3 節では、補足として B.2 節で考えた湯川相互作用を例に、g − 2, EDM, cLFV が同時に計算されることを示す。

B.1　異常磁気モーメント (g − 2)

レプトンはスピノル場であるため、「スピン 1/2」で磁気モーメントとしての性質をもつ。レプトンのスピン磁気モーメント $\vec{\mu}$ は

$$\vec{\mu} = g\frac{e}{2m_l}\vec{s} \tag{B.152}$$

で与えられる。ここで m_l はレプトンの質量、e は電荷をそれぞれ表す。スピン磁気モーメントの値は、Bohr 磁子 (Bohr magneton) $e/2m_l$ という磁気モーメントの単位に g 因子 (g-factor) を掛けて定義される。ここでスピン $\vec{s}$ と g 因子 (g-factor) g は、

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \quad g \equiv 2 + 2a \tag{B.153}$$

で与えられる。ただし $\vec{\sigma}$ は Pauli 行列である。相対論的量子力学の Dirac 方程式からは、この g 因子は厳密に $g = 2$ であるが、場の量子論で輻射補正まで含めて計算すると $g \neq 2$ となる。(B.153) 式の a は、この $g = 2$ からのずれを表し「異常磁気モーメント (g − 2)」と呼ばれる。

B.1.1　g − 2 の effective Lagrangian

この節では、異常磁気モーメント (g − 2) の計算方法を導く。くりこみ可能な理論を考えた場合、g − 2 は tree level では存在しない、one loop 以上の演算子から出る物理量である。したがって、g − 2 はくりこみ可能な理論において、独立に調整可能なパラメーターとはな

り得ない[#21]。逆の見方をすれば、g − 2 は輻射補正から計算できる、実験と比較可能な「理論の予言する値」となる。

ここでは、輻射補正から生じる g − 2 の有効 Lagrangian (effective Lagrangian) から議論を進める。結論から述べると、g − 2 は次元 5 の effective Lagrangian $\delta\mathcal{L}_{\rm eff}^{\rm AMM}$

$$\delta\mathcal{L}_{\rm eff}^{\rm AMM} = -\frac{eQ_l}{4m_l}a_l\,\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)F_{\mu\nu}(x) \tag{B.154}$$

で与えられる。ここで a_l はレプトンの g − 2、Q_l はレプトンの QED 電荷、m_l はレプトンの質量、ψ はレプトン、$F^{\mu\nu}$ は $\mathrm{U}(1)_{\rm em}$ の field strength を表す。

初めに、(B.154) 式の非相対論的極限をとると、a_l が g − 2 に対応することを確かめる。(B.154) 式の非相対論的極限を考えた場合、レプトンは古典的な外場 $F_{\mu\nu}^{\rm ext}$ の中を運動する。このとき field strength $F_{\mu\nu}^{\rm ext}$ の空間成分は磁場に対応し、$B^l = \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}F_{ik}^{\rm ext}$ である。一方で、時間成分と空間成分が混ざる部分は電場に対応し、$E_i = F_{0i}^{\rm ext}$ である。

また、(B.154) 式の $\sigma_{\mu\nu}$ の空間成分を Pauli 行列に書き直すと、

$$\begin{aligned}
\sigma^{ik} &= \frac{i}{2}\left(\gamma^i\gamma^k - \gamma^k\gamma^i\right)\\
&= \frac{i}{2}\left\{\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\right\}\\
&= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}[\sigma^i,\sigma^k] & 0\\ 0 & [\sigma^i,\sigma^k]\end{pmatrix} = \epsilon^{ikl}\begin{pmatrix}\sigma^l & 0\\ 0 & \sigma^l\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.155}$$

となる。同様に、時間と空間成分の混ざる部分は

$$\begin{aligned}
\sigma^{0i} &= \frac{i}{2}\left(\gamma^0\gamma^i - \gamma^i\gamma^0\right)\\
&= \frac{i}{2}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}\\
&= i\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.156}$$

となる[#22]。また、(B.154) 式のレプトン $\psi(x)$ の運動量空間の Dirac スピノルは、静止系 ($p =$

[#21] 独立に調整可能なパラメーターとは、tree level の Lagrangian に含まれるフリーパラメーターのことである。

[#22] ただし、Dirac の γ 行列は標準表記 (standard representation) を用いる。標準表記の γ 行列は、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

で表される。一方、よく知られた Peskin [95] では、ヘリシティー表記 (helicity representation) が用いられて

$(m_l, 0))$ の単位スピノル (unit spinors) $\tilde{u}(0, r)$ を用いて、次のように表すことができる[#23]。

$$u(p,r) = \frac{1}{\sqrt{2m_l(m_l+p^0)}}(\not{p}+m_l)\tilde{u}(0,r) \tag{B.157}$$

ここで $\tilde{u}(0, r)$ は

$$\tilde{u}(0,r) = \begin{pmatrix} U(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \; U(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; U(-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。よって (B.157) 式の非相対論的極限をとると、

$$u(p,r) \simeq \tilde{u}(0,r) \tag{B.158}$$

となる。

以上の式を用いると effective Lagrangian (B.154) 式より、レプトン ψ とフォトンの 3 点関数の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ は非相対論的極限で

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -\frac{eQ_l}{4m_l}a_l\bar{u}_2(p_2)\sigma^{\mu\nu}u_1(p_1)F_{\mu\nu} \\ &\simeq -\frac{eQ_l}{4m_l}a_l\begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix}\sigma^{\mu\nu}\begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{eQ_l}{4m_l}a_l\begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix}\sigma^{ik}\begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}F_{ik} \\ &= -\frac{eQ_l}{4m_l}a_l\,\epsilon^{ikl}\begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}F_{ik} \\ &= -\frac{eQ_l}{2m_l}a_l\,U^T(r_2)\boldsymbol{\sigma}U(r_1)\boldsymbol{B} = -\frac{eQ_l}{2m_l}a_l\,(\boldsymbol{\sigma})_{r_2,r_1}\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{B.159}$$

となる。よって非相対論的極限において effective Lagrangian (B.154) 式から effective Hamiltonian

$$-\delta\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{AMM}} \Rightarrow \mathcal{H}_m \simeq \frac{eQ_l a_l}{2m_l}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \tag{B.160}$$

を得る。以上の計算より effective Lagrangian (B.154) 式の a_l は、g − 2 に対応することが示された。

いる。ヘリシティー表記の γ 行列は、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される。

[#23]例えば、Itzykson-Zuber [96] の p56 を参照

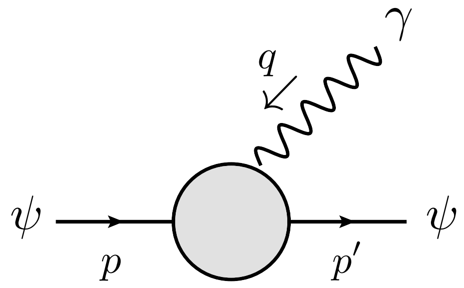


図 23: レプトン ψ の g − 2 に対応する Feynman ダイアグラム。

次に、effective Lagrangian (B.154) 式から 3 点関数の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ を直接計算する。フォトンとレプトン ψ の 3 点 vertex の Feynman 則の決め方は、スカラー QED の時と同様に、以下のようにして行う。図 23 の Feynman ダイアグラムの 3 点 vertex で、フォトンが運動量 q で入射し消されたと考えると、フォトンの field strength $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の微分 $\partial_\mu, \partial_\nu$ はフォトン $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{r=0}^{3}\left(a^r_{\boldsymbol{k}}\epsilon^r_\mu(k)e^{-ik\cdot x} + a^{r\dagger}_{\boldsymbol{k}}\epsilon^{r*}_\mu(k)e^{+ik\cdot x}\right)$$

の消滅演算子 $a^r_{\boldsymbol{k}}$ が係数の波動関数 $e^{-ik\cdot x}$ に作用する。よって、フォトンとレプトン ψ の 3 点 vertex の Feynman 則は、次のように微分 $\partial_\mu, \partial_\nu$ が運動量 q_μ, q_ν に変わる。

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= \sigma^{\mu\nu}(-iq_\mu)A_\nu - (-\sigma^{\nu\mu})(-iq_\nu)A_\mu = -2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu
\end{aligned}$$

したがって、effective Lagrangian (B.154) 式から 3 点関数の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ を求めると

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')\left[a_l(ieQ_l)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_l}\right]u(p)\epsilon_\mu(q) \tag{B.161}$$

となる。

B.1.2 g − 2 の計算法のまとめ

結局、レプトンの g − 2 の計算方法は次のようにまとめられる。

ミューオンとフォトンの 3 点関数

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')(ieQ_l)\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p)\epsilon_\mu(q)$$

の $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m_\mu$ の係数に相当する form factor $F_2(q^2)$

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')\left[(ieQ_l)F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu}\right]u(p)\epsilon_\mu(q)$$

の非相対論的極限 $q^2 \to 0$ をとった物理量 a_l

$$\lim_{q^2\to 0} F_2(q^2) = a_l$$

がレプトンの g − 2 に対応する。

B.2　ミューオン g − 2 計算の具体例

本節では、ミューオン g − 2 の one-loop 計算の過程を詳しく述べる。特に、途中式が書かれた B.2.2 節と B.2.3 節では、意識的に、計算過程を初等的計算まで含めて書き下した。

B.2.1　ミューオン g − 2 の計算で使う公式

Dirac Algebra

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \not{p} &= -\not{p}\gamma^\mu + 2p^\mu \\
\not{p}\gamma^\mu &= -\gamma^\mu\not{p} + 2p^\mu \\
\not{p}\not{p} &= p^2 \\
\not{p}\not{p}' &= -\not{p}'\not{p} + 2p\cdot p' \\
\not{p}'\gamma^\mu\not{p} &= -\not{p}\gamma^\mu\not{p}' + 2p'^\mu\not{p} + 2p^\mu\not{p}' - 2p\cdot p'\gamma^\mu
\end{aligned} \tag{B.162}$$

ただし、$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ である。

Contractions Identities

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= d \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -(d-2)\gamma^n u \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - (4-d)\gamma^\nu\gamma^\rho \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + (4-d)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma
\end{aligned} \tag{B.163}$$

ただし、d は次元正則化を行ったときの次元で $d = 4 - 2\epsilon$ とする。

Gordon Identity

$$\bar{u}(p')(p'^\mu + p^\mu)u(p) = \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p) \tag{B.164}$$

ここで、$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ である。また、m は外線のフェルミオン $u(p)$ の質量である。

一般化された Gordon identity　Gordon identity は (B.164) 式に、$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ を代入して、Dirac algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ より γ 行列を並べ変え、Dirac 方程式を使えば容易に示せる。同様にして、(Charged) lepton flavor violation (cLFV) の計算のような外線のフェルミオンが異なる場合の Gordon identity

$$\bar{u}_i(p')(p^\mu + p'^\mu)u_j(p) = \bar{u}_i(p')[(m_i + m_j)\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u_j(p)$$

を得る。ここで m_i, m_j は、それぞれフェルミオン $u_i(p), u_j(p)$ の質量である。同様にして、γ^5 を含む Gordon identity

$$\bar{u}_i(p')(p^\mu + p'^\mu)\gamma^5 u_j(p) = \bar{u}_i(p')[(m_i - m_j)\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]\gamma^5 u_j(p) \tag{B.165}$$

を得ることができる。ただし実際の cLFV の計算では、外線のフォトン $\epsilon^*_\mu(q)$ [#24]について Ward identity $\epsilon^*_\mu(q)q^\mu = 0$ が成り立つので、(B.165) 式ないし (B.165) 式の左辺は、p^μ あるいは p'^μ のみの形で書ける。さらに、g − 2、EDM、cLFV のように、dipole 型の演算子の係数を $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ もしくは $\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5$ に比例する項から求める場合は、(B.165) 式および (B.165) 式の γ^μ に比例する項は必要ない。したがって、dipole 型の演算子の係数を求める計算では、p^μ, p'^μ に関して次のように置き換えればよい。

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i(p')\,p^\mu\,u_j(p)\epsilon_\mu(q) &\to \bar{u}_i(p')\,\frac{-i}{2}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\,u_j(p)\epsilon_\mu(q) \quad (q^\mu = p'^\mu - p^\mu),\\
\bar{u}_i(p')\,p'^\mu\,u_j(p)\epsilon_\mu(q) &\to \bar{u}_i(p')\,\frac{-i}{2}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\,u_j(p)\epsilon_\mu(q) \quad (q^\mu = p'^\mu - p^\mu),\\
\bar{u}_i(p')\,p^\mu\,u_j(p)\epsilon^*_\mu(q) &\to \bar{u}_i(p')\,\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\,u_j(p)\epsilon^*_\mu(q) \quad (q^\mu = p^\mu - p'^\mu),\\
\bar{u}_i(p')\,p'^\mu\,u_j(p)\epsilon^*_\mu(q) &\to \bar{u}_i(p')\,\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\,u_j(p)\epsilon^*_\mu(q) \quad (q^\mu = p^\mu - p'^\mu).
\end{aligned} \tag{B.166}$$

B.2.2　例１：ゲージ相互作用

この節では、ゲージ相互作用のミューオン g − 2 への寄与の計算過程を示す。ここでは具体例として、「標準模型の Z ボソン」の場合を考える。計算の詳細は文献 [97, 98] で議論されており、ここでは文献 [98] に基づいて計算をレビューする。

[#24] g − 2 の計算では、外線のフォトン $\epsilon_\mu(q)$ の運動量を $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ とする。。一方で、cLFV の計算では、外線のフォトン $\epsilon^*_\mu(q)$ の運動量を $q^\mu = p^\mu - p'^\mu$ とする。

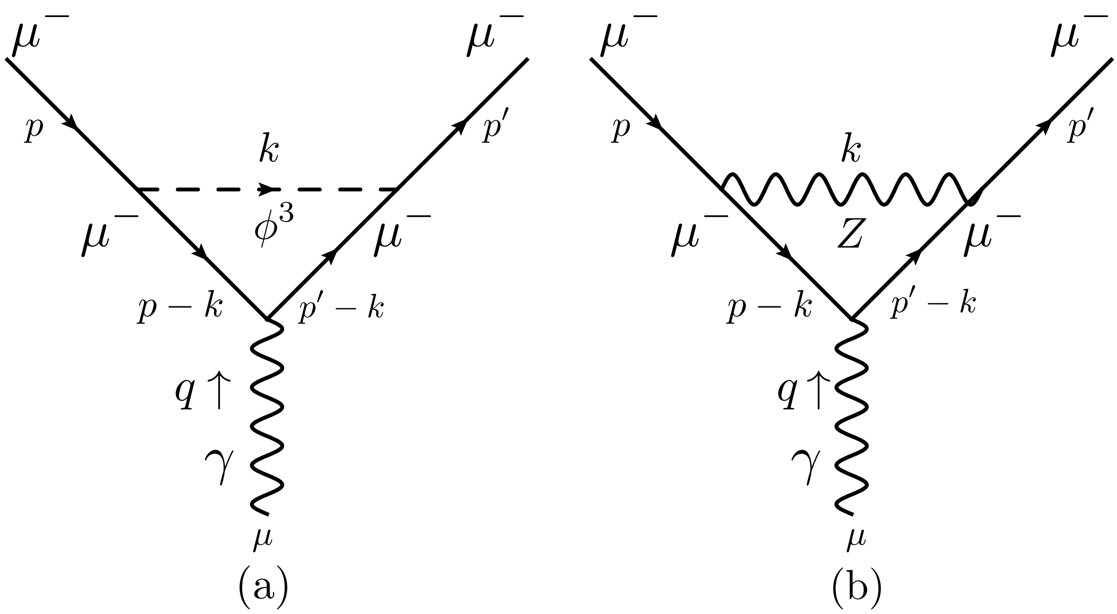


図 24: 標準模型の Z ボソンのミューオン g − 2 への寄与。(a) は Z の Goldstone boson、(b) は Z ボソンからの寄与を表す。

Z の Goldsote boson の寄与　標準模型のミューオンとヒッグス場の湯川相互作用は、

$$\Delta\mathcal{L}_\mu = -\lambda_\mu \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{\mu L} & \bar{\mu}_L \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\left(\phi^1 - i\phi^2\right) \\ v + \left(h + i\phi^3\right) \end{pmatrix} \mu_R + \text{h.c.} \tag{B.167}$$

で与えられる。ここで λ_μ はミューオンとヒッグスの湯川結合定数、ν_μ はミューオンニュートリノ、μ はミューオン、$-i\left(\phi^1 - i\phi^2\right) = \phi^+$ は W^+ の Goldstone boson、ϕ^3 は Z の Goldstone boson、h は標準模型のヒッグス場、v は真空期待値を表す。(B.167) 式から、ミューオン μ と Z の Goldstone boson ϕ^3 との相互作用 Lagrangian $\mathcal{L}$ は、

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\lambda_\mu \bar{\mu}\phi^3\gamma^5\mu = \frac{-igm_\mu}{2M_Z c_W}\bar{\mu}\phi^3\gamma^5\mu \tag{B.168}$$

と求められる。ここで、$m_\mu = \lambda_\mu \frac{v}{\sqrt{2}}$ はミューオンの質量、$M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}\frac{v}{2} = \frac{gv}{2c_W}$ は Z ボソンの質量、c_W は weak mixing angle、g は $\mathrm{SU}(2)_L$ のゲージ結合定数、g' は U(1) のゲージ結合定数をそれぞれ表す。したがって Z の Goldstone boson が寄与する、ミューオン g − 2 に関わる散乱振幅 $i\mathcal{M}$ は、

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)\epsilon_\mu(q) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\left(\frac{gm_\mu}{2M_Z c_W}\right)\gamma^5 \frac{i\left(\not{p}' - \not{k} + m_\mu\right)}{\left(p'-k\right)^2 - {m_\mu}^2}(iQ_\mu e\gamma^\mu)\frac{i\left(\not{p} - \not{k} + m_\mu\right)}{\left(p-k\right)^2 - m_\mu^2} \\ &\quad \times \left(\frac{gm_\mu}{2M_Z c_W}\right)\gamma^5 u(p)\epsilon_\mu(q)\left(\frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2}\right) \times \frac{1}{-ie} \end{aligned} \tag{B.169}$$

となる。ここで $Q_\mu=-1$ はミューオンの QED 電荷、$\delta\Gamma^\mu$ はミューオンとフォトンの vertex に対する 1 ループの寄与を表す。ただし、g − 2 (異常磁気モーメント) は $(-ie)\delta\Gamma^\mu(p',p)$ のように、$(-ie)$ の因子をくくり出した vertex で定義されているので、(B.169) 式の最後で $1/(-ie)$ を掛けている。また、Z の Goldstone boson のプロパゲーターは R_ξ ゲージで計算を行うことにする。ここで ξ は、R_ξ ゲージの ξ パラメーターである。また、$q^\mu=p'^\mu-p^\mu$ である。まず、(B.169) 式のプロパゲーターの分母を Feynman パラメーター積分で書き直すことから始める。

$$
\begin{aligned}
(\text{Denominator}) &= \frac{1}{(p'-k)^2-m_\mu^2}\cdot\frac{1}{(p-k)^2-m_\mu^2}\cdot\frac{1}{k^2-\xi M_Z^2} \\
&= \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{(3-1)!}{D^3} \qquad \text{(B.170)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= x[(p'-k)^2-m_\mu^2]+y[(p-k)^2-m_\mu^2]+z[k^2-\xi M_Z^2] \\
&= \{k-(xp'+yp)\}^2-(xp'+yp)^2-z\xi M_Z^2 \qquad \text{(B.171)}
\end{aligned}
$$

ただし (B.171) 式を整理するとき、$\delta(x+y+z-1)$ より $x+y+z=1$ を用いた。次に運動量積分の変数を $k-(xp'+yp)=l$ に変え、(B.169) 式の Dirac 行列を含む分子から $(p^\mu+p'^\mu)$ に比例する項のみを取り出す。なぜなら、$(p^\mu+p'^\mu)$ に比例する項は、Gordon identity (B.164) 式より、$\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ に比例する項、すなわち g − 2 (異常磁気モーメント) の項だからである。(B.169) 式の分子は、

$$
\begin{aligned}
(\text{Numerator}) &= \bar{u}(p')\gamma^5(\not{p}'-\not{k}+m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}+m_\mu)\gamma^5u(p) \\
&= \bar{u}(p')\gamma^5[\not{l}\gamma^\mu\not{l}+\{-y\not{p}+(1-x)\not{p}'+m_\mu\}\gamma^\mu\{(1-y)\not{p}-x\not{p}'+m_\mu\}]\gamma^5u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')\gamma^5[-y(1-y)2p^\mu\not{p}'+xy(2p^\mu\not{p}+2p'^\mu\not{p}) \\
&\quad -ym_\mu 2p^\mu-x(1-x)p'^\mu\not{p}'-xm_\mu 2p'^\mu]\gamma^5u(p) \\
&= \bar{u}(p')\gamma^5[\{2y(1-y)m_\mu-2xym_\mu-2ym_\mu\}p^\mu \\
&\quad +\{2x(1-x)m_\mu-2xym_\mu-2xm_\mu\}p'^\mu]\gamma^5u(p) \\
&= \bar{u}(p')[\{y(1-y)m_\mu+x(1-x)m_\mu-2xym_\mu-ym_\mu-xm_\mu\}p^\mu \\
&\quad +\{x(1-x)m_\mu+y(1-y)m_\mu-2xym_\mu-xm_\mu-ym_\mu\}p'^\mu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[(p^\mu+p'^\mu)\{-m(x+y)^2\}]u(p) \qquad \text{(B.172)}
\end{aligned}
$$

となる。2 行目で、l の奇数次が対称積分で消えることを使った。3 行目で、(B.162) 式を用いて Dirac 方程式 $\not{p}u(p)=m_\mu u(p)$、$\bar{u}(p')\not{p}'=m_\mu\bar{u}(p')$ が使えるように、$\not{p}$ を $u(p)$ 側に、$\not{p}'$ を $\bar{u}(p')$ 側に移し、p^μ と p'^μ に比例する項だけ取り出した。4 行目で、Dirac 方程式を用いて $\not{p},\not{p}'$ を m_μ に書き直した。5 行目で、(B.171) 式の分母、$D=l^2-(x^2m_\mu^2+y^2m_\mu^2+2xyp\cdot p')-z\xi M_Z^2$ がパラメーター x と y の入れ替えに対し対称であることから、分子のパラメーター x,y を対称に書き直した[#25]。また $(\gamma^5)^2=1$ を使った。

[#25] Feynman パラメーターを対称に直す操作については、後述の、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第二項に比例する部分の計算で再度コメントする。

以上の結果を用いて、(B.169) 式の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ を書き直すと、

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &\supset -i\left(\frac{gm_\mu}{2M_Z c_W}\right)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int dxdydz\delta(x+y+z-1) \\
&\quad \times \frac{2}{D^3}\bar{u}(p')(p^\mu + p'^\mu)\{-m_\mu(x+y)^2\}u(p)\epsilon_\mu(q) \\
&\supset -4im_\mu^2\left(\frac{gm_\mu}{2M_Z c_W}\right)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int dxdydz\delta(x+y+z-1) \\
&\quad \times (x+y)^2\bar{u}(p')\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu}\right)u(p)\epsilon_\mu(q)\frac{1}{D^3}
\end{aligned}
\tag{B.173}
$$

となる。２行目で、Gordon identity (B.164) 式を使い、$\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ に比例する項のみ取り出した。

運動量積分は Appendix A.3 節の (A.140) 式を用いて計算できる。運動量積分を計算すると、

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &\supset -4im_\mu^2\left(\frac{gm_\mu}{2M_Z c_W}\right)^2 \frac{-i}{2(4\pi)^2} \int dxdydz\delta(x+y+z-1) \\
&\quad \times (x+y)^2\bar{u}(p')\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu}\right)u(p)\epsilon_\mu(q)\frac{1}{(xp'+yp)^2 + z\xi M_Z^2}
\end{aligned}
\tag{B.174}
$$

ここで $q^2 = (p'-p)^2 = 2m_\mu^2 - q^2$ であるから (B.174) 式の分母 $(xp'+yp)^2$ は、$(xp'+yp)^2 = m_\mu^2(x+y) - xyq^2$ となる。B.1.2 で述べたように、g − 2 (異常磁気モーメント) の値は「散乱振幅 $i\mathcal{M} = \bar{u}(p')(-ie)\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)\epsilon_\mu(q)$ の $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m_\mu$ に比例する項の係数 $F_2(q^2)$ の $q^2 \to 0$ の極限をとった値」である。したがって、(B.174) 式より Z の Goldstone boson のミューオン g − 2 への寄与 a_μ^{ZG} は、

$$
\begin{aligned}
a_\mu^{ZG} &= \lim_{q^2\to 0}\left(\frac{-g^2 m_\mu^4}{32\pi^2 M_Z^2 c_W^2}\right)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{(x+y)^2}{m_\mu^2(x+y) - xyq^2 + (1-x-y)\xi M_Z^2} \\
&= \frac{-g^2 m_\mu^4}{32\pi^2 M_Z^2 c_W^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{(x+y)^2}{m_\mu^2(x+y) + (1-x-y)\xi M_Z^2}
\end{aligned}
\tag{B.175}
$$

となる。ここでは (B.175) 式の Feynman パラメーター積分を、Feynman-'t Hooft gauge $\xi = 1$ で求めることにする。ここで Feynman パラメーター積分の変数 x, y を、次のように変数変換する。

$$
t = x + y, \qquad z = \frac{x-y}{t} \tag{B.176}
$$

ここで変数変換の Jacobian は $|-t/2|$ で、t, z の積分区間は $t : 0 \to 1, z : -1 \to 1$ である。したがって (B.175) 式より a_μ^{ZG} は、

$$
\begin{aligned}
a_\mu^{ZG} &= \frac{-g^2 m_\mu^4}{32\pi^2 M_Z^2 c_W^2}\int_0^1 dt \int_{-1}^1 dz|(-t/2)|\frac{t^2}{m_\mu^2 t^2 + (1-t)M_Z^2} \\
&= \frac{-g^2}{32\pi^2 c_W^2}\left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right)^2 \int_0^1 dt \frac{t^3}{(m_\mu^2/M_Z^2)t^2 - t + 1}
\end{aligned}
\tag{B.177}
$$

と表すことができる。ただし積分が無次元量になるように M_Z^2 を括りだした。

(B.177) 式の Feynman パラメーター t の積分は、被積分関数が「分子の t の次数 $<$ 分母の t の次数」になるように割って積分すれば解析解を求めることができる[#26]。さらに $m_\mu^2/M_Z^2 \ll 1$ であることより、得られた解析解を m_μ^2/M_Z^2 で展開すると、a_μ^{ZG} は $a_\mu^{ZG} \propto (g^2+g'^2)m_\mu^2/M_Z^2$ のように比例することがわかる。Appendix A.4 節で与えた Feynman パラメーター積分の近似解 (A.151) 式を用いると、最終的な Z の Goldstone boson のミューオン g − 2 への寄与 a_μ^{ZG}

$$a_\mu^{ZG} \simeq \frac{g^2}{32\pi c_W^2}\left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right)^2\left(\ln\left[\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right]+\frac{11}{6}\right) \tag{B.178}$$

が求まる。

Z ボソンの寄与　次に Z ボソンのミューオン g − 2 への寄与を考える。標準模型のミューオンと Z ボソンの相互作用は、

$$\Delta\mathcal{L}_\mu = \frac{g}{c_W}\left[\bar{\mu}_L\gamma^\mu\left(-\frac{1}{2}+s_w^2\right)\mu_L+\bar{\mu}_R\gamma^\mu\left(s_w^2\right)\mu_R\right]Z_\mu \tag{B.179}$$

で与えられる。ここで c_W, s_W は weak mixing angle、Z_μ は Z ボソンである。したがって Z ボソンが寄与する、ミューオン g − 2 に関わる散乱振幅 $i\mathcal{M}$ は、

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)\epsilon_\mu(q)\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\,i\frac{g}{c_W}\gamma^\nu\left[\left(-\frac{1}{2}+s_W^2\right)P_L+s_W^2P_R\right]\frac{i\left(\not{p}'-\not{k}+m_\mu\right)}{\left(p'-k\right)^2-m_\mu^2}\left(-ie\gamma^\mu\right)\\
&\quad\times\frac{i\left(\not{p}-\not{k}+m_\mu\right)}{\left(p-k\right)^2-m_\mu^2}\,i\frac{g}{c_w}\gamma^\rho\left[\left(-\frac{1}{2}+s_W^2\right)P_L+s_W^2P_R\right]u(p)\epsilon_\mu(q)\\
&\quad\times\frac{-i}{k^2-M_Z^2}\left[g_{\nu\rho}-\frac{k_\nu k_\rho}{k^2-\xi M_Z^2}\left(1-\xi\right)\right]\times\frac{1}{-ie}
\end{aligned} \tag{B.180}$$

ここで、ξ は Z の Goldstone boson の場合と同様に、R_ξ ゲージの ξ パラメーターである。P_L, P_R は projection operator で、$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2},\quad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$ である。また簡単のため、projection operator の係数は a, b を使って $a = -\frac{1}{2}+s_W^2,\quad b = s_W^2$ と書くことにする。次に (B.180) 式の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ で、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第一項に比例する部分と、第二項に比例する部分に分けて計算する。

第一項に比例する部分は、

$$\begin{aligned}
(\text{First term}) &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2\bar{u}(p')\gamma^\nu\left(aP_L+bP_R\right)\frac{i\left(\not{p}'-\not{k}+m_\mu\right)}{\left(p'-k\right)^2-m_\mu^2}\\
&\quad\times\gamma^\mu\frac{i\left(\not{p}-\not{k}+m_\mu\right)}{\left(p-k\right)^2-m_\mu^2}\gamma^\rho\left(aP_L+bP_R\right)u(p)\epsilon_\mu(q)\frac{-ig_{\nu\rho}}{k^2-M_Z^2}
\end{aligned} \tag{B.181}$$

[#26] 単純に割っても良いし、被積分関数の分母=T と置いて置換積分しても良い。その後、例えば A.4 節で与えた Feynman パラメーター積分 (A.150) 式を計算する。

(B.181) 式は、Z の Goldstone boson の場合の計算における、(B.170) 式と (B.171) 式と同様、Feynman parameter 積分に書き直すと、

$$\begin{aligned}
(\text{First term}) &= i\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \\
&\quad \times \bar{u}(p')\gamma^\nu (aP_L + bP_R)\{-\not{l} - y\not{p} + (1-x)\not{p}' + m_\mu\}\gamma^\mu \\
&\quad \times \{-\not{l} + (1-y)\not{p} - x\not{p}' + m_\mu\}\gamma^\rho (aP_L + bP_R)u(p)\epsilon_\mu(q) g_{\nu\rho} \\
&= i\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \\
&\quad \times \bar{u}(p')(aP_R + bP_L)\gamma^\nu \\
&\quad \times [\not{l}\gamma^\mu\not{l} - y(1-y)\not{p}\gamma^\mu\not{p} + xy\not{p}\gamma^\mu\not{p}' - ym_\mu\not{p}\gamma^\mu + (1-x)(1-y)\not{p}'\gamma^\mu\not{p} \\
&\quad -x(1-x)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' + (1-x)m_\mu\not{p}'\gamma^\mu + (1-y)m_\mu\gamma^\mu\not{p} - xm_\mu\gamma^\mu\not{p}' + m_\mu^2\gamma^\mu] \\
&\quad \times \gamma_\nu (aP_L + bP_R)u(p)\epsilon_\mu(q) \qquad \text{(B.182)}
\end{aligned}$$

ただし、D は (B.171) 式と同様 $D = l^2 - \Delta$ で、l, Δ は、

$$l = k - (xp' + yp), \quad \Delta = (xp' + yp)^2 + zM_Z^2$$

である。次に (B.182) 式の $\gamma^\nu[\quad]\gamma_\nu$ の部分を γ 行列の contraction identities (B.163) 式を用いて、γ^ν と γ_ν に関して縮約をとる。また、積分に発散はないので $d = 4$ として計算する。すると (B.182) 式の $\gamma^\nu[\quad]\gamma_\nu$ の部分は、

$$\begin{aligned}
\gamma^\nu[\quad]\gamma_\nu &= [-2\not{l}\gamma^\mu\not{l} + 2y(1-y)\not{p}\gamma^\mu\not{p} - 2xy\not{p}'\gamma^\mu\not{p} - 4ym_\mu p^\mu - 2(1-x)(1-y)\not{p}\gamma^\mu\not{p}' \\
&\quad +2x(1-x)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' + 4(1-x)m_\mu p'^\mu + 4(1-y)m_\mu p^\mu - 4xm_\mu p'^\mu - 2m_\mu^2\gamma^\mu]
\end{aligned}$$

となる。したがって (B.182) 式の分子は、

$$
\begin{aligned}
(\text{Numerator}) &= \bar{u}(p')(aP_R+bP_L)\gamma^\nu[\quad]\gamma_\nu(aP_L+bP_R)u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')(aP_R+bP_L)[4y(1-y)p^\mu \not{p} - 4ym_\mu p^\mu - 4(1-x)(1-y)p^\mu \not{p} \\
&\quad -4(1-x)(1-y)p'^\mu \not{p} + 4x(1-x)p'^\mu \not{p}' + 4(1-x)m_\mu p'^\mu \\
&\quad +4(1-y)m_\mu p^\mu - 4xm_\mu p'^\mu](aP_L+bP_R)u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')[(a^2P_R+b^2P_L)4y(1-y)m_\mu p^\mu + ab(-4ym_\mu p^\mu) \\
&\quad -(a^2P_R+b^2P_L)4(1-x)(1-y)m_\mu p^\mu - (a^2P_L+b^2P_R)4(1-x)(1-y)m_\mu p'^\mu \\
&\quad +(a^2P_L+b^2P_R)4x(1-x)m_\mu p'^\mu + ab4(1-x)m_\mu p'^\mu \\
&\quad +ab4(1-y)m_\mu p^\mu - ab4xm_\mu p'^\mu]u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')\left[p^\mu\left\{(a^2P_R+b^2P_L)\left(2x\left(1-x\right)+2y\left(1-y\right)\right)m_\mu\right.\right. \\
&\quad -(a^2P_R+b^2P_L)4(1-x)(1-y)m_\mu - 2abxm_\mu - 2abym_\mu \\
&\quad +2ab(1-x)m_\mu + 2ab(1-y)m_\mu\} \\
&\quad +p'^\mu\left\{(a^2P_L+b^2P_R)\left(2x\left(1-x\right)+2y\left(1-y\right)\right)m_\mu\right. \\
&\quad -(a^2P_L+b^2P_R)4(1-x)(1-y)m_\mu - 2abxm_\mu - 2abym_\mu \\
&\quad \left.\left. +2ab(1-x)m_\mu + 2ab(1-y)m_\mu\right\}\right]u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')m_\mu(p^\mu+p'^\mu)\left[(a^2+b^2)(-x-y+2)(x+y-1)+4ab(-x-y+1)\right]u(p)
\end{aligned}
\tag{B.183}
$$

となる。２行目で (B.162) 式を使い、Dirac 方程式が使えるように $\not{p}$ を $u(p)$ 側に、$\not{p}'$ を $\bar{u}(p')$ 側に移し、また p^μ, p'^μ に比例する項だけ抜き出した。３行目で Dirac 方程式を用いた。４行目で Feynman パラメーター x, y を、x と y に関して対称になるように書き直した。５行目で、g − 2 に関する項のみを求めることより、projection operator の γ^5 に比例しない項のみ抜きだした[#27]。

以上の計算より、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第一項に比例する部分 (B.182)

[#27]ただし、一般的に EDM (electric dipole moment) の計算に転用できるので、γ^5 を残して計算するほうが合理的である。

式は (B.183) 式より、

$$
\begin{aligned}
\text{(First term)} &= i\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \\
&\quad \times \bar{u}(p')m_\mu(p^\mu + p'^\mu)\left[(a^2+b^2)(-x-y+2)(x+y-1)+4ab(-x-y+1)\right] \\
&\quad \times u(p)\epsilon_\mu(q) \\
&\supset \left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \frac{2m_\mu^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(a^2+b^2)(x+y-1)(x+y-2)+4ab(x+y-1)}{m_\mu^2(x+y)^2 - xyq^2 + (1-x-y)M_Z^2} \\
&\quad \times \bar{u}(p')\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu}\right)u(p)\epsilon_\mu(q) \qquad \text{(B.184)}
\end{aligned}
$$

ただし、２行目で Gordon identity (B.164) 式を使い、$\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ に比例する項のみを取り出し、(A.140) 式より運動量積分を計算した。以上から、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第一項からのミューオン g − 2 への寄与 $a_\mu^{Z,1}$ は、

$$
\begin{aligned}
a_\mu^{Z,1} &= \lim_{q^2\to 0}\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \frac{2m_\mu^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(a^2+b^2)(x+y-1)(x+y-2)+4ab(x+y-1)}{m_\mu^2(x+y)^2 - xyq^2 + (1-x-y)M_Z^2} \\
&= \left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \frac{2m_\mu^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(a^2+b^2)(x+y-1)(x+y-2)+4ab(x+y-1)}{m_\mu^2(x+y)^2 + (1-x-y)M_Z^2} \\
&\qquad \text{(B.185)}
\end{aligned}
$$

と求まる。ただし、$a = -\frac{1}{2} + s_W^2, \quad b = s_W^2$ である。

続いて (B.180) 式の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ で、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第二項に比例する部分を計算する。第二項に比例する部分は、

$$
\begin{aligned}
\text{(Second term)} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \bar{u}(p')\gamma^\nu\left(aP_L + bP_R\right)\frac{i\left(\not{p}' - \not{k} + m_\mu\right)}{\left(p'-k\right)^2 - m_\mu^2} \\
&\quad \times \gamma^\mu \frac{i\left(\not{p} - \not{k} + m_\mu\right)}{\left(p-k\right)^2 - m_\mu^2}\gamma^\rho\left(aP_L + bP_R\right)u(p)\epsilon_\mu(q) \\
&\quad \times \frac{-i}{k^2 - M_Z^2}\left\{-\frac{k_\nu k_\rho}{k^2 - \xi M_Z^2}(1-\xi)\right\} \\
&= \frac{i}{M_Z^2}\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\not{k}\left(aP_L + bP_R\right)\frac{i\left(\not{p}' - \not{k} + m_\mu\right)}{\left(p'-k\right)^2 - m_\mu^2} \\
&\quad \times \gamma^\mu \frac{i\left(\not{p} - \not{k} + m_\mu\right)}{\left(p-k\right)^2 - m_\mu^2}\not{k}\left(aP_L + bP_R\right)u(p)\epsilon_\mu(q) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{k^2 - M_Z^2} - \frac{1}{k^2 - \xi M_Z^2}\right) \qquad \text{(B.186)}
\end{aligned}
$$

である。ただし２行目で、

$$\frac{1}{k^2-M_Z^2}\times\frac{1}{k^2-\xi M_Z^2}=\left(\frac{1}{k^2-M_Z^2}-\frac{1}{k^2-\xi M_Z^2}\right)\frac{1}{M_Z^2(1-\xi)}$$

を用いた。

(B.186) 式は、これまでの計算と同様、(B.170) 式と (B.171) 式のように Feynman parameter 積分に書き直す。よって、(B.170) 式および (B.171) 式の l と D は、(B.186) 式の場合も同様に、$k=l+xp'+yp,\quad D=l^2-m_\mu^2(x+y)+xyq^2-z\xi M_Z^2$ となる。次に (B.186) 式の分子を計算する。(B.186) 式の分子 N (=Numerator) は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \bar{u}(p')\not{k}(aP_L+bP_R)(\not{p}'-\not{k}+m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}+m_\mu)\not{k}(aP_L+bP_R)u(p)\\
&= \bar{u}(p')(aP_R+bP_L)\times[l^4\gamma^\mu-l^2\gamma^\mu\{(1-y)\not{p}-x\not{p}'+m_\mu\}(y\not{p}+x\not{p}')\\
&\quad -\not{l}\{-y\not{p}+(1-x)\not{p}'+m_\mu\}\gamma^\mu\not{l}(y\not{p}+x\not{p}')\\
&\quad +\not{l}\{-y\not{p}+(1-x)\not{p}'+m_\mu\}\gamma^\mu\{(1-y)\not{p}-x\not{p}'+m_\mu\}\not{l}\\
&\quad +(y\not{p}+x\not{p}')\not{l}\gamma^\mu\not{l}(y\not{p}+x\not{p}')-(y\not{p}+x\not{p}')\not{l}\gamma^\mu\{(1-y)\not{p}-x\not{p}'+m_\mu\}\not{l}\\
&\quad -(y\not{p}+x\not{p}')\{-y\not{p}+(1-x)\not{p}'+m_\mu\}\gamma^\mu l^2\\
&\quad +(y\not{p}+x\not{p}')\{-y\not{p}+(1-x)\not{p}'+m_\mu\}\gamma^\mu\{(1-y)p-x\not{p}'+m_\mu\}(y\not{p}+x\not{p}')]\\
&\quad \times(aP_L+bP_R)u(p)
\end{aligned}\tag{B.187}$$

となる。ただし２行目で l の奇数次の項を落とした。(B.187) 式中の第２項から第８項は、これまでの計算アルゴリズムに従って、全く同様に $(p^\mu+p'^\mu)$ に比例する項を抜き出せる。計算のポイントをまとめると、以下の３点になる。

1. 初めに、(B.162) 式と (B.163) 式を使って γ 行列を整理し、Dirac 方程式を用いる
2. 次に、p^μ, p'^μ に比例する項（γ^5 は含まない）のみ抜き出す
3. 最後に、Feynman パラーメーター x, y を対称に書き直し[#28]、$(p^\mu+p'^\mu)$ に比例する形に整理する

[#28] 分母は $D=l^2-m_\mu^2(x+y)+xyq^2-z\xi M_Z^2$ の形なので、x と y の入れ替えに関して対称である。x, y を対称に書き直すには、x と y を入れ替えた項を足して平均すればよい。例えば、$xy^2+2x^2y\ \to\ \frac{1}{2}\left(xy^2+2x^2y+yx^2+2y^2x\right)=\frac{3}{2}\left(x^2y+y^2x\right)$ のように書き直すことができる。

例えば (B.187) 式の第５項 N_5 は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}_5 &= \bar{u}(p')(aP_R+bP_L)(y\not{p}+x\not{p}')\not{l}\gamma^\mu\not{l}(y\not{p}+\not{p}')(aP_L+bP_R)u(p) \\
&= \bar{u}(p')(aP_R+bP_L)l_\nu l_\rho(y\not{p}+x\not{p}')\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho(y\not{p}+\not{p}')(aP_L+bP_R)u(p) \\
&\to \bar{u}(p')(aP_R+bP_L)\frac{1}{d}l^2 g_{\nu\rho}(y\not{p}+x\not{p}')\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho(y\not{p}+\not{p}')(aP_L+bP_R)u(p) \\
&= \bar{u}(p')\frac{l^2}{d}(aP_R+bP_L)(y\not{p}+x\not{p}')\{-(d-2)\gamma^\mu\}(y\not{p}+\not{p}')(aP_L+bP_R)u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')\left(\frac{l^2}{d}\right)m_\mu\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)(d-2)(a^2+b^2)-xy(d-2)(a^2+b^2)\right](p^\mu+p'^\mu)u(p)
\end{aligned}
\tag{B.188}
$$

となる。３行目では、運動量 $l^\mu l^\nu \to \frac{1}{d}l^2 g^{\mu\nu}$ の置き換えを行った。ここで、d は運動量積分の次元で、$d=4-2\epsilon$ とする。４行目では、γ 行列の contraction identities (B.163) 式を用いた。ただし積分に発散があるため、$d=4-2\epsilon$ として計算する。５行目では、(B.162) 式より Dirac 方程式を使い、それから p^μ, p'^μ に比例する項を抜き出した後、Feynman パラメーター x, y を対称に直して $(p^\mu+p'^\mu)$ でまとめた。

残りの６つの項も全く同様に代数計算を実行すると、最終的に (B.187) 式の分子 N は、

$$
N \supset \bar{u}(p')(a-b)^2\left[\left(\frac{l^2}{d}\right)m_\mu\left\{\frac{d}{2}(x+y)+(x+y)-2\right\}+\frac{m_\mu^3}{2}(x+y)^3\right](p^\mu+p'^\mu)u(p)
\tag{B.189}
$$

の形にまとめられる。

したがって、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第二項に比例する部分 (B.186) 式は、

$$
\begin{aligned}
(\text{Second term}) \supset\ & \frac{i}{M_Z^2}\left(\frac{ig}{c_W}\right)^2\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\int dxdydz\delta(x+y+z-1) \\
&\times(i)^2\bar{u}(p')(a-b)^2\left[\left(\frac{l^2}{d}\right)m_\mu\left\{\frac{d}{2}(x+y)+(x+y)-2\right\}+\frac{m_\mu^3}{2}(x+y)^3\right] \\
&\times(p^\mu+p'^\mu)u(p)\epsilon_\mu(q)\left[\frac{2}{(l^2-\Delta)^3}-\frac{2}{(l^2-\Delta')^3}\right]
\end{aligned}
\tag{B.190}
$$

となる。ただし $\Delta = m_\mu^2(x+y)^2+zM_Z^2,\quad \Delta' = m_\mu^2(x+y)^2+z\xi M_Z^2$ である。ここで、(B.190) 式の l^2 に比例する項の積分 I_{l^2} は、次元正則化の d 次元積分

$$
\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{l^2}{(l^2-\Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1}
\tag{B.191}
$$

ならびに展開式

$$
\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon),\quad a^\epsilon = 1+\epsilon\ln a+\cdots
\tag{B.192}
$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
I_{l^2} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{2m_\mu l^2}{(l^2-\Delta)^3} \left(\frac{1}{d}\right) \left\{\frac{d}{2}(x+y)+(x+y)-2\right\} - (\Delta \leftrightarrow \Delta') \\
&= \frac{im_\mu}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \{3(x+y)-2\} \ln \frac{\Delta'}{\Delta}
\end{aligned} \tag{B.193}$$

また l に比例しない項の積分も、(A.140) 式を用いると直ちに求まる。

以上の計算より、(B.190) 式に Gordon identity (B.164) 式を用いると、$i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m_\nu$ の係数から、R_ξ ゲージの Z ボソンのプロパゲーターの第二項からのミューオン g − 2 への寄与 $a_\mu^{Z,2}$ は、

$$\begin{aligned}
a_\mu^{Z,2} &= \frac{g^2 m_\mu^2}{64\pi^2 M_Z^2 c_W^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\{3(x+y)-2\} \ln \left[\frac{m_\mu^2 (x+y)^2 + (1-x-y)\xi M_Z^2}{m_\mu^2 (x+y)^2 + (1-x-y) M_Z^2} \right] \right. \\
&\left. -m_\mu^2 (x+y)^3 \left(\frac{1}{m_\mu^2 (x+y)^2 + (1-x-y) M_Z^2} - \frac{1}{m_\mu^2 (x+y)^2 + (1-x-y)\xi M_Z^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.194}$$

と求められる。

以上の計算から、Z ボソンのミューオン g − 2 への寄与 $a_\mu^Z = a_\mu^{Z,1} + a_\mu^{Z,2}$ は、(B.185) 式と (B.194) 式より、

$$\begin{aligned}
a_\mu^Z &= \left(\frac{ig}{c_W}\right)^2 \frac{2m_\mu^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dt \frac{(a^2+b^2)t(t-1)(t-2) + 4abt(t-1)}{m_\mu^2 t^2 + (1-t) M_Z^2} \\
&\quad + \frac{g^2 m_\mu^2}{64\pi^2 M_Z^2 c_W^2} \int_0^1 dt \left[t\,(3t-2) \ln \left[\frac{m_\mu^2 t^2 + (1-t)\xi M_Z^2}{m_\mu^2 t^2 + (1-t) M_Z^2} \right] \right. \\
&\quad \left. -m_\mu^2 t^4 \left(\frac{1}{m_\mu^2 t^2 + (1-t) M_Z^2} - \frac{1}{m_\mu^2 t^2 + (1-t)\xi M_Z^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.195}$$

と求められる。ただし Feynman パラメーター x, y は、(B.176) 式より t に変数変換した。ここで、(B.195) 式の Feynman パラメーター積分を、Feynman-'t Hooft gauge $\xi = 1$ で求めることにする。この場合、(B.195) 式の a_μ^Z の第二項はゼロになる。もちろん、(B.180) 式の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ でプロパゲーターがゼロになることから自明である。(B.195) 式の Feynman パラメーター t の積分は、Z の Goldstone boson の場合と同様に計算できる。$m_\mu^2/M_Z^2 \ll 1$ として、Feynman パラメーター積分の近似解 (A.151) 式を用いると、最終的な Z ボソンのミューオン g − 2 への寄与 a_μ^Z の表式

$$\begin{aligned}
a_\mu^Z &\simeq -\left(\frac{g}{c_W}\right)^2 \frac{a^2+b^2}{8\pi^2} \left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right) \left\{ \frac{2}{3} + \left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right) \ln \left[\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right] \right\} \\
&\quad -\left(\frac{g}{c_W}\right)^2 \frac{ab}{2\pi^2} \left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right) \left\{ -\frac{1}{2} - \left(\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right) \ln \left[\frac{m_\mu^2}{M_Z^2}\right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.196}$$

を得る。ただし、$a = -\frac{1}{2} + s_W^2, \quad b = s_W^2$ である。

参考　Z の Goldstone boson からのミューオン g − 2 への寄与 a_μ^{ZG} と、Z ボソンからのミューオン g − 2 への寄与 $a_\mu^Z = a_\mu^{Z,1} + a_\mu^{Z,2}$ を足すと、結果は R_ξ ゲージのゲージパラメーター ξ に依らないことを示せる。(B.175) 式と (B.194) 式の、Feynaman パラメーター x, y を (B.176) 式より z, t に変数変換し、簡単のため $a_\mu^{ZG} + a_\mu^Z$ の ξ に比例する項のみ抜き出すと、

$$a_\mu^{ZG} + a_\mu^Z \supset \frac{g^2 m_\mu^2}{64\pi^2 M_Z^2 c_W^2} \int_0^1 dt \left[t(3t-2) \ln\left[\frac{m_\mu^2 t^2 + (1-t)\xi M_Z^2}{m_\mu^2 t^2 + (1-t) M_Z^2}\right] + \frac{m_\mu^2 t^4}{m_\mu^2 t^2 + (1-t)\xi M_Z^2} - \frac{2 m_\mu^2 t^3}{m_\mu^2 t^2 + (1-t)\xi M_Z^2} \right] \tag{B.197}$$

である。例えば、(B.197) 式の第一項を部分積分すれば、直ちに (B.197) 式は ξ パラメーターに依らないことが示せる。

B.2.3　例２：湯川相互作用

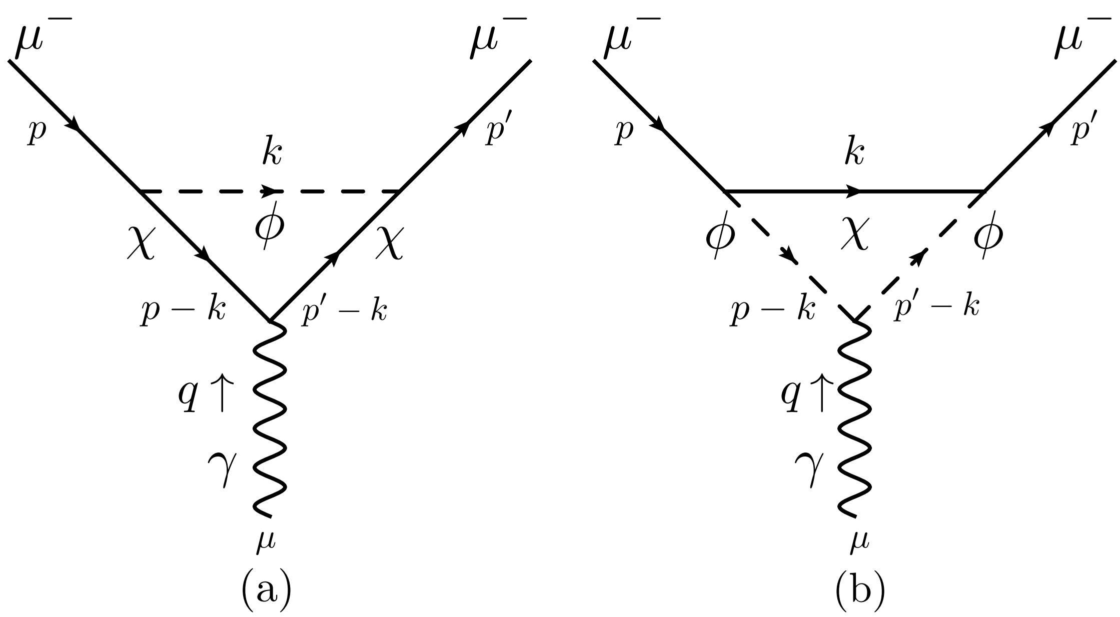


図 25: 湯川相互作用のミューオン g − 2 への寄与。

湯川相互作用からの g − 2 の計算も、標準模型の Z ボソン場合と全く同様にできる。一般的に、right-handed と left-handed のミューオンが「left-handed と right-handed のフェルミオン χ」と「スカラー ϕ」に結合する、以下のような湯川相互作用 $\mathcal{L}$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -y_R \bar{\mu}_R \chi_L \phi - y_L \bar{\mu}_L \chi_R \phi - m_\chi \bar{\chi}_R \chi_L + \text{h.c.} - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi \\
&= -\bar{\mu}(y_R P_L + y_L P_R)\phi\chi - m_\chi \bar{\chi}_R \chi_L + \text{h.c.} - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi
\end{aligned} \tag{B.198}
$$

ここで m_χ はフェルミオン χ の Dirac mass、m_ϕ はスカラー場 ϕ の質量、y_R は right-handed のミューオンに係る湯川結合定数、y_L は left-handed のミューオンに係る湯川結合定数をそれぞれ表す。またフェルミオン χ は、vector-like なフェルミオンとする。ここでは簡単のため、湯川結合定数 y_R, y_L は実にとる[#29]。

湯川相互作用 (B.198) 式より、ミューオン g − 2 に関する散乱振幅 $i\mathcal{M}$ は、図 25 の (a) と (b) の２つのダイアグラムからの寄与がある。(a) のダイアグラムからの散乱振幅 $i\mathcal{M}_\text{a}$ は

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_\text{a} &= \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)\epsilon_\mu(q) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \left\{-i(y_R P_L + y_L P_R)\right\} \frac{i(\not{p}' + \not{k} + m_\chi)}{(p'+k)^2 - m_\chi^2} (iQ_\chi e \gamma^\mu) \epsilon_\mu(q) \\
&\quad \times \frac{i(\not{p} + \not{k} + m_\chi)}{(p+k)^2 - m_\chi^2} \left\{-i(y_R P_R + y_L P_L)\right\} u(p) \frac{i}{k^2 - m_\phi^2} \times \frac{1}{-ie}
\end{aligned} \tag{B.199}
$$

と書ける。初めに (B.199) 式を Feynman パラメーターを使って書き直すと、(B.199) 式の分母は、

$$
\begin{aligned}
(\text{Denominator}) &= \frac{1}{(p'-k)^2 - m_\chi^2} \cdot \frac{1}{(p-k)^2 - m_\chi^2} \cdot \frac{1}{k^2 - m_\phi^2} \\
&= \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3}
\end{aligned}
$$

ただし D は

$$
\begin{aligned}
D &= x[(p'-k)^2 - m_\chi^2] + y[(p-k)^2 - m_\chi^2] + z[k^2 - m_\phi^2] \\
&= l^2 - \Delta
\end{aligned}
$$

である。また、l と Δ は

$$
l = k - (xp' + yp), \quad \Delta \simeq -xyq^2 + (x+y)m_\chi^2 + zm_\phi^2
$$

である。ただし、m_μ^2 は m_χ^2 と m_ϕ^2 に比べて十分小さいとして無視した。また外線のフォトンの運動量を $q^2 = (p'-p)^2$ とした。運動量を k から l にシフトすると、(B.199) 式の分子 N

[#29]湯川結合定数を一般に複素にとる場合については、B.3 節の g − 2, EDM, LFV の計算で言及する。

(=Numerator) は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \bar{u}(p')(y_R P_L + y_L P_R)(\not{p}' - \not{k} + m_\chi)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m_\chi)(y_R P_R + y_L P_L)u(p) \\
&\supset \bar{u}(p')\left[m_\mu\left\{(-x(1-x) - y(1-y))p'^\mu(y_R^2 P_R + y_L^2 P_L)\right.\right. \\
&\quad +2xy(p'^\mu(y_R^2 P_L + y_L^2 P_R) + p^\mu(y_R^2 P_R + y_L^2 P_L)) \\
&\quad \left.\left.+(-x(1-x) - y(1-y))p^\mu(y_R^2 P_L + y_R^2 P_R)\right\} - m_\chi(x+y)(p^\mu + p'^\mu)y_R y_L\right]u(p) \\
&= \bar{u}(p)\left[\left(\frac{y_R^2 + y_L^2}{2}\right)(x+y)(x+y-1)m_\mu(p^\mu + p'^\mu)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{y_R^2 - y_L^2}{2}\right)(x^2 + y^2 - 2xy - x - y)m_\mu\gamma^5 q^\mu - m_\chi(x+y)(p^\mu + p'^\mu)y_R y_L\right]u(p)
\end{aligned} \tag{B.200}$$

となる。ただし、２行目で Dirac Algebra (B.162) 式を使い、$\not{p}$ を $u(p)$ 側に、$\not{p}'$ を $\bar{u}(p')$ 側に移し Dirac 方程式を用いた後、p^μ, p'^μ に比例する項だけ抜き出した。ちなみに、(B.200) 式３行目の $\gamma^5 q^\mu$ に比例する項は、Ward identity $\epsilon_\mu(q)q^\mu = 0$ を使えば消える。

以上の計算から、ミューオン g − 2 に関する散乱振幅 $i\mathcal{M}_\mathrm{a}$ の (B.199) 式は、Gordon identity (B.164) 式を用いて $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ に比例する項を抜き出すと

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_\mathrm{a} &\supset (iQ_\chi e)(-i)\int\frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \\
&\quad \times\bar{u}(p')\left[\left\{\left(\frac{y_R^2 + y_L^2}{2}\right)(x+y)(x+y-1)2m_\mu^2 - 2m_\mu m_\chi y_R y_L(x+y)\right\}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu}\right)\right] \\
&\quad \times u(p)\epsilon_\mu(q)\times\frac{1}{-ie}
\end{aligned} \tag{B.201}$$

となる。さらに運動量積分を実行し、Feyman パラメーター積分の変数を $t = x + y, \quad z = (x-y)/t$ に変数変換すると、(B.205) 式より (a) のダイアグラムからのミューオン g − 2 への寄与

$$a_\mu^\mathrm{a} = \frac{Q_\chi}{(4\pi)^2}\int_0^1 dt\left[(y_R^2 + y_L^2)m_\mu^2\frac{t^2(t-1)}{tm_\chi^2 + (1-t)m_\phi^2} - 2y_R y_L m_\mu m_\chi\frac{t^2}{tm_\chi^2 + (1-t)m_\phi^2}\right] \tag{B.202}$$

を得る。(B.202) 式の Feynman パラメータ積分を実行すると、第１項 (First term) の積分は

$$\begin{aligned}
(\text{First term}) &= \int_0^1 dt\frac{t^2(t-1)}{(m_\chi^2 - m_\phi^2)t + m_\phi^2} \\
&= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dt\frac{t^2(t-1)}{(y-1)t+1}
\end{aligned}$$

ただし $y = m_\chi^2/m_\phi^2$ とした。$T = (y-1)t + 1$ と置換積分すると、

$$
\begin{aligned}
(\text{First term}) &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_1^y dT \frac{1}{(y-1)}\frac{1}{T}\left[\left(\frac{T-1}{y-1}\right)^2\left(\frac{T-1}{y-1}-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{m_\phi^2}\frac{1}{(y-1)^4}\frac{1}{6}\left[-y^3+6y^2-3y-2-6y\ln y\right]
\end{aligned}
$$

また、第２項 (Second term) の積分も同様に

$$
\begin{aligned}
(\text{Second term}) &= \int_0^1 dt \frac{t^2}{tm_\chi^2+(1-t)m_\phi^2} \\
&= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dt \frac{t^2}{(y-1)t+1} \\
&= \frac{1}{m_\phi^2}\frac{1}{(y-1)^3}\frac{1}{2}(y^2-4y+3+2\ln y) \qquad \text{(B.203)}
\end{aligned}
$$

となる。ただし第 1 項と同様、$y = m_\chi^2/m_\phi^2$ とした。以上の計算より、(B.202) 式は

$$
a_\mu^{\mathrm{a}} = -\frac{Q_\chi}{(4\pi)^2}\left\{(y_R^2+y_L^2)\frac{m_\mu^2}{m_\phi^2}\frac{2+3y-6y^2+y^3+6y\ln y}{6(y-1)^4}+y_Ry_L\frac{m_\mu m_\chi}{m_\phi^2}\frac{3-4y+y^2+2\ln y}{(y-1)^3}\right\} \qquad \text{(B.204)}
$$

となる。

続いて (b) のダイアグラムからの寄与を計算する。(b) のダイアグラムからの散乱振幅 $i\mathcal{M}_b$ は

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_b &= \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)\epsilon_\mu(q) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\left\{-i(y_RP_L+y_LP_R)\right\}\frac{i(\not{k}+m_\chi)}{k^2-m_\chi^2}\left\{-i(y_RP_R+y_LP_L)u(p)\right\}iQ_\phi e \\
&\quad \times\left\{(p-k)^\mu+(p'-k)^\mu\right\}\epsilon_\mu(q)\frac{i}{(p-k)^2-m_\phi^2}\cdot\frac{i}{(p'-k)^2-m_\phi^2}\times\frac{1}{-ie} \qquad \text{(B.205)}
\end{aligned}
$$

と書ける。(a) のダイアグラム (B.205) 式のときと同様に、Feynman パラメーターを使って書き直すと、(B.205) 式の $(p^\mu + p'^\mu)$ に比例する項は

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_b \supset\ & (iQ_\phi e)i\int d^4l(2\pi)^4\int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \\
&\times\bar{u}(p')\left[-m_\mu(p^\mu+p'^\mu)\left(\frac{y_R^2+y_L^2}{2}\right)(x+y)(x+y-1)-m_\mu q^\mu(x-y)^2\gamma^5\right. \\
&\left.+m_\chi y_Ry_L(1-x-y)(p^\mu+p'^\mu)\right]u(p)\epsilon_\mu(q)\times\frac{1}{-ie} \qquad \text{(B.206)}
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$D = l^2 - \Delta, \quad \Delta \simeq (x+y)m_\phi^2 + zm_\chi^2 - xyq^2$ であり、m_μ^2 は m_χ^2 と m_ϕ^2 に比べて十分小さいとして無視した。また、(B.206) 式の $\gamma^5 q^\mu$ に比例する項は、Ward identity $\epsilon_\mu(q)q^\mu = 0$ より消える。ダイアグラム (a) の計算と同様、ミューオン g − 2 に関する散乱振幅 $i\mathcal{M}_\mathrm{b}$ の (B.206) 式に Gordon identity (B.164) 式を用いて、(b) のダイアグラムからのミューオン g − 2 への寄与 a_μ^b を取り出した後、運動量積分を実行し、Feynman パラメーター積分の変数を $t = x + y, \quad z = (x-y)/t$ に変数変換すると、

$$a_\mu^\mathrm{b} = \frac{Q_\phi}{(4\pi)^2}\int_0^1 dt \left[-(y_R^2 + y_L^2)m_\mu^2 \frac{t^2(t-1)}{tm_\phi^2 + (1-t)m_\chi^2} + 2y_R y_L m_\mu m_\chi \frac{t(1-t)}{tm_\phi^2 + (1-t)m_\chi^2}\right] \tag{B.207}$$

を得る。ダイアグラム (a) の計算と同様に Feynman パラメーター積分を実行すると、

$$a_\mu^\mathrm{b} = \frac{Q_\phi}{(4\pi)^2}\left\{(y_R^2 + y_L^2)\frac{m_\mu^2}{m_\phi^2}\frac{1 - 6y + 3y^2 + 2y^3 - 6y^2\ln y}{6(y-1)^4} + y_R y_L \frac{m_\mu m_\chi}{m_\phi^2}\frac{-1 + y^2 - 2y\ln y}{(y-1)^3}\right\} \tag{B.208}$$

を得る。

以上の計算より、湯川相互作用 (B.198) 式からのミューオン g − 2 への寄与 a_μ

$$\begin{aligned} a_\mu &= a_\mu^\mathrm{a} + a_\mu^\mathrm{b} \\ &= -\frac{(y_R^2 + y_L^2)}{(4\pi)^2}\frac{m_\mu^2}{m_\phi^2}\left[Q_\chi\left\{\frac{2 + 3y - 6y^2 + y^3 + 6y\ln y}{6(y-1)^4}\right\} - Q_\phi\left\{\frac{1 - 6y + 3y^2 + 2y^3 - 6y^2\ln y}{6(y-1)^4}\right\}\right] \\ &\quad -\frac{y_R y_L}{(4\pi)^2}\frac{m_\mu m_\chi}{m_\phi^2}\left[Q_\chi\left\{\frac{3 - 4y + y^2 + 2\ln y}{(y-1)^3}\right\} - Q_\phi\left\{\frac{-1 + y^2 - 2y\ln y}{(y-1)^3}\right\}\right] \end{aligned} \tag{B.209}$$

が求まる。

B.3 g − 2,EDM,cLFV の計算

最後に補足として、この節では、本論文 4 節で議論した、Radiative Inverse Seesaw Model における新しい湯川相互作用を例に、g − 2, EDM (Electric Dipole Moment), cLFV (charged Lepton Flavor Violation) が同時に計算されることを示す。

g-2, EDM, cLFV の effective Lagrangian $\delta\mathcal{L}_\mathrm{eff}^\mathrm{AMM}$, $\delta\mathcal{L}_\mathrm{eff}^\mathrm{EDM}$, $\delta\mathcal{L}_\mathrm{eff}^\mathrm{cLFV}$ は、それぞれ次式で与え

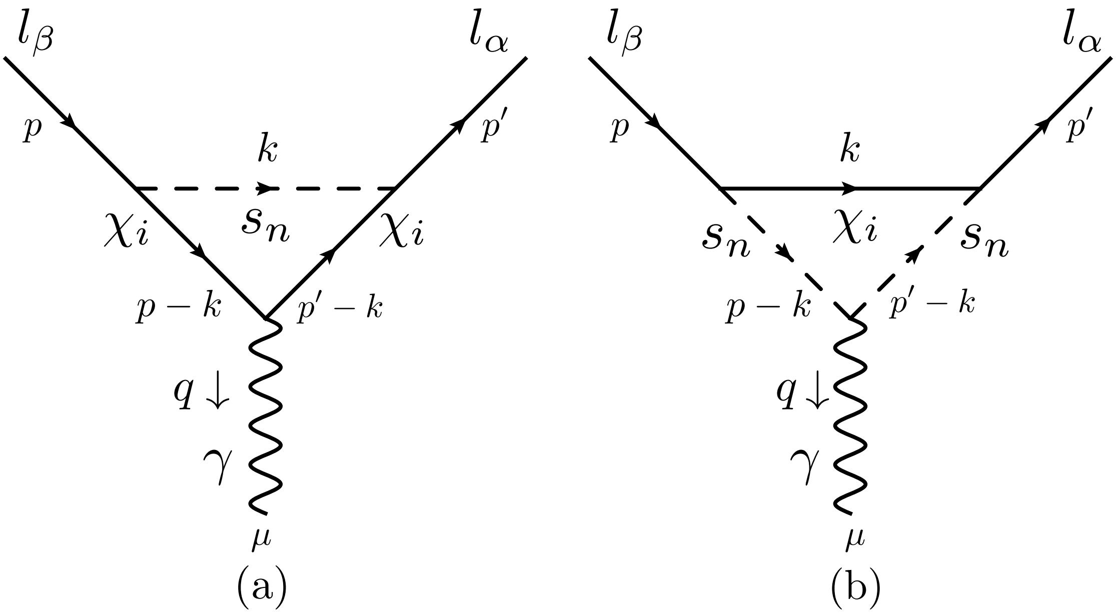


図 26: 新しい湯川相互作用からの cLFV への寄与

られる[#30]。

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{AMM}} &= \frac{e}{4m_{l_\alpha}} a_{l_\alpha}\, \bar{l}_\alpha \sigma^{\mu\nu} l_\alpha F_{\mu\nu} && \text{(B.210)}\\
\delta\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{EDM}} &= -\frac{d_{l_\alpha}}{2}\, \bar{l}_\alpha i\sigma^{\mu\nu} l_\alpha F_{\mu\nu} && \text{(B.211)}\\
\delta\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{cLFV}} &= e\frac{m_{l_\beta}}{2}\, \bar{l}_\alpha \sigma^{\mu\nu} \left(L_{\alpha\beta}P_L + R_{\alpha\beta}P_R\right) l_\beta F_{\mu\nu} && \text{(B.212)}
\end{aligned}$$

ここで a_{l_α} と d_{l_α} は、質量 m_{l_α} の荷電レプトン l_α の g − 2 と EDM をそれぞれ表す。ただし、α, β は標準模型のフレーバーの足を表す。また、e と $F_{\mu\nu}$ は、QED の結合定数と field strength をそれぞれ表す。$P_L,\ P_R$ の係数 $L_{\alpha\beta},\ R_{\alpha\beta}$ は、新しい粒子の質量、電荷、湯川結合定数の関数である。g − 2, EDM, cLFV の effective Lagrangian は、いずれも (B.210), (B.211), (B.212) 式のような dipole-type operator で表される[#31]。したがって g − 2 と EDM は、cLFV の effective Lagrangian (B.212) 式の係数からも読み取ることができる。

本論文 4 節で議論した、Radiative Inverse Seesaw Model の Lagrangian (4.82) 式より、次の湯川相互作用を考える。

$$\mathcal{L} = -\sum_n \sum_i \bar{l}_\alpha \left[V_{1n}(y_R)_{\alpha i}P_L + V_{2n}(y_L)_{\alpha i}P_R\right] s_n \chi_i - m_{\chi_i}\bar{\chi}_{Li}\chi_{Ri} + \text{h.c.} \tag{B.213}$$

[#30](B.211) 式が EDM の effective Lagrangian に対応することは、B.1.1 節の議論と同様、荷電レプトン l_α の非相対論的極限を取ることで示せる。

[#31]ただし、cLFV の effective Lagrangian には、1.dipole-type operator, 2.four-fermion operator の 2 つのタイプがある。cLFV の簡潔なレビューは文献 [99] 参照。

ここで s_n と V_{mn} は本論文 3.1.2 節の (3.30) 式で定義された、質量固有状態のスカラーならびにユニタリー行列である。

図 26 のダイアグラムで表された $l_\beta \to l_\alpha\gamma$ の散乱振幅 $i\mathcal{M}$ を、Gordon identity と Ward identity を合わせた (B.166) 式を使って計算すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} \;=\; & \sum_n \sum_i \frac{iQ_\chi e}{(4\pi)^2} \epsilon^*_\mu(q) \bar{u}_\alpha(p') \left(i\sigma^{\mu\nu} q_\nu\right) \\
& \times \Bigg[-\frac{1}{2}(C_{11}+C_{22})(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) \\
& \times \left\{ m_\beta \left(|V_{1n}|^2 (y_R)_{\alpha i}(y_R)^*_{\beta i} P_L + |V_{2n}|^2 (y_L)_{\alpha i}(y_L)^*_{\beta i} P_R \right) \right. \\
& \left. + m_\alpha \left(|V_{1n}|^2 (y_R)_{\alpha i}(y_R)^*_{\beta i} P_R + |V_{2n}|^2 (y_L)_{\alpha i}(y_L)^*_{\beta i} P_L \right) \right\} \\
& - C_{11}(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q)\, m_{\chi_i} \left(V_{1n} V^*_{2n} (y_R)_{\alpha i}(y_L)^*_{\beta i} P_L + V_{2n} V^*_{1n} (y_L)_{\alpha i}(y_R)^*_{\beta i} P_R \right) \Bigg] u_\beta(p) \\
& + \sum_n \sum_i \frac{iQ_2 e}{(4\pi)^2} \epsilon^*_\mu(q) \bar{u}_\alpha(p') \left(i\sigma^{\mu\nu} q_\nu\right) \\
& \times \Bigg[\frac{1}{2}(C_{22}+C_{12})(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) \\
& \times \left\{ m_\beta \left(|V_{1n}|^2 (y_R)_{\alpha i}(y_R)^*_{\beta i} P_L + |V_{2n}|^2 (y_L)_{\alpha i}(y_L)^*_{\beta i} P_R \right) \right. \\
& \left. + m_\alpha \left(|V_{1n}|^2 (y_R)_{\alpha i}(y_R)^*_{\beta i} P_R + |V_{2n}|^2 (y_L)_{\alpha i}(y_L)^*_{\beta i} P_L \right) \right\} \\
& + C_{12}(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) m_{\chi_i} \left(V_{1n} V^*_{2n} (y_R)_{\alpha i}(y_L)^*_{\beta i} P_L + V_{2n} V^*_{1n} (y_L)_{\alpha i}(y_R)^*_{\beta i} P_R \right) \Bigg] u_\beta(p)
\end{aligned}
\tag{B.214}
$$

ただし p と $p' = p + q$ は、荷電フェルミオン l_α と l_β の運動量をそれぞれ表す。q は外線のフォトンの運動量を表す。また Q_χ と Q_2 は、フェルミオン χ_i とスカラー s_n の QED 電荷をそれぞれ表す。ここで外線のフォトンは on-shell のため $q^2 = 0$ とした。g − 2 を計算する場合も、いずれにしろ $q^2 \to 0$ の極限を取るので、これまでと同様、散乱振幅 (B.214) 式から g − 2 を求めることができる。ここで上記の Passarino-Veltman functions の陽な表式は、本論文 3.1.2 節の (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) 式と同様、次のように与えられる。

$$
(C_{11}+C_{21})(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) = \frac{1}{m^2_{s_n}} \frac{2 + 3y_{in} - 6y^2_{in} + y^3_{in} + 6y_{in} \ln y_{in}}{6(1-y_{in})^4} \tag{B.215}
$$

$$
C_{11}(s_n, \chi_i, \chi_i; p, q) = -\frac{1}{m^2_{s_n}} \frac{3 - 4y_{in} + y^2_{in} + 2\ln y_{in}}{2(1-y_{in})^3} \tag{B.216}
$$

$$
(C_{22}+C_{12})(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) = \frac{1}{m^2_{s_n}} \frac{1 - 6y_{in} + 3y^2_{in} + 2y^3_{in} - 6y^2_{in} \ln y_{in}}{6(1-y_{in})^4} \tag{B.217}
$$

$$
C_{12}(s_n, s_n, \chi_i; -q, p+q) = \frac{1}{m^2_{s_n}} \frac{1 - y^2_{in} + 2y_{in} \ln y_{in}}{2(1-y_{in})^3} \tag{B.218}
$$

ただし、$y_{in} = m^2_{\chi_i}/m^2_{s_n}$ である。

この $l_\beta \to l_\alpha\gamma$ の散乱振幅 (B.214) 式と、本論文 4.2 節の散乱振幅 (4.86) 式を比較することで、LFV の計算に必要な係数 $L_{\alpha\beta}$,$R_{\alpha\beta}$ を求めることができる。

それに加えて、散乱振幅 (B.214) 式から g − 2 ないし EDM を求める場合は、ダイアグラムで外線のフォトンの運動量をそれぞれ

$$q^\mu = \begin{cases} p'^\mu - p^\mu & \text{for g} - 2 \text{ and EDM} \\ p^\mu - p'^\mu & \text{for LFV} \end{cases}$$

と置くことに注意して、(B.214) 式を次のように置き換えればよい。

$$\begin{aligned} q^\mu &\to -q^\mu \\ \epsilon^*_\mu(q) &\to \epsilon_\mu(q) \end{aligned}$$

例えば、上のように q^μ と $\epsilon^*_\mu(q)$ を置き換えた散乱振幅 (B.214) 式と、Appendix B.1.1 節の散乱振幅 (B.161) 式を比較することで、g − 2 を求めることができる。

C　電弱精密測定のフォーマリズム

電弱精密測定 (electroweak precision measurements) とは、LEP と SLC で測定された Z-pole に関する観測量 [100] 、ならびに LEP-II と Tevatron で測定された W ボソンの質量と崩壊幅 [73] のことを指す。狭義には、電弱精密測定は Z-pole に関する精密実験データーを指し、例えば、本論文 3.2 節の表 2 に挙げられた、line-shape & FB asymmetries, τ polarization measurements, b and c quark results, SLD results, などの観測量を指す。Z ボソンは e^+e^- 反応で生成でき、ハドロン反応と違って大きな QCD バックグラウンドがないため、Z ボソンの崩壊モードに関与する粒子 f_α $(\alpha = L, R)$ の結合定数 g^f_α の精密測定が可能である。

電弱精密測定に関する実験データーの精度は、標準模型の量子補正のレベルに達しており、標準模型の量子補正を含めた精密なテストが可能となった。その結果、標準模型における電弱精密測定のフィットは良く一致することが分かり[#32]、これが新しい物理に対して強い制限を与えている。

この Appendix では、初めに C.1 節で、電弱精密測定のフォーマリズムで良く知られたオリジナルの Peskin-Takeuchi の STU パラメーターについて議論する。ただし、本論文で用いた STU パラメーターはオリジナルの STU パラメーターと少し異なるため、ここではフォーマリズムの詳細に立ち入らず、後の議論に必要なポイントだけ述べるにとどめる。

次に C.2 節で、本論文で用いた電弱精密測定のフォーマリズムである、Hagiwara-Haidt-Kim-Matsumoto によるフォーマリズム (HHKM Formalism) を議論する。この HHKM Formalism は、Peskin-Takeuchi のフォーマリズムでは小さいと仮定し、無視した以下の３つの補正、1. 新粒子の質量が電弱スケール以下にある場合の補正、2.vertex correction の補正、3.box diagram の補正、まで考慮したフォーマリズムである。ここでは、oblique corrections に関するパラメーターのもつ性質ついて議論する。また、本文中では詳しく議論できなかった、HHKM Formalism における χ^2 の計算に関しても補足する。

以下では簡単のため、ゲージ群は標準模型の $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)$ を仮定し、新しい物理はくり込み可能な模型を考えるものとする。電弱精密測定のより一般的な議論は文献 [102] を参照。また、電弱精密測定のレビューは文献 [103] 等を参照。

C.1　Peskin-Takeuchi の STU パラメーター

電弱精密測定に対する量子補正は、図 27 に示された 1.oblique corrections　2.vertex corrections　3.box diagrams の３種類がある。

この３種類の寄与の内、Peskin-Takeuchi の STU パラメーター [70] は、ゲージボソンの２点関数 (gauge boson self energies) に対する量子補正 (oblique corrections) の効果をパラメトライズする（図 27 の左のダイアグラムに対応）。Dyson resummation（iteration と呼ばれる

[#32] Gfitter Group によってヒッグス発見後の標準模型における電弱精密測定のフィットが行われ、その結果、標準模型は電弱精密測定と無矛盾であることが示されている [101]。

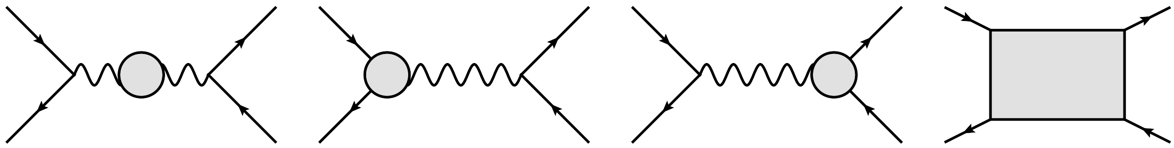


図 27: 電弱精密測定に対する量子補正。

手法) [#33]よりゲージボソンのプロパゲーターを量子補正を全て取り入れたプロパゲーターに書き直すと、図 27 の oblique corrections のダイアグラムに対応する、oblique corrections を含めた neutral current と charged current の散乱振幅の表式が得られる [104]。このようにして得られた散乱振幅は、tree level の結合定数を oblique corrections を含む有効結合定数で再定義することによって、tree level と同じ表式に書き直すことができる。そして、この有効結合定数を使って物理量を書き直すと、oblique corrections による tree level からのずれを gauge boson self energies $\Pi_{IJ}(q^2)$ ($q^2 = 0,\ M_Z^2,\ M_W^2$) を使って表すことができる。Peskin-Takeuchi のフォーマリズムでは、この gauge boson self energies $\Pi_{IJ}(q^2)$ を、新粒子の質量 $M_{\rm new}$ が Z ボソンの質量 M_Z より十分重いと仮定し、次のように $q^2 = 0$ の周りで展開している。

$$\Pi_{IJ}(q^2) \approx \Pi_{IJ}(0) + \left.\frac{d\Pi_{IJ}(q^2)}{dq^2}\right|_{q^2=0} q^2 + \mathcal{O}\left(\frac{q^4}{M_{\rm new}^2}\right) \tag{C.219}$$

ここで $q^2 = M_Z^2$ のとき、q^4 の項は q^2 の項に比べて $\mathcal{O}(M_Z^2/M_{\rm new}^2)$ だけ小さいとして、これ以降の高次の項は無視している。このような近似を用いると、たった 3 つのパラメータを使って物理量に対する oblique correction を評価できる。この 3 つのパラメーターは Peskin-Takeuchi の STU パラメーターと呼ばれ、次のように定義される。

$$\alpha S \equiv 4e^2 \left[\Pi'_{33}(0) - \Pi'_{3Q}(0)\right] \tag{C.220}$$

$$\alpha T \equiv \frac{e^2}{s^2c^2M_Z^2} \left[\Pi_{11}(0) - \Pi_{33}(0)\right] \tag{C.221}$$

$$\alpha U \equiv 4e^2 \left[\Pi'_{11}(0) - \Pi'_{33}(0)\right] \tag{C.222}$$

ただし gauge boson self energies $\Pi_{IJ}(q^2)$ は新しい物理からの寄与とする。また $\Pi_{IJ}(q^2)$ の記

[#33]Dynson resummation については D.2.1 節の脚注を参照。

法は、Appendix D.1.1 節の図 28 のように定義する。ここで $\Pi_{IJ}(q^2)$ の添字 $_{QQ,\ 3Q,\ 33,\ 11}$ は

$$\begin{aligned}
\Pi_{\gamma\gamma}(q^2) &= e^2\Pi_{QQ}(q^2) && \text{(C.223)}\\
\Pi_{Z\gamma}(q^2) &= \frac{e^2}{sc}\left[\Pi_{3Q}(q^2) - s^2\Pi_{QQ}(q^2)\right] && \text{(C.224)}\\
\Pi_{ZZ}(q^2) &= \frac{e^2}{s^2c^2}\left[\Pi_{33}(q^2) - 2s^2\Pi_{3Q}(q^2) + s^4\Pi_{QQ}(q^2)\right] && \text{(C.225)}\\
\Pi_{WW}(q^2) &= \frac{e^2}{s^2}\Pi_{11}(q^2) && \text{(C.226)}
\end{aligned}$$

で定義される。(C.220), (C.221), (C.221) 式で定義された STU パラメーターは、右辺の $\Pi_{IJ}(q^2)$ の間で発散が相殺する。したがって、Peskin-Takeuchi の STU パラメーターは、有限かつ renormalization scheme independent な表現となっている。

本来なら、新しい物理からの電弱精密測定への寄与には vertex corrections や box diagrams も含まれるが、これらの寄与は小さいと仮定し、さらに上に述べた (C.219) 式の近似を使うと、新しい物理からの電弱精密測定への寄与は、STU の３つのパラメーターを計算するだけで容易に評価できる。これが Peskin-Takeuchi の STU パラメーターが非常に注目された理由であると考えられる。なお、オリジナルの STU パラーメーターの導出は、Takeuchi による講義ノート [105, 106] に詳しい。

C.2 HHKM Formalism

本論文 3.2 節で用いた電弱精密測定のフォーマリズムである HHKM Formalism [67, 68, 69] は、Peskin-Takeuchi のフォーマリズムでは小さいと仮定し、無視した以下の３つの補正、1. 新粒子の質量が電弱スケール以下にある場合の補正、2.vertex correction の補正、3.box diagram の補正、まで考慮したフォーマリズムである。

このフォーマリズムでは、Z ボソンの崩壊の散乱振幅 $\mathcal{M}(Z \to f_\alpha \bar{f}_\alpha)$ を

$$i\mathcal{M}(Z \to f_\alpha \bar{f}_\alpha) = i\sqrt{4\sqrt{2}G_F M_Z^2}\, g_\alpha^f\, \bar{f}_\alpha \gamma^\mu f_\alpha \epsilon_\mu \tag{C.227}$$

と表す [68] #34。ただし、フェルミオン f の添字 α はカイラリティー、$\alpha = L$ or R を表す。また、ϵ_μ は Z の polarization vector を表す。(C.227) 式で定義された Z ボソンの崩壊の散乱振幅 $\mathcal{M}(Z \to f_\alpha \bar{f}_\alpha)$ の有効結合定数 g_α^f は、次のような形で与えられる。

$$g_\alpha^f = a_\alpha^f + b_\alpha^f \Delta\bar{g}_Z^2 + c_\alpha^f \Delta\bar{s}^2 + \Delta g_\alpha^f \tag{C.228}$$

ここで $\Delta\bar{g}_Z^2$, $\Delta\bar{s}^2$, Δg_α^f は、本論文 3.2 節で述べた oblique corrections を表すパラメーター、S, T, U, R_Z, R_W, $\Delta\alpha_{\rm new}$、ならびに、vertex correcions を表すパラメーター $\Delta g_{L,R}^\mu$, $\Delta\bar{\delta}_G$ から決まるパラメーターである。また、係数 a_α^f, b_α^f, c_α^f の値は、文献 [67] に与えられている。

#34 (C.227) 式の係数 $\sqrt{4\sqrt{2}G_F M_Z^2}$ は、tree level の Lagrangian では g/c_W に相当する規格化因子である。

HHKM Formalism では本論文 3.2 節の表 2 に挙げられた、line-shape & FB asymmetries, τ polarization measurements, b and c quark results, SLD results, といった電弱精密測定は、(C.228) 式の有効結合定数 g^f_α によって表されている。したがって、oblique corrections を表すパラメーター、ないし vertex corrections を表すパラメーターを計算し、さらに文献 [67, 68, 69] で与えられた有効結合定数と電弱精密測定の関係式を用いることで、新しい物理からの oblique corrctions ないし vertex corrections を含めた電弱精密測定を求めることができる。

この節では以下の 2 点、1.oblique corrections に関するパラメーターのもつ性質、および、2.HHKM Formalism における χ^2 フィットに関する補足、について議論する。

C.2.1 oblique corrections に関するパラメーターのもつ性質

HHKM Foramlism では、電弱精密測定に対する oblique corrections の効果を、本論文 3.2 節で定義した、次の 6 つのパラメータを用いて評価する。

$$\frac{\alpha S}{4s_W^2c_W^2} = \frac{\Pi_{ZZ}(M_Z^2)-\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2} - \frac{c_{2W}}{c_W s_W}\frac{\Pi_{Z\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_{\gamma\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2}, \tag{C.229}$$

$$\alpha T = \frac{\Pi_{WW}(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2}, \tag{C.230}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha U}{4s_W^2} &= \frac{\Pi_{WW}(M_W^2)-\Pi_{WW}(0)}{M_W^2} - c_W^2\frac{\Pi_{ZZ}(M_Z^2)-\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2} \\ &\quad -2s_Wc_W\frac{\Pi_{Z\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} - s_W^2\frac{\Pi_{\gamma\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2},\end{aligned} \tag{C.231}$$

$$\frac{\alpha R_Z}{4s_W^2c_W^2} = \left.\frac{d\Pi_{ZZ}(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=M_Z^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(M_Z^2)-\Pi_{ZZ}(0)}{M_Z^2}, \tag{C.232}$$

$$\frac{\alpha R_W}{4s_W^2} = \frac{\Pi_{WW}(M_Z^2)-\Pi_{WW}(M_W^2)}{M_Z^2-M_W^2} - \frac{\Pi_{WW}(M_W^2)-\Pi_{WW}(0)}{M_W^2}, \tag{C.233}$$

$$\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2) = \frac{\Pi_{\gamma\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} - \left.\frac{\Pi_{\gamma\gamma}(p^2)}{p^2}\right|_{p^2=0} \tag{C.234}$$

ここで、c_W, s_W は $\overline{\rm MS}$ の weak mixing angle を表す。また、$c_{2W}=c_W^2-s_W^2$ である。

STU パラメーターの物理的意味

- S: 新しい物理からの neutral current processes への寄与を特徴づける量。
- T: 新しい物理からの neutral current processes への寄与と、charged current processes への寄与の違いを表す量。
- U: W ボソンの質量と崩壊幅からのみ制限を受ける量。

通常、新しい物理からの U, R_Z, R_W, $\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2)$ への寄与は、S, T に比べて小さい。したがって、新しい物理に対する制限を見やすくするために、S と T の二次元プロットがよく用いられる。

oblique correction に関するパラメーターと物理量の関係　本論文 3.2 節で議論した、vertex corrections からの寄与 Δg_L^μ, Δg_R^μ, $\Delta\bar{\delta}_G$ を無視すれば、(C.229) から (C.234) 式で定義された oblique corrections に関するパラメーターを使って、物理量を簡単に表すことができる[#35]。例えば、W ボソンの質量、effective weak mixing anlgle、Z ボソンの崩壊幅は、それぞれ次のように求まる [72, 107]。

$$\frac{M_W^2}{(M_W^2)_{\rm SM}} = 1 - \frac{\alpha S}{2(c_W^2 - s_W^2)} + \frac{c_W^2 \alpha T}{c_W^2 - s_W^2} + \frac{\alpha U}{4 s_W^2} - \frac{s_W^2 \alpha Y}{c_W^2 - s_W^2} \tag{C.235}$$

$$\frac{s_{\rm eff}^2}{(s_{\rm eff}^2)_{\rm SM}} = 1 + \frac{\alpha S}{4 s_W^2 (c_W^2 - s_W^2)} - \frac{c_W^2 \alpha T}{c_W^2 - s_W^2} + \frac{c_W^2 \alpha Y}{c_W^2 - s_W^2} \tag{C.236}$$

$$\frac{\Gamma(Z \to l^+ l^-)}{(\Gamma(Z \to l^+ l^-))_{\rm SM}} = 1 - d_w \alpha S + (1 + 4 s_W^2 c_W^2 d_w)\alpha T + \alpha V - 4 s_W^2 c_W^2 d_w \alpha Y \tag{C.237}$$

ここで

$$d_w \equiv \frac{1 - 4 s_W^2}{(1 - 4 s_W^2 + 8 s_W^4)(c_W^2 - s_W^2)} \tag{C.238}$$

である。(C.235), (C.236), (C.237) 式の $(M_W^2)_{\rm SM}$, $(s_{\rm eff}^2)_{\rm SM}$, $(\Gamma(Z \to l^+ l^-))_{\rm SM}$ は標準模型の予言値で、例えば文献 [108] から求めることができる。また V, Y は (C.232), (C.234) 式の R_Z, $\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2)$ と次のように対応する。

$$R_Z = 4 s_W^2 c_W^2 V \tag{C.239}$$

$$\Delta\alpha_{\rm new}(M_Z^2) = \alpha Y \tag{C.240}$$

したがって、(C.229) から (C.234) 式の 6 つのパラメーターを計算すれば、(C.235), (C.236), (C.237) 式から、oblique corrections を含む M_W, $s_{\rm eff}^2$, $\Gamma(Z \to l^+ l^-)$ を求めることができる。

non-decoupling effects　Appelquist-Carazzone の decoupling theorem [109] によれば、

> 重たい粒子の低エネルギーにおける効果は、重たい粒子の質量の逆べきで抑制される、もしくは、重たい粒子を積分して得られた低エネルギー有効理論の結合定数と場にくり込まれる。

[#35] vetex corrections と box diagrams に関するパラメーターまで含めた物理量との関係は、込み入った記述になるため、詳細は文献 [67, 68, 69] を参照。

この decoupling theorem は、理論が厳密にゲージ対称性をもつ場合には成り立つが、ゲージ対称性が自発的に破れた理論では一般に成り立たない [110]。例えば、本論文の 3.2.2 節 (3.65) 式の S,T パラメーターは、non-decoupling なパラメーターである。

$$\begin{aligned} S &\simeq \frac{Y_\Phi}{6\pi}\Delta + \cdots, \\ T &\simeq \frac{m_{\phi_1}^2}{16\pi s_W^2 M_W^2}(\Delta)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

ここで $\Delta = (m_{\phi_2}^2 - m_{\phi_1}^2)/m_{\phi_1}^2$ である。上式から、m_{ϕ_1} と m_{ϕ_2} を大きくしても、S,T はデカップルしないことがわかる。また、$m_{\phi_2}^2 - m_{\phi_1}^2$ の質量差は、本論文 3.3.1 節 (3.71) 式のスカラーポテンシャルで、κ_3 と κ_4 に比例する項のヒッグス H が真空期待値をもつことで生じる。したがって、S,T パラメーターは $\mathrm{SU}(2)_L$ をソフトに破る項に対し感度があることがわかる。

C.2.2 HHKM Formalism における χ^2 フィットに関する補足

本節では、本論文 3.2.2 節の表 2 に挙げられた電弱精密測定の χ^2 フィットについて補足する。本論文では、表 2 の電弱精密測定の χ^2 の値が最小になるように、インプット・パラメーターである $\Delta\alpha_{\mathrm{had}}^{(5)}(M_Z^2)$, $\alpha_s(M_Z)$, m_t の値を振って決めた。

HHKM Formalism における χ^2 は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_i \sum_j \left(O_i^{\mathrm{exp}} - O_i^{\mathrm{th}}\right)(C^{-1})_{ij}\left(O_j^{\mathrm{exp}} - O_j^{\mathrm{th}}\right) \\ &= \sum_i \sum_j \left(\frac{O_i^{\mathrm{exp}} - O_i^{\mathrm{th}}}{\sigma_i^{\mathrm{exp}}}\right)\left(R^{-1}\right)_{ij}\left(\frac{O_j^{\mathrm{exp}} - O_j^{\mathrm{th}}}{\sigma_j^{\mathrm{exp}}}\right) \end{aligned} \tag{C.241}$$

ここで、O^{exp} は実験値、O^{th} は理論の予言値、σ^{exp} は実験値の 1σ の誤差、C は共分散行列 (covariance matrix)、R は相関行列 (correlation matrix)、をそれぞれ表す。相関行列 R は、共分散行列 C を用いて次のように定義されることに注意。

$$(R)_{ij} = \frac{(C)_{ij}}{\sigma_i^{\mathrm{exp}}\sigma_j^{\mathrm{exp}}} \tag{C.242}$$

本論文 3.2.2 節の表 2 に挙げられた電弱精密測定の内、line-shape & FB asymmetries, τ polarization measurements, b and c quark results, SLD results、に関する相関行列、R_{line}, $R_{\tau\ \mathrm{pol}}$, $R_{b\ \mathrm{and}\ c}$, R_{SLD} は文献 [100] で与えられている[#36]。したがって、これらの相関行列の逆行列を求めれば[#37]、(C.241) 式より電弱精密測定の χ^2 フィットを評価できる。

[#36] R_{line}, $R_{\tau\ \mathrm{pol}}$, $R_{b\ \mathrm{and}\ c}$, R_{SLD} はそれぞれ文献 [100] の、p75 の表 2.13、p114 の 23 行目の一文、p160 の表 5.11 、p96 の表 3.6、に示されている。
[#37] 例えば Mathematica、あるいは Maxima を使えば容易に計算できる。

D　Vertex Correction のくり込み

標準模型 (chiral gauge theory) のくり込み　物理量を予言するには、最初に Lagrangian を書くところから出発する。しかし場の量子論の Lagrangian（裸のラグランジアン (bare Lagrangian)）に含まれる質量、結合定数といったパラメーター（裸のパラメーター (bare parameters)）は、一般に実験の測定値（くり込まれたパラメーター (renormalized parameters)）と異なる。実験では全ての量子補正を含んだ物理量を測定するので、裸の Lagrangian に含まれる裸のパラメーターと、実験で決まるパラメーター（くり込まれたパラメーター）を関係づける必要がある。裸のパラメーターをくり込まれたパラメーターで再定義する手続きを「くり込み (Renormalization)」と呼ぶ。

理論に発散があろうがなかろうが、Lagrangian に含まれるパラメーターを実験値から決める手続きは必要である。tree level では単純に裸のパラメータ= 実験値として計算を行うが、loop level の計算においては、一般に裸のパラメーター $\neq$ 実験値である。さらに、物理量同士の関係式も tree level のときから変化する。したがって loop level の計算を行うには、まず Lagrangian に含まれる裸のパラメーターと実験値の関係を明らかにする必要がある[#38]。

量子補正の紫外発散部分を裸のパラメーターの再定義でとりこみ、有限個の実験のインプットから、理論の予言する全ての物理量を有限にできる場合、「くり込み可能である」という。このようなくり込み可能な理論は、実験のインプットに用いた物理量以外の物理量（量子補正を含む物理量）に関して予言能力をもつ。

くり込みは理論のカットオフを無限大にとると、裸のパラメーターに無限大が現れるが、物理的には本来、有限な量であると考えている。くり込みの意味をウィルソンの有効理論 [111] から考えてみる。超弦理論などの何らかの理論が存在すると仮定すると、その理論から、くり込み可能である必要のないプランクスケールの有効 Lagrangian が出てくるだろう。ただし、このような高エネルギーの有効 Lagrangian に含まれるくり込み不可能な項 (irrelevant operators) は、高エネルギー部分を積分した低エネルギー有効 Lagrangian で結合定数が減少し無視できるようになる（演算子の次元 n、低エネルギースケール μ、カットオフスケール Λ のとき、$(\mu/\Lambda)^{n-4}$ に比例）[110, 112, 113]。そのため、プランクスケールの Lagrangian にくり込み不可能な相互作用があったとしても、低エネルギー有効理論（標準模型）はくり込み可能な理論となる[#39]。

[#38]実験値との関係を明らかにする手続きを on-shell renormalization という。実用上は on-shell renormalization で無限大のくり込みを済ませた後、有限量のくり込みから、くり込み条件を $\overline{\mathrm{MS}}$ に変え、摂動論の近似が良いくり込み点 μ^2 を基準とするパラメーターで物理量を計算することが多い。

[#39]運動量積分のカットオフが Lorentz invariance と gauge invariance に反することに関する議論は、例えば lattice regularization を参照 [113]。

D.1　くり込み変換と相殺項

このAppendixではHollikの文献[114, 115]に従って、「標準模型のくり込み」をレビューする。QEDのくり込み[95]とは、特に理論がカイラルな点で異なる。本節は、「標準模型のくり込み」の議論に含まれるトピックの中から、本論文で用いた、「ゲージボソン・フェルミオンの2点関数」、および「ゲージボソン・フェルミオンの3点関数」のくり込みに必要な相殺項(counter terms)を導出することを目標とする。したがって、以後、ゲージボソンのoblique corrections、ならびにフェルミオンとゲージボソンのvertex correctionsの計算に必要なトピックに絞って、くり込みの議論を進める。

相殺項のFeynman rule導出はHollikの「標準模型のくり込み」の文献[114]に準ずる[#40]。ここでは、「on-shell renormalization」の詳細を議論する。on-shell renormalizationは実験値と裸のパラメータを対応させるrenomalization schemeである[#41]。なおHollik氏の文献[114]に従い、on-shell schemeのインプットパラメーターは、QED電荷e、Wボソンの質量M_W、Zボソンの質量M_Zの場合を考える。

初めに、裸の場を「乗法的くり込み定数(multiplicative renormalization constants) Z」を掛けたくり込まれた場で、以下のように再定義する。ただし、乗法的くりこみ定数Zは、後に「くり込み条件」から実験値をインプットして決定される量である。

$$
\begin{aligned}
A^a_{o\mu} &= (Z_2^A)^{1/2} A^a_\mu && :\mathrm{SU}(2)_L \text{ gauge field} \qquad a=1,2,3 \\
B_{0\mu} &= (Z_2^B)^{1/2} B_\mu && :\mathrm{U}(1) \text{ gauge field} \\
\psi_0^L &= (Z_L)^{1/2} \psi_L && :\text{left-handed fermion} \\
\psi_0^R &= (Z_R)^{1/2} \psi_R && :\text{right-handed fermion} \\
H_0 &= (Z^H)^{1/2} H && :\text{Higgs field} \\
g_0 &= Z_1^A (Z_2^A)^{-3/2} g && :\mathrm{SU}(2)_L \text{ gauge coupling constant} \\
g_0' &= Z_1^B (Z_2^B)^{-3/2} g' && :\mathrm{U}(1) \text{ gauge coupling constant} \\
v_0 &= (Z^H)^{1/2} (v - \delta v) && :\text{vacuum expectaion value} \\
y_{0\psi} &= (Z^H)^{-1/2} Z_1^\psi y_\psi && :\text{Yukawa coupling}
\end{aligned}
\tag{D.243}
$$

ここで、左辺は「裸の場」と「裸のパラメーター（結合定数と質量)」、右辺は「乗法的くり込み定数（Z因子)」を掛けた「くり込まれた場」と「くり込まれたパラメーター」である。

[#40]ただし、このレビューの計算では、共変微分と2点関数の表記法(notaion)はHollikのレビュー[114]と異なり、Peskin [95]のnotationを採用することにする。

[#41]よく知られた$\overline{\mathrm{MS}}$ schemeに現れる$\overline{\mathrm{MS}}$質量や$\overline{\mathrm{MS}}$結合定数は、直接実験で測られる量ではない。$\overline{\mathrm{MS}}$質量や$\overline{\mathrm{MS}}$結合定数などの値は、出発した裸のLagrangianが同じであることに注目して、on-shell renormalizationで決定したくり込み定数と$\overline{\mathrm{MS}}$で決定したくり込み定数を比較することで得られる。したがって$\overline{\mathrm{MS}}$で計算するにしても、最初にon-shell renormalizationの手続きが必要である。

特に、ゲージ対称性から、3 つある $\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージ場 $A^a_\mu\,(a=1,2,3)$ に対応するくり込み定数は 1 つだけになる。

初めに標準模型の Lagrangian を、くり込み変換 (D.243) 式に含まれる裸の場とパラメータで書き下すことから出発する。標準模型（電弱相互作用に限る）の裸の Lagragian は、次の 3 項に分けられる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EW}} = \mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}} + \mathcal{L}_{\mathrm{fermion}} \tag{D.244}$$

次に、標準模型の裸の Lagrangian に含まれる、くり込み変換 (D.243) 式で定義された Z 因子 Z_i を、以下のくり込み定数の展開 (D.245) 式に従って展開する。

$$Z_i = 1 + \delta Z_i \tag{D.245}$$

一般に、裸の Lagrangian に含まれる適当な場 $\phi_0 = Z_\phi^{1/2}\phi$ と、適当な結合定数 e_0 を (D.245) 式の形で展開すると、裸の Lagrangian は以下のように、くり込まれた Lagrangian (renormalized Lagrangian) と相殺項 (counter terms) に分離される。

$$\mathcal{L}(\phi_0, e_0) = \mathcal{L}(\phi, e) + \delta\mathcal{L}(\phi, e, \delta Z_\phi) \tag{D.246}$$

よって、くり込み定数の展開 (D.245) 式から、くり込み定数を展開すると $\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}}$, $\mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}}$, $\mathcal{L}_{\mathrm{fermion}}$ を「renormalized Lagrangian」と「counter term Lagrangian」に分離できる。なお、くりこみ定数の展開で $(\delta Z_i)^2$ の項は higher order として無視する。以下、1. gauge boson self eneries、2.fermion self energies の順に、相殺項を定式化していく。

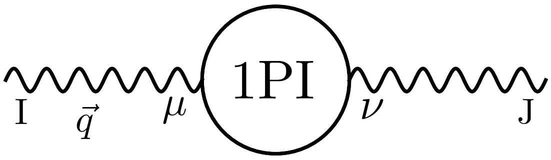
D.1.1 gauge boson self energies

この節では、ゲージボソンの self energy $\Pi_{IJ}(q^2)$ の on-shell くり込みを行う。ここでゲージボソンの self energy は図 28 のように定義する。但し、ゲージボソンの self energy に含まれる $q^\mu q^\nu$ に比例する項は、q^2 が $M^2_{W,Z}$ の物理的な散乱振幅を考えたとき、外線との Dirac 方程式より q^μ, q^ν が高々bottom quark の質量にしかならないため、$m_f^2/M^2_{W,Z}$ に比例する項は無視した[#42]。

ゲージボソンの質量の表式は、tree level の場合と同様に weak mixing angle により対角化を行う。ゲージ場の質量固有状態は、weak mixing angle c, s を使って次のように書く。

$$\begin{aligned} W^\pm_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^1_\mu \mp i A^2_\mu\right) \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.247}$$

[#42] m_f は W,Z ボソンより軽い外線フェルミオンの質量である。また、くり込みによる輻射補正の計算は LEP2 [100] の電弱精密測定を考えるため $q^2 = M^2_{W,Z}$ を考える。



$$= ig^{\mu\nu}\Pi_{\mathrm{IJ}}(q^2)$$

図 28: gauge boson self energies。ここで I,J はゲージ場を表す。また、q^μ, q^ν に比例する項は高々bottom quark の質量にしかならないため、$M_{W,Z}^2$ に比べて小さいとして無視した。

ここで weak mixing angle s の定義は、

$$s = \sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \tag{D.248}$$

である。右辺の M_W,M_Z は実験で決まる weak boson の pole mass である（on-shell scheme のインプットパラメーター)。

$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)$ の自発的対称性の破れから、$\mathrm{U}(1)_{em}$ の対称性が残り、hypercharge Y=1/2 の Higgs 場は真空期待値 v を得る。

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{D.249}$$

Higgs 場の共変微分は、$\mathrm{SU}(2)_L$ doublet かつ weak hypercharge $Y = 1/2$ なので、

$$\begin{aligned} D_{0\mu} &= \partial_\mu - ig_0 A_{0\mu}^a \frac{\sigma^a}{2} - i\left(\frac{1}{2}\right) g_0' B_{0\mu} \\ \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \ \sigma^i \text{ the Pauli sigma matrices} \end{aligned} \tag{D.250}$$

ここで、添字の 0 は裸のパラメーターであることを表す。

まず初めに、ゲージボソンの質量項を求める。ゲージ場 ($\times 2$) と Higgs 場 (VEV $\times$ 2) の相互作用項はゲージボソンの質量項を与える。以下、くりこみ変換 (D.243) 式より裸の場・結合定数をくり込まれた場・結合定数で表し、くり込み定数の展開 (D.245) 式を用いて展開する。またゲージボソンの質量固有状態は (D.247) 式の weak mixing angel、c, s で対角化される。

ゲージボソンの質量項は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Higgs}} &\supset |D_{0\mu}H_0|^2 \\
&= \left|\left(\partial_\mu - ig_0 A^a_{0\mu}\frac{\sigma^a}{2} - i\frac{1}{2}g'_0 B_{0\mu}\right)\left(Z^H\right)^{1/2} H\right|^2 \\
&\supset \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\left(ig_0 A^a_{0\mu}\frac{\sigma^a}{2} + i\frac{1}{2}g'_0 B_{0\mu}\right)\left(-ig_0 A^{b\mu}_0\frac{\sigma^b}{2} - i\frac{1}{2}g'_0 B^\mu_0\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{v_0^2}{8}\left\{g_0^2\left(A^1_{0\mu}\right)^2 + g_0^2\left(A^2_{0\mu}\right)^2\right\} + \frac{v_0^2}{8}\left(-g_0 A^3_{0\mu} + g'_0 B_{0\mu}\right)^2 \\
&= \frac{(v-\delta v)^2}{8} Z^H \left(\frac{Z^A_1}{Z^A_2}\right)^2 \left\{\left(A^1_\mu\right)^2 + \left(A^2_\mu\right)^2\right\} g^2 \\
&\quad + \frac{(v-\delta v)^2}{8} Z^H \left\{\left(\frac{Z^A_1}{Z^A_2}\right)^2 g^2\left(A^3_\mu\right)^2 + \left(\frac{Z^B_1}{Z^B_2}\right)^2 g'^2 \left(B_\mu\right)^2 - 2\left(\frac{Z^A_1 Z^B_1}{Z^A_2 Z^B_2}\right) g g' A^3 \cdot B\right\} \\
&= M_W^2\left(W^+_\mu W^{-\mu}\right) + \delta Z^W_2 M_W^2 \left(W^-_\mu W^{+\mu}\right) + \delta M_W^2 \left(W^+_\mu W^{-\mu}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}M_Z^2 \left(Z_\mu\right)^2 + \frac{1}{2}\delta Z^Z_2 M_Z^2 \left(Z_\mu\right)^2 + \frac{1}{2}\delta M_Z^2 \left(Z_\mu\right)^2 \\
&\quad + M_Z^2\left\{cs\left(\delta Z^A_1 - \delta Z^B_1\right) + cs\left(\delta Z^B_2 - \delta Z^A_2\right)\right\}\left(Z\cdot A\right)
\end{aligned}
\tag{D.251}
$$

となる。3 行目で、$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ からゲージボソンの質量項だけ抜き出した。5 行目で、くり込み変換 (D.243) 式を使って、くり込まれた量に書き直した。6 行目は、くり込み定数の展開 (D.245) 式で、くり込み定数を展開し、weak mixing angle (D.247) 式からゲージボソンの質量固有状態に書き直し、さらに次の (D.252) 式を使った。

$$
\begin{aligned}
M_W = \frac{v}{2}g, &\qquad M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}\frac{v}{2} \\
c = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, &\qquad s = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}
\end{aligned}
\tag{D.252}
$$

ここでゲージボソンの質量項 (D.251) 式の δZ^W_2、δM_W^2、δZ^Z_2、δM_Z^2 の定義は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\delta Z^W_2 &= \delta Z^A_2 \\
\delta M_W^2 &= \left(2\,\delta Z^A_1 - 3\,\delta Z^A_2 + \delta Z^H - \frac{2\delta v}{v}\right) M_W^2 \\
\delta Z^Z_2 &= s^2 \delta Z^B_2 + c^2 \delta Z^A_2 \\
\delta M_Z^2 &= \left(2\,c^2 \delta Z^A_1 + 2\,s^2 \delta Z^B_1 + \delta Z^H - \frac{2\delta v}{v} - 3\,\delta Z^Z_2\right) M_Z^2
\end{aligned}
\tag{D.253}
$$

(D.253) 式の δZ_2^W、δZ_2^Z を上のように定義した理由は、次のゲージ場の運動項 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ で導出する counter term による。

次に、ゲージ場の運動項 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ から counter term を導出する。ゲージ場の運動項 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4}\sum_a \left(\partial_\mu A_{0\nu}^a - \partial_\nu A_{0\mu}^a + g_0\varepsilon^{abc}A_{0\mu}^b A_{0\nu}^c\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_{0\nu} - \partial_\nu B_{0\mu}\right)^2 \\
&\supset -\frac{1}{4}\sum_a \left(\partial_\mu A_{0\nu}^a - \partial_\nu A_{0\mu}^a\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_{0\nu} - \partial_\nu B_{0\mu}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\sum_a \left\{\left(\partial_\mu A_{0\nu}^a\right)\left(\partial^\mu A_0^{a\nu}\right) - \left(\partial_\mu A_{0\nu}^a\right)\left(\partial^\nu A_0^{a\mu}\right)\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\mu B_{0\nu}\right)\left(\partial^\mu B_0^\nu\right) - \left(\partial_\mu B_{0\nu}\right)\left(\partial^\nu B_0^\mu\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_a A_{0\mu}^a\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)A_{0\nu}^a - \frac{1}{2}B_{0\mu}\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)B_{0\nu} \\
&= -\frac{1}{2}Z_2^A\sum_a A_\mu^a\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu^a - \frac{1}{2}Z_2^B B_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)B_\nu \\
&= -\frac{1}{2}\sum_a A_\mu^a\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu^a - \frac{1}{2}B_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)B_\nu \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta Z_2^A\sum_a A_\mu^a\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu^a - \frac{1}{2}\delta Z_2^B B_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)B_\nu \\
&\supset -\frac{1}{2}\delta Z_2^W W_\mu^+\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)W_\nu^- - \frac{1}{2}\delta Z_2^W W_\mu^-\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)W_\nu^+ \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta Z_2^Z Z_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)Z_\nu - \frac{1}{2}\delta Z_2^\gamma A_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta Z_2^{\gamma Z} Z_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu - \frac{1}{2}\delta Z_2^{\gamma Z} A_\mu\left(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right)Z_\nu
\end{aligned} \tag{D.254}
$$

となる。２行目で、ゲージボソンの２点関数に関係する項のみを取り出した。４行目は、作用（action）を考え部分積分を行い、微分の作用する場所を変えた。５行目は、くり込み変換 (D.243) 式を、６行目は、くり込み定数の展開 (D.245) 式を使った。７行目は counter term のみを抜き出し、weak mixing angle (D.247) 式を使ってゲージボソンの質量固有状態に書き直した。ここで、δZ_2^Z,δZ_2^γ, δZ_2^W,$\delta Z_2^{\gamma Z}$ を次の (D.255) 式で定義した。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\delta Z_2^\gamma \\ \delta Z_2^Z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}s^2 & c^2 \\ c^2 & s^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta Z_2^A \\ \delta Z_2^B\end{pmatrix} \\
\delta Z_2^W &= \delta Z_2^A \\
\delta Z_2^{\gamma Z} &= cs\left(\delta Z_2^A - \delta Z_2^B\right)
\end{aligned} \tag{D.255}
$$

また、$\delta Z_2^{\gamma Z}$ は右辺を δZ_2^{γ},δZ_2^Z を使って書き直すと、

$$\delta Z_2^{\gamma Z} = \frac{cs}{c^2 - s^2}\left(\delta Z_2^Z - \delta Z_2^{\gamma}\right) \tag{D.256}$$

と表される。さらに、Z_1 についても同様に weak mixig angle を使って書き直すことにする。そうすると、(D.255) 式と (D.256) 式の δZ_2 と合わせて、一般に δZ_i は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \delta Z_i^{\gamma} \\ \delta Z_i^Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s^2 & c^2 \\ c^2 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Z_i^A \\ \delta Z_i^B \end{pmatrix} \\
\delta Z_i^W &= \delta Z_i^A \\
\delta Z_i^{\gamma Z} &= \frac{cs}{c^2 - s^2}\left(\delta Z_i^Z - \delta Z_i^{\gamma}\right) \qquad (i = 1, 2)
\end{aligned} \tag{D.257}$$

の形にまとめて書くことができる。また (D.253) 式の δM_W^2 と δM_Z^2 は、(D.257) 式を使って書き直すと、次の関係が成り立つ。

$$\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} = \frac{s}{c}\left(3\,\delta Z_2^{\gamma Z} - 2\,\delta Z_1^{\gamma Z}\right) \tag{D.258}$$

以上の計算から、on-shell くり込みのゲージボソンの self energy（２点関数）が導かれる。ゲージボソンの self energy の相殺項 (D.251) 式と (D.254) 式を (D.257) 式を使って書き直すと、くり込まれたゲージボソンの self energy $\hat{\Pi}_{\mathrm{IJ}}(q^2)$（ハットのシンボル ^ が付いた）を以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_{\gamma\gamma}(q^2) &= \Pi_{\gamma\gamma}(q^2) - \delta Z_2^{\gamma} q^2 \\
\hat{\Pi}_{ZZ}(q^2) &= \Pi_{ZZ}(q^2) + \delta M_Z^2 - \delta Z_2^Z\left(q^2 - M_Z^2\right) \\
\hat{\Pi}_{WW}(q^2) &= \Pi_{WW}(q^2) + \delta M_W^2 - \delta Z_2^W\left(q^2 - M_W^2\right) \\
\hat{\Pi}_{Z\gamma}(q^2) &= \Pi_{Z\gamma}(q^2) - \delta Z_2^{\gamma Z} q^2 + \left(\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}\right) M_Z^2
\end{aligned} \tag{D.259}$$

さらに、(D.259) 式に含まれる (D.253) 式で定義した δM_W^2,δM_Z^2 も (D.257) 式を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}
\delta M_W^2 &= M_W^2\left[\frac{s^2}{s^2 - c^2}\left(2\,\delta Z_1^{\gamma} - 3\,\delta Z_2^{\gamma}\right) - \frac{c^2}{s^2 - c^2}\left(2\,\delta Z_1^Z - 3\,\delta Z_2^Z\right) + \delta Z^{\phi} - \frac{2\delta v}{v}\right] \\
\delta M_Z^2 &= M_Z^2\left[2\,\delta Z_1^Z - 3\,\delta Z_2^Z + \delta Z^{\phi} - \frac{2\delta v}{v}\right]
\end{aligned} \tag{D.260}$$

を得る。

この節で得られた最終的な結果は、(D.257) 式、(D.258) 式、(D.259) 式および (D.260) 式である。

D.1.2 fermion self energies

続いてこの節では、fermion の self energy $-i\Sigma(p)$ の on-shell くり込みを行う。ここで fermion の self energy は図 29 のように定義する。

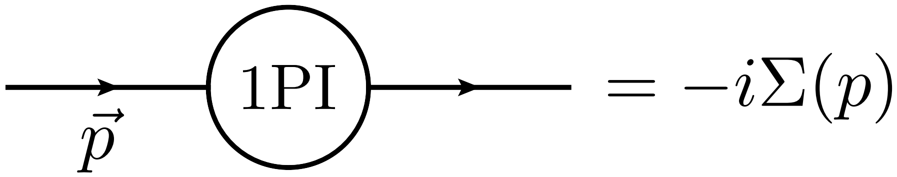


図 29: fermion self energies

fermion に関する Lagrangian $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ は

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{L}_0(i\not{D}_0)L_0 + \bar{l}_{0R}(i\not{D}_0)l_{0R} - \frac{y_{0l}}{\sqrt{2}}v_0\,\bar{l}_{0L}l_{0R} + \text{h.c.} \tag{D.261}$$

の形で与えられる。ここで L_0 は $SU(2)_L$ doublet の裸のレプトン場、l_{0L} は left-handed の裸の荷電レプトン、l_{0R} は right-handed の裸の荷電レプトン、y_{0l} は裸の湯川結合定数、v_0 は裸の真空期待値、$D_{0\mu}$ は裸の共変微分をそれぞれ表す。

まず、裸の共変微分を D.1 節のくり込み変換 (D.243) 式とくり込み定数の展開 (D.245) を用いて書き直す。すると裸の共変微分 $D_{0\mu}$ は

$$\begin{aligned} D_{0\mu} &= \partial_\mu - ig_0 A^a_{0\mu}\frac{\sigma^a}{2} - ig_0 Y B_{0\mu} \\ &= \partial_\mu - igA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2} - ig'YB_\mu \\ &\quad -i(\delta Z^A_1 - \delta Z^A_2)gA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2} - i(\delta Z^B_1 - \delta Z^B_2)g'YB_\mu \end{aligned} \tag{D.262}$$

となる。ここで σ^a は (D.250) 式の Pauli 行列、Y はハイパーチャージである。さらに、D.1.1 節の weak mixing angle c, s に関する式、(D.247) と (D.252) を用いて、(D.262) 式をゲージ場の質量固有状態に書き直すと

$$\begin{aligned} D_{0\mu} &= \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-) - i\frac{g}{c}(T^3 - s^2 Q)Z_\mu - iQeA_\mu \\ &\quad -i(\delta Z^A_1 - \delta Z^A_2)\frac{g}{\sqrt{2}}(T^+W^+_\mu + T^-W^-_\mu) \\ &\quad -i\{(\delta Z^A_1 - \delta Z^A_2)cgT^3 - (\delta Z^B_1 - \delta Z^B_2)sg'Y\}Z_\mu \\ &\quad -i\{(\delta Z^A_1 - \delta Z^A_2)eT^3 + (\delta Z^B_1 - \delta Z^B_2)eY\}A_\mu \end{aligned} \tag{D.263}$$

となる。ここで $T^\pm$ は $T^\pm = (\sigma^1 \pm i\sigma^2)/2$、 T^3 はアイソスピンで $\sigma^3/2$ の固有値である。また、QED 電荷 Q は $Q = T^3 + Y$ であり、QED の結合定数 e は $e = gg'/\sqrt{g^2 + g'^2}$ （もしく

は $g=e/s$）と決まる。そして、(D.263) 式中のくり込み定数 $\delta Z_{1,2}^{A,B}$ を、(D.257) 式の weak mixing angle のコンビネーションで表されたくり込み定数 $\delta Z_{1,2}^{Z,\gamma}$ で書き直すと、$(\delta Z_1^A-\delta Z_2^A)$ と $(\delta Z_1^B-\delta Z_2^B)$ は、

$$\begin{aligned}\delta Z_1^A-\delta Z_2^A &= \frac{1}{s^4-c^4}(s^2\delta Z_1^\gamma-c^2\delta Z_1^Z-s^2\delta Z_2^\gamma+c^2\delta Z_2^Z)\\ &= \frac{1}{s^2-c^2}\{s^2(\delta Z_1^\gamma-\delta Z_2^\gamma)-c^2(\delta Z_1^Z-\delta Z_2^Z)\}\\ \delta Z_1^B-\delta Z_2^B &= \frac{1}{s^4-c^4}(-c^2\delta Z_1^\gamma+s^2\delta Z_1^Z+c^2\delta Z_2^\gamma-s^2\delta Z_2^Z)\\ &= \frac{1}{s^2-c^2}\{s^2(\delta Z_1^Z-\delta Z_2^Z)-c^2(\delta Z_1^\gamma-\delta Z_2^\gamma)\}\end{aligned}$$

と書き直されるので、裸の共変微分 (D.263) 式は

$$\begin{aligned}D_{0\mu} &= \partial_\mu-i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+T^++W_\mu^-T^-)-i\frac{g}{c}(T^3-s^2Q)Z_\mu-iQeA_\mu\\ &\quad -i(\delta Z_1^W-\delta Z_2^W)\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+T^++W_\mu^-T^-)\\ &\quad -i\frac{g}{c}\left[(\delta Z_1^Z-\delta Z_2^Z)T^3-\frac{1}{s^2-c^2}\left\{s^4(\delta Z_1^Z-\delta Z_2^Z)-s^2c^2(\delta Z_1^\gamma-\delta Z_2^\gamma)\right\}Q\right]Z_\mu\\ &\quad -i\left[(\delta Z_1^\gamma-\delta Z_2^\gamma-\delta Z_1^Z+\delta Z_2^Z)\frac{1}{s^2-c^2}eT^3\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{s^2-c^2}\left\{s^2(\delta Z_1^Z-\delta Z_2^Z)-c^2(\delta Z_1^\gamma-\delta Z_2^\gamma)\right\}eQ\right]A_\mu \qquad \text{(D.264)}\end{aligned}$$

と表すことができる。

さて、fermion の self energy $-i\Sigma(p)$ であるが、これは fermion に関する Lagrangian (D.261) 式において、裸の運動項と裸の質量項に相当する。ここで裸の運動項とは、裸の共変微分 (D.264) 式の第 1 項 ∂_μ から来る項を指す。

よって (D.261) 式のフェルミオンの裸の運動項ならびに裸の質量項は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion}} &\supset \bar{l}_{0L}\, i\partial\!\!\!/\, l_{0L} + \bar{l}_{0R}\, i\partial\!\!\!/\, l_{0R} - \frac{y_{0l}}{\sqrt{2}} v_0 \bar{l}_{0L} l_{0R} + \text{h.c.} \\
&= Z_L \bar{l}_L\, i\partial\!\!\!/\, l_L + Z_R \bar{l}_R\, i\partial\!\!\!/\, l_R \\
&\quad - \left\{ \frac{(Z^H)^{-1/2} Z_1^l y_l}{\sqrt{2}} \right\} \left\{ (Z^H)^{1/2} (v - \delta v) \right\} (Z_L)^{1/2} (Z_R)^{1/2} \bar{l}_L l_R + \text{h.c.} \\
&= (1 + \delta Z_L) \bar{l}_L\, i\partial\!\!\!/\, l_L + (1 + \delta Z_R) \bar{l}_R\, i\partial\!\!\!/\, l_R \\
&\quad - \frac{y_l}{\sqrt{2}} (1 + \delta Z_1^l)(v - \delta v)(1 + \delta Z_L)^{1/2} (1 + \delta Z_R)^{1/2} \bar{l}_L l_R + \text{h.c.} \\
&= \bar{l}_L\, i\partial\!\!\!/\, l_L + \bar{l}_R\, i\partial\!\!\!/\, l_R - m_l \bar{l}_L l_R + \text{h.c.} \\
&\quad + \bar{l}\, i\partial\!\!\!/\, (\delta Z_L P_L + \delta Z_R P_R) l - m_l \left(\frac{\delta Z_L}{2} + \frac{\delta Z_R}{2} - \frac{\delta v}{v} + \delta Z_1^l \right) \bar{l}_L l_R + \text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{D.265}
$$

で与えられる。ただし、２行目で、くり込み変換 (D.243) 式を、３行目で、くり込み定数の展開 (D.245) 式を用いた。

最後に、図 29 で表された fermion の self energy $-i\Sigma(p)$ の、くり込まれた表式を求める。ここで fermion l の self energy $-i\Sigma^l(p)$ を、次のようにカイラリティーで分解する。

$$
\Sigma^l(p) = \Sigma_L^l(p^2) p\!\!\!/ P_L + \Sigma_R^l(p^2) p\!\!\!/ P_R + \Sigma_S^l(p^2) m_l \tag{D.266}
$$

ただし、m_l は fermion l の質量である。fermion の運動項と質量項の相殺項 (D.265) 式より、くり込まれた fermion l の self energy $\hat{\Sigma}^l(p)$ （ハットのシンボル $\hat{}$ がついた）を以下のように書き下せる。

$$
\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^l(p) &= \Sigma_L^l(p^2) p\!\!\!/ P_L + \Sigma_R^l(p^2) p\!\!\!/ P_R + \Sigma_S^l(p^2) m_l \\
&\quad - p\!\!\!/ (\delta Z_L P_L + \delta Z_R P_R) + m_l \left(\frac{\delta Z_L}{2} + \frac{\delta Z_R}{2} - \frac{\delta v}{v} + \delta Z_1^l \right)
\end{aligned}
\tag{D.267}
$$

この節で得られた最終的な結果は、(D.264) 式と (D.267) 式である。

D.2 On-shell くり込み条件とくり込み定数

前の D.1 節の結果を用いて、on-shell くり込み条件からくり込み定数を決定する。なお本節では、フェルミオンとゲージボソンの vertex corrections の相殺項の導出に必要な計算に限って、議論を進める。本節に関連したトピックの、QED 電荷 e のくり込み、ならびに weak mixing angle s_W のくり込みについては、文献 [114] を参照。以下、1. ゲージボソンの２点関数の on-shell くり込み、2. フェルミオンの２点関数の on-shell くり込み、の順にくり込み定数を求める。

D.2.1　ゲージボソンの２点関数に関する on-shell くり込み

ゲージボソンの２点関数に関する on-shell くり込み条件は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\hat{\Pi}_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} &= 0, &\text{(D.268)}\\ \hat{\Pi}_{ZZ}(M_Z^2) &= 0, &\text{(D.269)}\\ \hat{\Pi}_{WW}(M_W^2) &= 0, &\text{(D.270)}\\ \hat{\Pi}_{Z\gamma}(0) &= 0. &\text{(D.271)}\end{aligned}$$

ここで、(D.268) 式は、フォトンの波動関数くり込み (wave function renormalizarion) の規格化条件、(D.269) 式は、Z ボソンの（量子補正を取り入れた）プロパゲーターが $q^2 = M_Z^2$ で pole をもつ条件、(D.270) 式は、W ボソンの（量子補正を取り入れた）プロパゲーターが $q^2 = M_W^2$ で pole をもつ条件、(D.271) 式は、on-shell のフォトンに Z ボソンの混合がない条件、にそれぞれ対応する[#43]。

[#43]全ての量子補正を含むゲージボソンのプロパゲーターを、$-ig^{\mu\nu}G_{IJ}(q^2)$ とおく。それに対し、1PI の量子補正のみを含むゲージボソンのプロパゲーターを、$ig^{\mu\nu}\Pi_{IJ}(q^2)$ とおく。ただし I, J はゲージ場を表し、q^μ, q^ν に比例する項は、図 28 の場合と同様に無視する。Dyson resummation より $G_{\gamma\gamma}(q^2), G_{ZZ}(q^2), G_{Z\gamma}(q^2)$ は、

$$\begin{aligned}-ig^{\mu\nu}G_{\gamma\gamma}(q^2) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2}\left[ig_{\rho\sigma}\Pi_{\gamma\gamma}(q^2)\right]\left[-ig^{\sigma\nu}G_{\gamma\gamma}(q^2)\right] + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2}\left[-ig_{\rho\sigma}\Pi_{Z\gamma}(q^2)\right]\left[-ig^{\sigma\nu}G_{Z\gamma}(q^2)\right]\\ -ig^{\mu\nu}G_{ZZ}(q^2) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2-M_Z^2} + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2-M_Z^2}\left[ig_{\rho\sigma}\Pi_{ZZ}(q^2)\right]\left[-ig^{\sigma\nu}G_{ZZ}(q^2)\right]\\ &\quad + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2-M_Z^2}\left[-ig_{\rho\sigma}\Pi_{Z\gamma}(q^2)\right]\left[-ig^{\sigma\nu}G_{Z\gamma}(q^2)\right]\\ -ig^{\mu\nu}G_{Z\gamma}(q^2) &= \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2-M_Z^2}\left[ig_{\rho\sigma}\Pi_{ZZ}(q^2)\right]\left[-ig^{\sigma\nu}G_{Z\gamma}(q^2)\right] + \frac{-ig^{\mu\rho}}{q^2-M_Z^2}\left[-ig_{\rho\sigma}\Pi_{Z\gamma}(q^2)\right]\left[-ig^{\sigma\nu}G_{\gamma\gamma}(q^2)\right]\end{aligned}$$

で与えられる。これを $G_{\gamma\gamma}(q^2), G_{ZZ}(q^2), G_{Z\gamma}(q^2)$ の連立方程式として解くと、

$$G_{\gamma\gamma}(q^2) = \frac{1}{q^2-\Pi_{\gamma\gamma}}, \quad G_{ZZ}(q^2) = \frac{1}{q^2-M_Z^2-\Pi_{ZZ}}, \quad G_{Z\gamma}(q^2) = \left(\frac{1}{q^2-M_Z^2-\Pi_{ZZ}}\right)\frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2-\Pi_{\gamma\gamma}}$$

を得る。フォトンの波動関数くり込みの規格化条件は、$q^2 \to 0$ でフォトンのプロパゲーターが $-ig^{\mu\nu}/q^2$ となることである。したがって、フォトンの波動関数くり込みは、プライム記号 $\prime$ を q^2 の微分とすると

$$-ig^{\mu\nu}G_{\gamma\gamma}(q^2) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 - \left(\Pi_{\gamma\gamma}(0) + q^2\Pi'_{\gamma\gamma}(0) + \mathcal{O}(q^4) + \cdots\right)} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2(1-\Pi'_{\gamma\gamma}(0) - \mathcal{O}(q^2) + \cdots)}$$

となる。以上から、フォトンの波動関数くり込み (D.268) 式が得られた。また、$G_{ZZ}(q^2)$ および $G_{Z\gamma}(q^2)$ の式から、Z ボソンの pole mass でのくり込み条件 (D.269) 式と、フォトンと Z ボソンの混合の条件式 (D.271) を得る。W ボソンに関しても同様である。

まず (D.259) の 1 行目の式と、on-shell くり込みの条件式 (D.268) から、ただちに

$$\delta Z_2^\gamma \;\; = \;\; \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0}. \tag{D.272}$$

次に (D.259) の 2 , 3 , 4 行目の式に、on-shell くり込みの条件式 (D.269), (D.270),(D.271) を用いて得られた式に、$\delta M_Z^2, \delta M_W^2$ に関する (D.260) 式と (D.272) 式を用いて整理すると、δZ_2^Z に関する式

$$\delta Z_2^Z = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} - 2\left(\frac{c^2 - s^2}{sc}\right)\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2} + \left(\frac{c^2 - s^2}{s^2}\right)\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right) \tag{D.273}$$

を得る。ところで、δZ_1^γ ならびに δZ_1^Z に関して同様に計算すると、δZ_2^Z のように $\delta M_Z^2, \delta M_W^2$ のコンビネーションで書かれた表式にならず、$\delta Z^\phi, \delta v$ に陽に依った表式になる。しかし、ここで一般化された Ward identity を用いると、δZ_1^γ ならびに δZ_1^Z の表式も、$\delta M_Z^2, \delta M_W^2$ のコンビネーションで書くことができる。　文献 [114] にて与えられた、一般化された Ward identity (詳しい議論は文献 [115, 116] を参照)

$$\delta Z_1^B = \delta Z_2^B \tag{D.274}$$

を (D.271) 式に用いると、以下の恒等式が得られる。

$$\delta Z_1^\gamma - \delta Z_2^\gamma = \frac{s}{c}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2} \tag{D.275}$$

よって δZ_1^γ は、(D.275) 式からただちに求まる。最後に δZ_1^Z も (D.271) 式

$$0 = \Pi_{\gamma Z}(0) + (\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z})M_Z^2,$$

からただちに求まる。また、$\delta Z_2^W, \delta Z_1^W$ についても、(D.257) 式より $\delta Z_2^W = \delta Z_2^A$, $\delta Z_1^W = \delta Z_1^A$ であるから、$Z_{1,2}^{Z,\gamma}$ の結果を用いて容易に求まる。

以上の結果をまとめると、on-shell くり込み条件での、ゲージボソンの 2 点関数に関する

くりこみ定数 $\delta Z_2^\gamma, \delta Z_1^\gamma, \delta Z_2^Z, \delta Z_1^Z, \delta Z_2^W, \delta Z_1^W$ は、次のように書ける。

$$\delta Z_2^\gamma = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0}, \tag{D.276}$$

$$\delta Z_1^\gamma = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} - \frac{s}{c}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}, \tag{D.277}$$

$$\delta Z_2^Z = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} - 2\left(\frac{c^2-s^2}{sc}\right)\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2} + \left(\frac{c^2-s^2}{s^2}\right)\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right), \tag{D.278}$$

$$\delta Z_1^Z = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} - \left(\frac{3c^2-2s^2}{sc}\right)\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2} + \left(\frac{c^2-s^2}{s^2}\right)\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right), \tag{D.279}$$

$$\delta Z_2^W = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} - 2\frac{c}{s}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2} + \frac{c^2}{s^2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right), \tag{D.280}$$

$$\delta Z_1^W = \left.\frac{\partial \Pi_{\gamma\gamma}}{\partial q^2}\right|_{q^2=0} - \left(\frac{3-2s^2}{sc}\right)\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2} + \frac{c^2}{s^2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right). \tag{D.281}$$

この節で得られた最終的な結果は、(D.276), (D.277), (D.278), (D.279), (D.280), (D.281) 式である。

D.2.2 フェルミオンの２点関数に関する on-shell くり込み

フェルミオン l の２点関数に関する on-shell くり込み条件は、以下のように与えられる。

$$\hat{\Sigma}^l(\not{p} = m_l) = 0 \tag{D.282}$$

$$\lim_{\not{p}\to m_-}\frac{i(\not{p}+m_-)}{p^2-m_-^2}\hat{\Sigma}^l(\not{p})u_-(p) = 0 \tag{D.283}$$

ここで (D.282) 式は、質量 m_l のフェルミオン l の（量子補正を取り入れた）プロパゲーターが、$\not{p} = m_l$ で pole をもつ条件、(D.283) 式はフェルミオンの波動関数くり込み (wave function renormalization) の規格化条件である。ただし、(D.283) 式はアイソスピン $T^3 = -1/2$ の、荷電レプトンないしダウンタイプのクォークに対する条件式である。$u_-(p)$, m_- はそれぞれ、アイソスピン $T^3 = -1/2$ の粒子の波動関数と質量を表す。(D.283) 式はくり込み変換 (D.243) 式の、left-handed, right-handed のフェルミオンのくり込み定数 Z_L, Z_R を同時に決める。

フェルミオンの（量子補正を取り入れた）プロパゲーター $S_F^l(p)$ は、くり込まれた fermion l の self energy $\hat{\Sigma}^l(p)$ (D.267) 式を使って、以下のように与えられる。

$$S_F^l(p) = \frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2} + \frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2}(-i\hat{\Sigma}^l(\not{p}))\frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2} \tag{D.284}$$

ここで、(D.267) 式の $\Sigma_L^l(p^2), \Sigma_R^l(p^2), \Sigma_S^l(p^2)$ を $p^2 = m_l^2$ の周りで展開すると、(D.284) 式は

$$
\begin{aligned}
S_F^l(p) &= \frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2} \\
&\quad + \frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2}\left[\Sigma_L^l(p^2)\not{p}P_L + \Sigma_R^l(p^2)\not{p}P_R + \Sigma_S^l(p^2)m_l\right. \\
&\quad \left. + m_l\left(\frac{\delta Z_L}{2} + \frac{\delta Z_R}{2} - \frac{\delta v}{v} + \delta Z_1^l\right) - \not{p}(\delta Z_L P_L + \delta Z_R P_R)\right]\frac{(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2} \\
&= \frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2} \\
&\quad + \frac{i(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2}\left[(\not{p}-m_l)P_L\left\{\Sigma_L^l(m_l^2) + \left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2) + \cdots\right\}\right. \\
&\quad + m_l P_L\left\{\Sigma_L^l(m_l^2) + \left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2) + \cdots\right\} \\
&\quad + (\not{p}-m_l)P_R\left\{\Sigma_R^l(m_l^2) + \left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2) + \cdots\right\} \\
&\quad + m_l P_R\left\{\Sigma_R^l(m_l^2) + \left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2) + \cdots\right\} \\
&\quad + m_l\left\{\Sigma_S^l(m_l^2) + \left.\frac{d\Sigma_S^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2) + \cdots\right\} \\
&\quad + m_l\left(\frac{\delta Z_L}{2} + \frac{\delta Z_R}{2} - \frac{\delta v}{v} + \delta Z_1^l\right) - (\not{p}-m_l)(\delta Z_L P_L + \delta Z_R P_R) \\
&\quad \left. - m_l(\delta Z_L P_L + \delta Z_R P_R)\right]\frac{(\not{p}+m_l)}{p^2-m_l^2}
\end{aligned} \tag{D.285}
$$

のように書き下せる。フェルミオン l の pole mass の条件式 (D.282) を用いると、(D.286) 式は

$$
\begin{aligned}
S_F^l(p) &= \frac{i(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2}+\frac{i(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2}\,\hat{\Sigma}^l(\not p)\,\frac{(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2} \\
&= \frac{i(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2} \\
&\quad +\frac{i(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2}\left[(\not p-m_l)P_L\left\{\Sigma_L^l(m_l^2)+\left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2)+\cdots\right\}\right. \\
&\quad +m_lP_L\left\{\left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2)+\cdots\right\} \\
&\quad +(\not p-m_l)P_R\left\{\Sigma_R^l(m_l^2)+\left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2)+\cdots\right\} \\
&\quad +m_lP_R\left\{\left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2)+\cdots\right\} \\
&\quad \left.+m_l\left\{\left.\frac{d\Sigma_S^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}(p^2-m_l^2)+\cdots\right\}-(\not p-m_l)(\delta Z_LP_L+\delta Z_RP_R)\right]\frac{(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2}
\end{aligned}
\tag{D.286}
$$

となる。さらに、アイソスピン $-1/2$ のフェルミオン l の波動関数を $u_l(p)$ とすると、(D.286) 式から得られた、くり込まれたフェルミオンの self energy $\hat{\Sigma}^l(\not p)$ より、フェルミオンの波動関数くり込みの条件式 (D.283) は

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\not p\to m_-}\frac{i(\not p+m_l)}{p^2-m_l^2}\hat{\Sigma}^l(\not p)u_l(p) \\
&= \left[P_L\Sigma_L^l(m_l^2)+(m_l^2P_R+m_l^2P_L)\left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}+P_R\Sigma_R^l(m_l^2)\right. \\
&\quad \left.+(m_l^2P_L+m_l^2P_R)\left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}+2m_l^2\left.\frac{d\Sigma_S^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}-(\delta Z_lP_L+\delta Z_RP_R)\right]u_l(p)
\end{aligned}
\tag{D.287}
$$

となる。ただし Dirac 方程式 $\not p u_l(p)=m_lu_l(p)$ を用いた後に、$\not p\to m_l$ の極限をとった。したがって、(D.287) 式より on-shell くり込み条件での、フェルミオン l の２点関数に関するくり

込み定数 $\delta Z_L, \delta Z_R$ は、次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
\delta Z_L &= \Sigma_L^l(m_l^2) + m_l^2 \left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2} + m_l^2 \left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2} + 2m_l^2 \left.\frac{d\Sigma_S^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2} \\
\delta Z_R &= \Sigma_R^l(m_l^2) + m_l^2 \left.\frac{d\Sigma_L^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2} + m_l^2 \left.\frac{d\Sigma_R^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2} + 2m_l^2 \left.\frac{d\Sigma_S^l(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_l^2}
\end{aligned}
\tag{D.288}
$$

最後に、外線ニュートリノの有限な波動関数くり込み (external ν line finite wavefunction renormalization) について議論する。フェルミオンの波動関数くり込みの条件式 (D.283) から、荷電レプトンに関して、$SU(2)_L$ doublet のくり込み定数 δZ_L と $SU(2)_L$ singlet のくり込み定数 δZ_R は、(D.288) 式のように決まり、荷電レプトンのプロパゲータの留数 (residue) は 1 になる。ところが、標準模型には $SU(2)_L$ singlet の right-handed ニュートリノが存在しないため、left-handed のニュートリノのプロパゲーターは、荷電レプトンの波動関数くり込みで決まる、くり込み定数 δZ_L のみによってくり込まれることになる。このとき、標準模型の left-handed ニュートリノは、$SU(2)_L$ singlet の right-handed ニュートリノからのくり込み定数 δZ_R でプロパゲーターの residue を調整できないため、left-handed ニュートリノのプロパゲーターの residue は 1 からずれることになる。

くり込まれた left-handed ニュートリノの self energy $\hat{\Sigma}^\nu(p)$ ((D.267) 式で $l = \nu$ とした) は、m_l を 0 にとった (D.267) 式で $\not{p}P_L$ に比例する項に対応する。したがって、left-handed ニュートリノの（量子補正を取り入れた）プロパゲーター $S_F^\nu(p)$ は

$$
\begin{aligned}
S_F^\nu(p) &= \frac{iP_L\not{p}}{p^2} + \frac{iP_L\not{p}}{p^2}\hat{\Sigma}^\nu(\not{p})\frac{P_L\not{p}}{p^2} \\
&= \frac{iP_L\not{p}}{p^2} + \frac{iP_L\not{p}}{p^2}\left(\Sigma_L^\nu(p^2)\not{p}P_L - \not{p}\delta Z_L P_L\right)\frac{P_L\not{p}}{p^2} \\
&= \frac{iP_L\not{p}}{p^2}\left[1 + (\Sigma_L^\nu(p^2) - \delta Z_L)\right] \\
&\simeq \frac{iP_L\not{p}}{p^2}\left[1 + \frac{1}{2}(\Sigma_L^\nu(p^2) - \delta Z_L)\right]^2
\end{aligned}
\tag{D.289}
$$

のように表すことができる。したがって、有限な波動関数くり込みの効果を取り入れるには、２点関数が $\langle\Omega|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|\Omega\rangle$ のように表されることに注意して[#44]、left-handed ニュートリノの外線 $\bar{u}_\nu^s(p)$ を次のように、有限な波動関数くり込みの因子を掛けて置き換えればよい。

$$
\bar{u}_\nu^s(p) \to \left(1 + \frac{1}{2}\left[\Sigma_L^\nu(0) - \delta Z_L\right]\right)\bar{u}_\nu^s(p) \tag{D.290}
$$

この節で得られた最終的な結果は、(D.288) 式および (D.290) 式である。

[#44] 有限な波動関数くり込みに関しては LSZ の reduction formula [95] を参照。

D.3 Vertex corrections

最後に、本節ではくり込み変換と相殺項 D.1 節と、くり込み条件とくり込み定数 D.2 節で得られた結果を用いて、フェルミオンとゲージボソンの vertex corrections の相殺項を導出する。以下ではフェルミオンをレプトンとし、$\mathrm{SU}(2)_L$ doublet のレプトンを L_α $(= (\nu_{\alpha L},\ l_{\alpha L})^{\mathrm{T}})$、SU(2) singlet の荷電レプトンを $l_{\alpha R}$ と表すことにする。ここで添字の $\alpha = 1, 2, 3$ はフレーバーの足を表し、それぞれエレクトロン、ミューオン、タウを表す。ただし、以後の計算ではフレーバーの足は省略し、ニュートリノを ν、荷電レプトンを l と表す。まず、D.1 節で得られた裸の共変微分 $D_{0\mu}$ (D.264) 式を、ゲージボソンの 2 点関数に関するくりこみ定数 $\delta Z_2^\gamma, \delta Z_1^\gamma, \delta Z_2^Z, \delta Z_1^Z, \delta Z_2^W, \delta Z_1^W$ の式 (D.276), (D.277), (D.278), (D.279), (D.280), (D.281) を使って書き直すと

$$\begin{aligned}
D_{0\mu} &= \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{g}{c}(T^3 - s^2 Q)Z_\mu - iQeA_\mu \\
&\quad -i\left(-\frac{1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}\right)\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) \\
&\quad -i\frac{g}{c}\left[\left(-\frac{c}{s}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}\right)T^3\right]Z_\mu \\
&\quad -i\left[\left(\frac{c^2-s^2}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}\right)\frac{1}{s^2-c^2}eT^3\right]A_\mu
\end{aligned} \tag{D.291}$$

となる。したがって、レプトンとゲージボソンの相互作用項 $\mathcal{L}$[#45]は、フェルミオンに関する Lagrangian (D.261) 式から

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \begin{pmatrix}\bar{\nu}_{0L} & \bar{l}_{0L}\end{pmatrix} i\gamma^\mu \left[-i\left(1-\frac{1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}\right)\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+T^+ + W_\mu^-T^-)\right]\begin{pmatrix}\bar{\nu}_{0L}\\ \bar{l}_{0L}\end{pmatrix} \\
&\quad +\bar{\nu}_{0L}\, i\gamma^\mu\left[-i\frac{g}{c}\left(T_\nu^3-\frac{c}{s}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}T_\nu^3\right)Z_\mu - i\left(\frac{-1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}eT_\nu^3\right)A_\mu\right]\nu_{0L} \\
&\quad +\bar{l}_{0L}\, i\gamma^\mu\left[-i\frac{g}{c}\left(T_l^3-s^2Q_l-\frac{c}{s}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}T_l^3\right)Z_\mu - i\left(eQ_l-\frac{1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}eT_l^3\right)A_\mu\right]l_{0L} \\
&\quad +\bar{l}_{0R}\, i\gamma^\mu\left[-i\frac{g}{c}\left(-s^2Q_l\right)Z_\mu - i\left(eQ_l\right)A_\mu\right]l_{0R} \\
&= \bar{\nu}\gamma^\nu\left[P_L\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\right]l + \text{h.c.} + \bar{\nu}\gamma^\mu\left[P_L\frac{g}{c}T_\nu^3 Z_\mu\right]\nu \\
&\quad +\bar{l}\gamma^\mu\left[\left\{P_L\frac{g}{c}(T_l^3-s^2Q_l)+P_R\frac{g}{c}(-s^2Q_l)\right\}Z_\mu + eQ_lA_\mu\right]l \\
&\quad +\bar{\nu}\gamma^\nu\left[P_L\left(\delta Z_L-\frac{1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}\right)\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\right]l + \text{h.c.} \\
&\quad +\bar{\nu}\gamma^\mu\left[P_L\frac{g}{c}\left(-\frac{c}{s}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}T_\nu^3+\delta Z_LT_\nu^3\right)Z_\mu + P_L\left(-\frac{1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}eT_\nu^3\right)A_\mu\right]\nu \\
&\quad +\bar{l}\gamma^\mu\left[\left\{P_L\frac{g}{c}\left(-\frac{c}{s}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}T_l^3+\delta Z_L(T_l^3-s^2Q_l)\right)+P_R\frac{g}{c}\delta Z_R(-s^2Q_l)\right\}Z_\mu\right. \\
&\quad \left.+\left\{P_L\left(-\frac{1}{sc}\frac{\Pi_{Z\gamma}(0)}{M_Z^2}eT_l^3+\delta Z_LeQ_l\right)+P_R(\delta Z_ReQ_l)\right\}A_\mu\right]l
\end{aligned}
\tag{D.292}
$$

となる。ここで $T_\nu^3 = 1/2$ はニュートリノのアイソスピン、$T_l^3 = -1/2$ は荷電レプトンのアイソスピン、$Q_l = -1$ は荷電レプトンの QED 電荷である。

以上から、この節で得られた最終的な結果は、レプトンとゲージボソンの vertex corrections の相殺項 (D.292) 式である。なお、(D.292) 式中に含まれる Z と γ の混合 $\Pi_{Z\gamma}(0)$ は、non-abelian の bosonic なループの場合のみ $\Pi_{Z\gamma}(0) \neq 0$ となる [114]。したがって、$\Pi_{Z\gamma}(0)$ に non-abelian のゲージボソンと、その Goldstone-boson のループが寄与する場合を除いて、QED の場合と同様、フェルミオンとゲージボソンの vertex corrections は、外線のフェルミオンの波動関数くり込みで決まるくり込み定数、$\delta Z_L, \delta Z_R$ によってくり込まれる。

[#45] 裸の運動項と裸の質量項は (D.265) 式で計算済み。

E MadGraph4

MadGraph の標準模型のモデルファイルを拡張することで、LHC 実験における新粒子の生成断面積を計算できる。この節では参考のため、例として本研究で議論した、右巻きのミューオンのみが新しい湯川相互作用をもつ模型に含まれる新しい $SU(2)_L$ singlet のフェルミオン χ とボソン ϕ の生成断面積を計算するコードを載せた。

より詳しい議論は、MadGraph V4 のマニュアルおよび HELAS:HELicity Amplitude Subroutine for Feynman Diagram Evaluation [117] を参照。

E.1 particles.dat

```
h         h         S         D       HMASS HWIDTH  S   h    25

#MODEL EXTENSION
chi       chi~      F         S       CHMASS CHWIDTH  S   chi    50
phi       phi       S         D       PHMASS PHWIDTH  S   phi    51
# END
```

左から、1:粒子の名前、2:反粒子の名前、3:（S:scalar/F:fermion/V:vector）、4:ダイアグラムの線種（S:straight/D:dotted/W:wavy）、5:新粒子の質量の変数名、6:新粒子の崩壊幅の変数名、7:カラー（S:singlet/T:triplet/O:octet）、8:ダイアグラムで使用される名前、9:粒子の ID ナンバー（PDG code）

E.2 interactions.dat

```
z  z  h  h  GZZHH GZZHH QED QED


#   USRVertex
chi chi a GAC QED
chi chi z GZC QED
mu- chi phi GMCP QED
chi mu- phi GCMP QED
```

左から、1:粒子１、2:粒子２、粒子３、4:結合の名前、5:Class（QED or QCD）

```
a dp+ dp-  GAPD QED
z up+ up-  GZPU QED
z dp+ dp-  GZPD QED
w+ up- dp+ GWPP QED
w- dp- up+ GWPP QED
```

E.3 VariableName.dat

```
a_cp #first variable name
b_cp #second variable name
c_cp #second variable name
ynew #new Yukawa coupling constant
```

E.4 couplings.f

```
c----------------------------------------------------------
c Set Photon Width to Zero, used by symmetry optimization
c----------------------------------------------------------

      awidth = 0d0
c************************************
c UserMode couplings
c************************************

      GAC(1)=dcmplx(ee,Zero)
      GAC(2)=dcmplx(ee,Zero)
      GZC(1)=dcmplx(-ey,Zero)
      GZC(2)=dcmplx(-ey,Zero)
      GMCP(1)=dcmplx(Zero,Zero)
      GMCP(2)=dcmplx(-ynew,Zero)
```

```
      GCMP(1)=dcmplx(-ynew,Zero)
      GCMP(2)=dcmplx(Zero,Zero)

c----------------------------
c end subroutine coupsm
c----------------------------
```

E.5 proc_card.dat

```
#*********************************************************************
# Process(es) requested : mg2 input                                  *
#*********************************************************************
# Begin PROCESS # This is TAG. Do not modify this line

pp>Z>chichi~    @1       # First Process
QCD=99                    # Max QCD couplings
QED=10                    # Max QED couplings
end_coup                  # End the couplings input

done               # this tells MG there are no more procs

# End PROCESS  # This is TAG. Do not modify this line
#*********************************************************************
# Model information                                                  *
#*********************************************************************
# Begin MODEL  # This is TAG. Do not modify this line
XXXXXXX
# End   MODEL  # This is TAG. Do not modify this line
#*********************************************************************
```

ただし XXXXXXX は、Models ディレクトリ（Template ディレクトリと同じ階層）内に作ったモデルファイルの名前である。

E.6 run_card.dat

```
#*********************************************************************
# Collider type and energy                                           *
#*********************************************************************
        1     = lpp1  ! beam 1 type (0=NO PDF)
        1     = lpp2  ! beam 2 type (0=NO PDF)
     4000     = ebeam1  ! beam 1 energy in GeV
     4000     = ebeam2  ! beam 2 energy in GeV
```

lpp1/lpp2 = 0:electron, 1:proton, -1:antiproton, 2:photons

F　3.2 節の補足

F.1　ゲージボソンの self-energy functions の計算

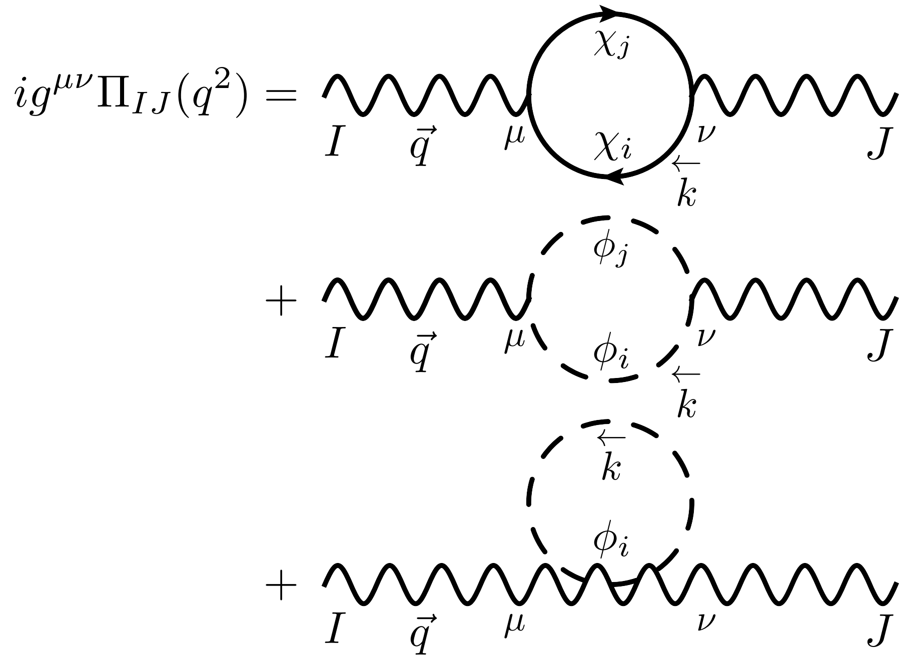


図 30: ゲージボソンの self-energy functions のダイアグラム。ただし、q^μ, q^ν に比例する項は無視した。

初めに図 30 のダイアグラムのような、フェルミオン χ_i, χ_j とゲージボソン I, J $(I, J = \gamma,\ Z,\ W^\pm)$ の vector-like な相互作用 $\mathcal{L}_\chi$ を考える。

$$\mathcal{L}_\chi = (g_I^{\chi_i\chi_j})\bar{\chi}_i\gamma^\mu\chi_j V_\mu^I + \cdots\,. \tag{F.293}$$

ここで V_μ^I はゲージボソンを表し、$V_\mu^\gamma,\ V_\mu^Z,\ V_\mu^{W^\pm} = A_\mu,\ Z_\mu,\ W_\mu^\pm$ である。ここで、結合定数 $(g_I^{\chi_i\chi_j})$ の i と j の添字を入れ替えた結合定数 $(g_I^{\chi_j\chi_i})$ は、結合定数の複素共役を表すものとする。そうすると、χ_i と χ_j の添字の入れ替え、ならびに、添字 I が表すゲージ場の複素共役をとることで、(F.293) 式で表されたゲージ相互作用のエルミート共役を書き表すことができる。図 30 のダイアグラムに示された、フェルミオン χ_i, χ_j によるゲージボソンの self-energy functions への寄与 $\Pi_{IJ}^{\chi_i\chi_j}(q^2)$ は

$$\begin{aligned}
ig^{\mu\nu}\Pi_{IJ}^{\chi_i\chi_j}(q^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\left[i(g_I^{\chi_i\chi_j})\gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m_{\chi_i})}{k^2-m_{\chi_i}^2+i\epsilon} i(g_J^{\chi_i\chi_j})\gamma^\nu \frac{i(\not{k}+\not{q}+m_{\chi_j})}{(k+q)^2-m_{\chi_j}^2+i\epsilon}\right] \\
&= -(g_I^{\chi_i\chi_j})(g_J^{\chi_j\chi_i}) \\
&\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4(2k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k\cdot q + m_{\chi_i} m_{\chi_j} g^{\mu\nu}) \\
&= -4(g_I^{\chi_i\chi_j})(g_J^{\chi_j\chi_i}) \frac{ig^{\mu\nu}}{16\pi^2}\left[2B_{22}(\chi_i,\chi_j;q) - q^2 B_{21}(\chi_i,\chi_j;q)\right. \\
&\quad \left. -(4-2\epsilon)B_{22}(\chi_i,\chi_j;q) - q^2 B_1(\chi_i,\chi_j;q) + m_{\chi_i}m_{\chi_j}B_0(\chi_i,\chi_j;q)\right] \quad \text{(F.294)}
\end{aligned}$$

となる。２行目で γ 行列のトレースをとった[#46]。３行目で Appendix A の A.1 節で定義された Passarino Veltman functions を用いた。ただし、Passarino Veltman functions を用いる際、d 次元の metric に関する式、$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d = (4-2\epsilon)$ を使った。また、q^μ, q^ν に比例する項は、Dirac 方程式から高々b quark の質量にしかならないため無視した。

次に図 30 のダイアグラムのような、スカラー ϕ_i, ϕ_j とゲージボソン I, J ($I, J = \gamma$, Z, $W^\pm$) の相互作用 $\mathcal{L}_\phi$ を考える。

$$\mathcal{L}_\phi = i(g_I^{\phi_i\phi_j})V_\mu^I\left\{\phi_i^*(\partial^\mu\phi_j) - \phi_j(\partial^\mu\phi_i^*)\right\} + (g_{IJ}^{\phi_i\phi_j})V_\mu^I V^{J\mu*}\phi_i^*\phi_j + \cdots . \quad \text{(F.295)}$$

フェルミオン χ の場合と同様、結合定数の複素共役は、i と j の添字を入れ替えた結合定数 $(g_I^{\phi_j\phi_i})$ で表すものとする。図 30 のダイアグラムに示された、スカラー ϕ_i, ϕ_j によるゲージボソンの self-energy functions への寄与 $\Pi_{IJ}^{\phi_i\phi_j}(q^2)$ は

$$\begin{aligned}
ig^{\mu\nu}\Pi_{IJ}^{\phi_i\phi_j}(q^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i(g_I^{\phi_i\phi_j})\left\{k^\mu + (k^\mu+q^\mu)\right\} i(g_J^{\phi_j\phi_i})\left\{k^\nu + (k^\nu+q^\nu)\right\} \\
&\quad \times \frac{i}{k^2-m_{\phi_i}^2+i\epsilon}\cdot\frac{i}{(k+q)^2-m_{\phi_j}^2+i\epsilon} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i(g_{IJ}^{\phi_i\phi_i})g^{\mu\nu}\frac{i}{k^2-m_{\phi_i}^2} \\
&= (g_I^{\phi_i\phi_j})(g_J^{\phi_j\phi_i})\frac{i}{16\pi^2}4g^{\mu\nu}B_{22}(\phi_i,\phi_j;q) - (g_{IJ}^{\phi_i\phi_i})\frac{i}{16\pi^2}g^{\mu\nu}A_0(\phi_i) \quad \text{(F.296)}
\end{aligned}$$

となる。２行目で Passarino Veltman functions を用いた。ただし、q^μ, q^ν に比例する項は無視した。

[#46] γ 行列のトレースの公式は、$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ 、および、$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$ である。

以上の計算から、ゲージボソンの self-energy functions $\Pi_{IJ}(q^2)$ は

$$\begin{aligned}
\Pi_{IJ}(q^2) &= \Pi_{IJ}^{\chi_i\chi_j}(q^2) + \Pi_{IJ}^{\phi_i\phi_j}(q^2) \\
&= -\frac{(g_I^{\chi_i\chi_j})(g_J^{\chi_i\chi_j})}{4\pi^2}\left[m_{\chi_i}m_{\chi_j}B_0(\chi_i,\chi_j,;q) - q^2\left\{B_1(\chi_i,\chi_j,;q) + B_{21}(\chi_i,\chi_j;q)\right\}\right. \\
&\quad \left. -2(1-\epsilon)B_{22}(\chi_i,\chi_j;q)\right] \\
&\quad +\frac{(g_I^{\phi_i\phi_j})(g_J^{\phi_i\phi_j})}{4\pi^2}B_{22}(\phi_i,\phi_j;q) - \frac{(g_{IJ}^{\phi_i\phi_i})}{16\pi^2}A_0(\phi_i)
\end{aligned} \tag{F.297}$$

と求められる。

フェルミオン (vector-like) とスカラーによるゲージボソンの self-energy functions $\Pi_{IJ}(q^2)$ の一般的な表式が得られたので、あとは、模型の Lagrangian から結合定数 $g_I^{\chi_i\chi_j}$, $g_I^{\phi_i\phi_j}$, $g_{IJ}^{\phi_i\phi_i}$ を決めれば、(F.297) 式より、考えている模型におけるゲージボソンの self-energy functions $\Pi_{IJ}(q^2)$ 求めることができる。

以下では、本論文の 3.2.1 節と 3.2.2 節で議論した模型

1. $SU(2)_L$ singlet scalar (ϕ) と singlet Dirac fermion (χ) をもつ模型
2. $SU(2)_L$ doublet scalar (Φ) と singlet scalar (ϕ) および singlet fermion (χ) をもつ模型

の Lagrangian から模型ごとに結合定数 $g_I^{\chi_i\chi_j}$, $g_I^{\phi_i\phi_j}$, $g_{IJ}^{\phi_i\phi_i}$ を決めて、本論文の 3.2.1 節と 3.2.2 節で与えられたゲージボソンの self-energy functions の式、(3.51), (3.52), (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) が得られることを示す。

F.1.1 SU(2)$_L$ singlet scalar (ϕ) と singlet Dirac fermion (χ) の模型

以下では共変微分 D_μ を Appendix D.1.2 節の (D.263) 式のように

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+T^+ + W_\mu^-T^-) - i\frac{g}{c}(t^3 - s^2Q)Z_\mu - iQeA_\mu \tag{F.298}$$

とする。ここで、$T^\pm$ は $T^\pm = (\sigma^1 \pm i\sigma^2)/2$ 、c は $\overline{\mathrm{MS}}$ の weak mixing angle を表す。

$SU(2)_L$ singlet Dirac fermion (χ) の運動項は

$$\bar\chi(i\not{D})\chi = \bar\chi(i\not\partial)\chi + \frac{g}{c}\,\bar\chi\gamma^\mu(-s^2Q_\chi)\chi Z_\mu + Q_\chi e\,\bar\chi\gamma^\mu\chi A_\mu \tag{F.299}$$

で与えられる。また、$SU(2)_L$ singlet scalar (ϕ) の運動項は

$$\begin{aligned}
|D_\mu\phi|^2 &= (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) + \left\{i\frac{g}{c}Z_\mu(-s^2Q_\phi) + iQ_\phi eA_\mu\right\}\left\{\phi^*(\partial^\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^*)\right\} \\
&\quad + \left[\left\{\frac{g}{c}(-s^2Q_\phi)\right\}^2 Z_\mu Z^\mu + 2\frac{g}{c}(-s^2Q_\phi)Q_\phi eZ_\mu A^\mu + (Q_\phi e)^2A_\mu A^\mu\right]\phi^*\phi
\end{aligned} \tag{F.300}$$

で与えられる。したがって、この模型における、ゲージボソンのself-energy functions (F.297)式の結合定数 $g_I^{\chi_i\chi_j}$, $g_I^{\phi_i\phi_j}$, $g_{IJ}^{\phi_i\phi_i}$ は

$$\begin{aligned}
g_I^{\chi_i\chi_j} &= \begin{cases} Q_\chi e & (I=\gamma, \quad \chi_i=\chi_j=\chi) \\ \frac{g}{c}(-s^2 Q_\chi) & (I=Z, \quad \chi_i=\chi_j=\chi) \end{cases} \\
g_I^{\phi_i\phi_j} &= \begin{cases} Q_\phi e & (I=\gamma, \quad \phi_i=\phi_j=\phi) \\ \frac{g}{c}(-s^2 Q_\phi) & (I=Z, \quad \phi_i=\phi_j=\phi) \end{cases} \\
g_{IJ}^{\phi_i\phi_i} &= 2(g_I^{\phi_i\phi_i})(g_J^{\phi_i\phi_i})
\end{aligned} \tag{F.301}$$

と決まる[#47]。以上から、ゲージボソンのself-energy functions (F.297)式に結合定数(F.301)式を適用すれば、直ちに本論文3.2.1節の(3.51), (3.52)式が得られる。

F.1.2 SU(2)$_L$ doublet scalar (Φ) とsinglet scalar (ϕ) とsinglet fermion (χ) の模型

SU(2)$_L$ singlet Dirac fermion (χ) の結合定数 $g_I^{\chi_i\chi_j}$ は、前節の模型と変わらない。

一方で、SU(2)$_L$ doublet scalar (Φ $(=(\phi_1,\phi_2)^{\mathrm{T}})$) とsinglet scalar ($\phi$) からなる運動項 $\mathcal{L}_{\mathrm{K.T.}}$ は、スカラー ϕ とスカラー ϕ_2 を本論文の(3.30)式

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi_2 \end{pmatrix}_i = V_{ij} s_j.$$

を使って質量固有状態 s_i に書き直し、またユニタリー行列 V が

$$\sum_k (V^*)_{ki}(V)_{kj} = \delta_{ij} \tag{F.302}$$

[#47] 3行目の式はWick contractionのsymmetry factorに注意する。

を満たすことに注意して計算すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{K.T.}} &= |D_\mu\phi|^2 + |D_\mu\Phi|^2 \\
&= (\partial_\mu\phi_1^*)(\partial^\mu\phi_1) + \sum_i (\partial_\mu s_i^*)(\partial^\mu s_i) \\
&\quad + \sum_i i\frac{g}{\sqrt{2}} V_{2i} W_\mu^+ \left\{\phi_1^*(\partial^\mu s_i) - s_i(\partial^\mu\phi_1^*)\right\} + \mathrm{h.c.} + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{\mu-}\phi_1^*\phi_1 \\
&\quad + \sum_{ij} \frac{g^2}{2} V_{2j}^* V_{2i} W_\mu^+ W^{\mu-} s_j^* s_i \\
&\quad + \left[i\frac{g}{c} Z_\mu (T_{\phi_1}^3 - s^2 Q_1) + iQ_1 e A_\mu\right]\phi_1^*(\partial^\mu\phi_1) + \mathrm{h.c.} \\
&\quad + \sum_{ij} i\frac{g}{c} Z_\mu \left[(-s^2 Q_2)V_{1j}^* V_{1i} + (T_{\phi_2}^3 - s^2 Q_2) V_{2j}^* V_{2i}\right] s_j^*(\partial^\mu s_i) + \mathrm{h.c.} \\
&\quad + \sum_i iQ_2 e A_\mu s_i^*(\partial^\mu s_i) + \mathrm{h.c.} \\
&\quad + \sum_i i\frac{g}{\sqrt{2}} V_{2i} W_\mu^+ \left[-i\frac{g}{c} Z^\mu \left\{-s^2(Q_1+Q_2)\right\} - i(Q_1+Q_2) e A^\mu\right]\phi_1^* s_i + \mathrm{h.c.} \\
&\quad + \left[\left\{\frac{g}{c}(T_{\phi_1}^3 - s^2 Q_1)\right\}^2 Z_\mu Z^\mu + 2\frac{g}{c}(T_{\phi_1}^3 - s^2 Q_1) Q_1 e Z_\mu A^\mu + (Q_1 e)^2 A_\mu A^\mu\right]\phi_1^*\phi_1 \\
&\quad + \sum_{ij}\left(\frac{g}{c}\right)^2 Z_\mu Z^\mu \left[(-s^2 Q_2)^2 V_{1j}^* V_{1i} + (T_{\phi_2}^3 - s^2 Q_2)^2 V_{2j}^* V_{2i}\right] s_j^* s_i \\
&\quad + \sum_{ij} 2\frac{g}{c}(Q_2 e) Z_\mu A^\mu \left[(-s^2 Q_2) V_{1j}^* V_{1i} + (T_{\phi_2}^3 - s^2 Q_2) V_{2j}^* V_{2i}\right] s_j^* s_i \\
&\quad + \sum_i (Q_2 e)^2 A_\mu A^\mu s_i^* s_i
\end{aligned}
\tag{F.303}
$$

となる。したがって、この模型における、ゲージボソンの self-energy functions (F.297) 式の

結合定数 $g_I^{\phi_i\phi_j}$, $g_{IJ}^{\phi_i\phi_i}$ は

$$
\begin{aligned}
g_I^{\phi_i\phi_j} &= \begin{cases}
Q_{\phi_1}e & (I=\gamma, \quad \phi_i=\phi_j=\phi_1)\\
Q_{\phi_2}e & (I=\gamma, \quad \phi_i=\phi_j=s_i)\\
\frac{g}{c}(T^3_{\phi_1}-s^2Q_1) & (I=Z, \quad \phi_i=\phi_j=\phi_1)\\
\sum_{ij}\frac{g}{c}\left[(-s^2Q_2)V^*_{1j}V_{1i}+(T^3_{\phi_2}-s^2Q_2)V^*_{2j}V_{2i}\right] & (I=Z, \quad \phi_i=s_i,\ \phi_j=s_j)\\
\sum_i\frac{g}{\sqrt{2}}V_{2i} & (I=W, \quad \phi_i=\phi_1,\ \phi_j=s_i)
\end{cases}\\
g_{IJ}^{\phi_i\phi_i} &= \begin{cases}
2(g_I^{\phi_i\phi_i})(g_J^{\phi_i\phi_i}) & (I=J=\gamma)\\
2(g_I^{\phi_i\phi_i})(g_J^{\phi_i\phi_i}) & (I=J=Z, \quad \phi_i=\phi_1)\\
2\sum_i\left(\frac{g}{c}\right)^2\left[(-s^2Q_2)^2|V_{1i}|^2+(T^3_{\phi_2}-s^2Q_2)^2|V_{2i}|^2\right] & (I=J=Z, \quad \phi_i=s_i)\\
\frac{g^2}{2} & (I=J=W, \quad \phi_i=\phi_1)\\
\frac{g^2}{2}\sum_i|V_{2i}|^2 & (I=J=W, \quad \phi_i=s_i)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{F.304}
$$

と決まる。以上の結合定数を、ゲージボソンの self-energy functions (F.297) 式に適用すれば、本論文 3.2.2 節の (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) 式が得られる。

G　4節の補足

G.1　mass insertion approximation による計算

図 21 の 1-loop ダイアグラムの散乱振幅 $-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R$ は

$$
\begin{aligned}
-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R \;=\; & \sum_{i,j}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\{-i(y_L)_{\alpha i}P_R\}\frac{i(\not{k}+m_{\chi_i})}{k^2-m_{\chi_i}^2}\times 2\times\left(-i\frac{1}{2}M_{ij}P_L-i\frac{1}{2}M'_{ij}P_R\right)\\
&\times\frac{i(\not{k}+m_{\chi_j})}{k^2-m_{\chi_j}^2}\{-i(y_L)_{\beta j}P_R\}\left(\frac{i}{k^2-m_{\phi_1}^2}\right)^2\times 2\times\left(-i\frac{1}{4}\kappa_5 v^2\right) \qquad \text{(G.305)}
\end{aligned}
$$

である。式中で強調した $\times 2$ は Wick contraction の symmetry facotr である[#48]。また、ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ は、ニュートリノの運動量 p に依らないので、一般性を失うことなく $p=0$ に取ることができる。なお、図 21 の 1-loop ダイアグラムからの輻射補正を含めたニュートリノに関する effective Lagrangian $\mathcal{L}_{\rm eff}$

$$
\mathcal{L}_{\rm eff}=\frac{1}{2}\bar{\nu}_{L\alpha}\, i\not{\partial}\,\nu_{L\alpha}+\frac{1}{2}\bar{\nu}^c_{L\alpha}\, i\not{\partial}\,\nu^c_{L\alpha}-\frac{1}{2}(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}\,\bar{\nu}_{L\alpha}\nu^c_{L\beta}+\text{h.c.} \qquad \text{(G.306)}
$$

から、$(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}$ がニュートリノの Majorana mass term の質量行列に対応することが読み取れる。

(G.305) 式の散乱振幅は Feynman パラメーター積分に関する恒等式

$$
\frac{1}{A_1^{m_1}A_2^{m_2}\cdots A_n^{m_n}}=\int_0^1 dx_1\cdots dx_n\delta\left(\sum x_i-1\right)\frac{\prod x_i^{m_i-1}}{\left[\sum x_iA_i\right]^{\sum m_i}}\frac{\Gamma(m_1+\cdots+m_n)}{\Gamma(m_1)\cdots\Gamma(m_n)} \qquad \text{(G.307)}
$$

を用いれば、χ_i,χ_j,ϕ_1 のプロパゲータは x,y,z 3 つの Feynman パラメーター積分でまとめることができる。Appendix の (A.145) 式ならびに (A.146) 式を用いてループ積分を実行する

[#48] (G.305) 式の散乱振幅を書き下すとき、フェルミオンの bilinear form の charge conjugation の公式 $\bar{\psi}\Gamma\psi=\epsilon\bar{\psi}^c\Gamma\psi^c$ where $\epsilon=+1$ for $(\Gamma=1,\gamma^\mu\gamma^5,\gamma^5)$ $\epsilon=-1$ for $(\Gamma=\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu})$ を用いた。まず、湯川相互作用に関しては、$-(y_L)_{\alpha i}\bar{\nu}_{L\alpha}\phi_1\chi_{Ri}=-(y_L)_{\alpha i}\bar{\chi}^c_{Ri}\phi_1\nu^c_{L\alpha}$ として、一方の vertex を決めるのに用いた。また、Majorana mass の Wick contraction から来る symmetry factor に関しても、charge conjugation の公式を使って理解できる。Wick contraction を Peskin [95] の p116(4.108) 式で定義する流儀で議論すると、correlation function において Majorana mass term 由来のフェルミオン χ は $\bar{\chi}^c\chi=\bar{\chi}\chi^c$ となるので、vertex 由来のフェルミオン χ との縮約の取り方は 2 通りあることがわかる。さらに (G.306) 式の運動項でも、公式を $\bar{\psi}i\not{\partial}\psi=-(i\partial_\mu\bar{\psi}^c)\gamma^\mu\psi^c=\bar{\psi}^c i\not{\partial}\psi^c$ のようにして使っている。

と、ニュートリノの質量行列 $(\mathcal{M})_{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} \;\; = \;\; & \sum_{i,j}(y_L)_{\alpha i}(y_L)_{\beta j}\frac{\kappa_5}{2}v^2\frac{1}{16\pi^2(m_{\chi_i}^2-m_{\chi_j}^2)} \\
& \times\left[M_{ij}\left\{\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2}+\frac{m_{\chi_i}^4}{(m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2)^2}\ln\left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2}\right]-(i\leftrightarrow j)\right\}\right. \\
& \left.+M'_{ij}m_{\chi_i}m_{\chi_j}\left\{\frac{1}{m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2}+\frac{m_{\chi_i}^2}{(m_{\phi_1}^2-m_{\chi_i}^2)^2}\ln\left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2}\right]-(i\leftrightarrow j)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{G.308}
$$

を得る。

G.2 mass eingenstates による計算

次に図 21 の 1-loop ダイアグラムの散乱振幅 $-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R$ を、χ_i ならびに ϕ_1 の mass eigen states で計算する。(4.82) 式から χ_i の質量項は

$$
\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar{\chi}_{Li} & \bar{\chi}^c_{Ri}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M'_{ij} & m_{\chi_{ij}}\\ m_{\chi_{ij}} & M_{ij}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^c_{Lj}\\ \chi_{Rj}\end{pmatrix}+\mathrm{h.c.}
\tag{G.309}
$$

である。ただし $m_{\chi_{ij}}$ は対角行列であり、その対角成分は m_{χ_i} に等しいとする。ここで、χ_i の Dirac mass m_{χ_i} の mass eigenstates を次のように表す。

$$
\begin{pmatrix}\chi^c_{Li}\\ \chi_{Ri}\end{pmatrix}=X_i
\tag{G.310}
$$

正規行列はユニタリー行列で対角化することができて、m_{χ_i} の質量行列 D_{ij}

$$
D_{ij}=\begin{pmatrix}M'_{ij} & m_{\chi_{ij}}\\ m_{\chi_{ij}} & M_{ij}\end{pmatrix}
\tag{G.311}
$$

を次のように対角化する。

$$
(V^{\mathrm{T}})_{ki}D_{ij}V_{jl}=(m_{\chi'}^{\mathrm{diag}})_{kl}=(m_{\chi'})_k
\tag{G.312}
$$

このとき、χ_i の質量固有状態 X'_i はユニタリー行列 V_{ij} を使って次のように書ける。

$$
X_i=V_{ij}X'_j
\tag{G.313}
$$

したがって、χ_i に関する Lagrangian を質量固有状態で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\bar{\chi}_{Li}\, i\partial\!\!\!/\, \chi_{Li} + \frac{1}{2}\bar{\chi}^c_{Li}\, i\partial\!\!\!/\, \chi^c_{Li} + \frac{1}{2}\bar{\chi}_{Ri}\, i\partial\!\!\!/\, \chi_{Ri} + \frac{1}{2}\bar{\chi}^c_{Ri}\, i\partial\!\!\!/\, \chi^c_{Ri} \\
&\quad -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar{\chi}_{Li} & \bar{\chi}^c_{Ri}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M'_{ij} & m_{\chi ij} \\ m_{\chi ij} & M_{ij}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^c_{Lj} \\ \chi_{Rj}\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\bar{X}_i\, i\partial\!\!\!/ X_i + \frac{1}{2}\bar{X}^c_i\, i\partial\!\!\!/ X^c_i - \frac{1}{2}\bar{X}^c_i D_{ij} X_j + \mathrm{h.c.} \\
&= \frac{1}{2}\bar{X}'_i\, i\partial\!\!\!/ X'_i + \frac{1}{2}\bar{X}'^c_i\, i\partial\!\!\!/ X'^c_i - \frac{1}{2}\bar{X}'^c_i (m^{\mathrm{diag}}_{\chi'})_{ij} X'_j + \mathrm{h.c.}
\end{aligned} \tag{G.314}$$

ここで X'_i の成分を $X'^{\mathrm{T}} = (\chi'_{R1} \ \cdots \ \chi'_{R6})$ とすると、$\chi_{Ri} = (V)_{i+3\ j}\, \chi'_{Rj}$ となる。

また、(4.83) 式より ϕ_1 の質量項は ϕ_1 の実部と虚部に分けられる。$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_R + i\phi_I)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -m^2_{\phi_1}\phi^*_1\phi_1 - \frac{\kappa_5}{4}v^2\phi^{*2}_1 - \frac{\kappa_5}{4}v^2\phi^2_1 \\
&= -\frac{1}{2}m^2_{\phi_R}\phi^2_R - \frac{1}{2}m^2_{\phi_I}\phi^2_I.
\end{aligned} \tag{G.315}$$

ここで、

$$m^2_{\phi_R} = m^2_{\phi_1} + \frac{\kappa_5}{2}v^2 \tag{G.316}$$

$$m^2_{\phi_I} = m^2_{\phi_1} - \frac{\kappa_5}{2}v^2 \tag{G.317}$$

ただし κ_5 は実にとった[#49]。

以上の計算から χ_i と ϕ_1 を質量固有状態に書き直すと、(4.82) 式のニュートリノに関する湯川相互作用

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -(y_L)_{\alpha i}\bar{\nu}_{L\alpha}\phi_1\chi_{Ri} + \mathrm{h.c.} = -(y_L)_{\beta j}\bar{\chi}^c_{Rj}\phi_1\nu^c_{L\beta} + \mathrm{h.c} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(V)_{i+3\ k}\,(y_L)_{\alpha i}\bar{\nu}_{L\alpha}\phi_R\chi'_{Rk} - \frac{i}{\sqrt{2}}(V)_{i+3\ k}\,(y_L)_{\alpha i}\bar{\nu}_{L\alpha}\phi_I\chi'_{Rk} + \mathrm{h.c.} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3}(y_L)_{\beta j}\bar{\chi}'^c_{Rk}\phi_R\nu^c_{L\beta} - \frac{i}{\sqrt{2}}(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3}(y_L)_{\beta j}\bar{\chi}'^c_{Rk}\phi_I\nu^c_{L\beta} + \mathrm{h.c.}
\end{aligned} \tag{G.318}$$

を得る。(G.318) 式より図 21 の 1-loop ダイアグラムの散乱振幅 $-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R$ は

$$\begin{aligned}
-i(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta}P_R &= \sum_{i,j}\sum_k \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-i(V)_{i+3\ k}\,(y_L)_{\alpha i}P_R\right\}\frac{i\{k\!\!\!/ + (m_{\chi'})_k\}}{k^2 - (m_{\chi'})_k} \\
&\quad \times\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-i(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3}\,(y_L)_{\beta j}P_R\right\}\frac{i}{k^2 - m^2_{\phi_R}} \ - (R \leftrightarrow I)
\end{aligned} \tag{G.319}$$

[#49] Z_2 パリティーから $(H^\dagger\tilde{\Phi})$ の bilinear term は禁止されるため、H と Φ の relative phase によって κ_5 はいつでも実にできる [118]。したがって一般性を失うことなく、κ_5 を実にとることができる。

となる。Appendix A の (A.143) 式よりループ積分を実行すると、ニュートリノの質量行列は次のように求まる。

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} &= \sum_{i,j}\sum_k \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}(y_L)_{\alpha i}(y_L)_{\beta j}(V)_{i+3\ k}\,(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3}\,(m_{\chi'})_k \\ &\quad\times\left\{\frac{m^2_{\phi_R}}{m^2_{\phi_R}-(m_{\chi'})^2_k}\ln\left[\frac{m^2_{\phi_R}}{(m_{\chi'})^2_k}\right]-\frac{m^2_{\phi_I}}{m^2_{\phi_I}-(m_{\chi'})^2_k}\ln\left[\frac{m^2_{\phi_I}}{(m_{\chi'})^2_k}\right]\right\} \qquad \text{(G.320)}\end{aligned}$$

(G.320) 式は、Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} や結合定数 κ_5 が大きい場合にも成り立つ式である。しかし、m_{χ_i} の質量行列 D_{ij} を対角化するユニタリー行列 V_{ij} を解析的に求めることができないという難点がある。

ちなみに Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} と結合定数 κ_5 が小さいとき、mass eigenstate で計算した表式 (G.320) が mass insertion から計算した表式 (4.84) と一致することは、Majorana mass M_{ij}, M'_{ij} が単位行列に比例すると仮定した場合、簡単な計算で示すことができる。

$m^2_{\phi_R}, m^2_{\phi_I}$ の表式 (G.317) で $\kappa_5 v^2/2$ が $m^2_{\phi_1}$ に比べて小さいとき、ニュートリノの質量行列 (G.320) 式を展開式 $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ および $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \cdots$ より $\kappa_5 v^2/2$ で展開すると

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} &= \sum_{i,j}\sum_k \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\kappa_5 v^2(y_L)_{\alpha i}(y_L)_{\beta j}(V)_{i+3\ k}\,(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3}\,(m_{\chi'})_k \\ &\quad\times\left[\frac{1}{m^2_{\phi_1}-(m_{\chi'})^2_k}\left\{1-\frac{(m_{\chi'})^2_k}{m^2_{\phi_1}-(m_{\chi'})^2_k}\ln\left[\frac{m^2_{\phi_1}}{(m_{\chi'})^2_k}\right]\right\}\right]. \qquad \text{(G.321)}\end{aligned}$$

ここで、(G.321) 式の大括弧 [ ] で囲まれた関数を $(m_{\chi'})^2_k = 0$ の周りで展開すると

$$(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} = \sum_{i,j}\sum_k \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\kappa_5 v^2(y_L)_{\alpha i}(y_L)_{\beta j}(V)_{i+3\ k}\,(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(m_{\chi'})^{2n+1}_k. \qquad \text{(G.322)}$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\left((m_{\chi'})^2_k\right)^n}\left[\frac{1}{m^2_{\phi_1}-(m_{\chi'})^2_k}\left\{1-\frac{(m_{\chi'})^2_k}{m^2_{\phi_1}-(m_{\chi'})^2_k}\ln\left[\frac{m^2_{\phi_1}}{(m_{\chi'})^2_k}\right]\right\}\right]\Bigg|_{(m_{\chi'})^2_k=0}, \qquad \text{(G.323)}$$

である。ここで、質量行列の対角化 (G.312) 式より、(G.322) 式中の $(m_{\chi'})^{2n+1}_k$ を質量行列 D_{ij} に書き直すと

$$\begin{aligned}(V)_{i+3\ k}(m_{\chi'})^{2n+1}_k(V^{\mathrm{T}})_{k\ j+3} &= \left(Vm^{\mathrm{diag}}_{\chi'}V^{\mathrm{T}}V\cdots V^{\mathrm{T}}Vm^{\mathrm{diag}}_{\chi'}V^{\mathrm{T}}\right)_{i+3\ j+3} \\ &= \left(D^{2n+1}\right)_{i+3\ j+3}. \qquad \text{(G.324)}\end{aligned}$$

ここでは簡単のため V_{ij} を実にとった。(G.311) 式より D^{2n+1} を Majorana mass が小さいとして M_{ij}, M'_{ij} の 1 次まで残して計算すると

$$\left(D^{2n+1}\right)_{i+3\ j+3} = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \sum_{i=0}^{n}(m_\chi^2)^i M (m_\chi^2)^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}(m_\chi)^{2i+1} M' (m_\chi)^{2n-1-2i} \end{array}\right)_{i+3\ j+3} \tag{G.325}$$

ここで (G.325) 式右辺の行列の各ブロックは 3×3 の行列である。以下は簡単のため、Majorana mass が単位行列に比例する場合 $M_{ij} = M$, $M'_{ij} = M'$ を考える。このときニュートリノ質量行列 (G.322) 式は

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \kappa_5 v^2 (y_L)_{\alpha i} (y_L)_{\beta j} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \left\{ n(m_\chi^2)^n + (m_\chi^2)^n \right\} M + n(m_\chi^2)^n M' \end{array}\right)_{i+3\ j+3}\end{aligned} \tag{G.326}$$

となる。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m_\chi^2)^n$ が (G.322) 式の展開の形であること、また $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n (m_\chi^2)^n$ はその微分であることに注意すると、ニュートリノの質量行列 (G.326) 式は

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\nu)_{\alpha\beta} &= \sum_{i} \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \kappa_5 v^2 (y_L)_{\alpha i} (y_L)_{\beta i} \\ &\quad \times \left[M \frac{1}{(m_{\phi_1}^2 - m_{\chi_i}^2)^2} \left(m_{\phi_1}^2 + m_{\chi_i}^2 + \frac{2 m_{\phi_1}^2 m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2 - m_{\chi_i}^2} \ln \left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + M' \frac{m_{\chi_i}^2}{(m_{\phi_1}^2 - m_{\chi_i}^2)^2} \left(2 + \frac{m_{\phi_1}^2 + m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2 - m_{\chi_i}^2} \ln \left[\frac{m_{\chi_i}^2}{m_{\phi_1}^2} \right] \right) \right]\end{aligned} \tag{G.327}$$

となる。他方、mass insertion の方法で得られたニュートリノの質量行列の表式 (4.84) で、Majorana mass が単位行列に比例する場合 $M_{ij} = M$, $M'_{ij} = M'$ を考える。このとき $i = j$ の項が残り、それらは (4.84) 式の大括弧 [ ] を $m_{\chi_i}^2$ で微分したものに相当する。これを計算すると、(4.84) 式は (G.327) 式に一致することが確かめられる。

謝辞

本論文は、筆者が名古屋大学大学院素粒子論研究室（E 研）に在籍中の研究をまとめたものである。自身の研究を学位論文としてまとめ得るに至ったのは、戸部和弘准教授（名古屋大学）の御指導によるものである。ここに記して厚く感謝の意を表す次第である。さらに、研究生活の全般にわたって助けてくれた、同期の村松祐氏（名古屋大学）に深い感謝を捧げる。また、EHQG 研のスタッフの方々ならびに学生たちにもお礼申し上げる。

本研究は、「名古屋大学グローバル COE プログラム　宇宙基礎原理の探求」および「名古屋大学　博士課程教育リーディングプログラム　フロンティア宇宙開拓リーダー養成プログラム」からの援助を受けている。ここに記して感謝する。

参考文献

[1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); A. Salam, Conf. Proc. C **680519**, 367 (1968).

[2] S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 974 (1976); E. Gildener and S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 3333 (1976); E. Gildener, Phys. Rev. D **14**, 1667 (1976); L. Susskind, Phys. Rev. D **20**, 2619 (1979).

[3] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **710**, 49 (2012) [arXiv:1202.1408]; S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], arXiv:1202.1488.

最近の Tevatron の結果も参照; [TEVNPH (Tevatron New Phenomina and Higgs Working Group) and CDF and D0 Collaborations], arXiv:1203.3774.

[4] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Rev. D **90**, 052004 (2014) [arXiv:1406.3827 [hep-ex]].

[5] CMS Collaboration [CMS Collaboration], "Precise determination of the mass of the Higgs boson and studies of the compatibility of its couplings with the standard model," CMS-PAS-HIG-14-009.

[6] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], JHEP **1409**, 176 (2014) [arXiv:1405.7875 [hep-ex]].

[7] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).

[8] K. Hagiwara *et al.*, J. Phys. G G **38**, 085003 (2011) [arXiv:1105.3149].

[9] J. Prades, E. de Rafael and A. Vainshtein, (Advanced series on directions in high energy physics. 20) [arXiv:0901.0306 [hep-ph]].

[10] T. Aoyama *et al.*, arXiv:1205.5370; arXiv:1205.5368; R. Boughezal and K. Melnikov, Phys. Lett. B **704**, 193 (2011) [arXiv:1104.4510]; A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov and A. S. Zhevlakov, Eur. Phys. J. C **71**, 1702 (2011) [arXiv:1103.2042]; T. Goecke, C. S. Fischer and R. Williams, Phys. Rev. D **83**, 094006 (2011) [arXiv:1012.3886]; Eur. Phys. J. A **47**, 28 (2011) [arXiv:1009.5297]; A. Nyffeler, Chin. Phys. C **34**, 705 (2010) [arXiv:1001.3970]; A. Nyffeler, Phys. Rev. D **79**, 073012 (2009) [arXiv:0901.1172]; D. K. Hong and D. Kim, Phys. Lett. B **680**, 480 (2009) [arXiv:0904.4042]; A. E. Dorokhov and W. Broniowski, Phys. Rev. D **78**, 073011 (2008) [arXiv:0805.0760]; J. Bijnens and J. Prades, Mod. Phys. Lett. A **22**, 767 (2007) [hep-ph/0702170];

M. Hayakawa *et al.*, PoS LAT **2005**, 353 (2006) [hep-lat/0509016]; K. Melnikov and A. Vainshtein, Phys. Rev. D **70**, 113006 (2004) [hep-ph/0312226]; J. H. Kuhn, A. I. Onishchenko, A. A. Pivovarov and O. L. Veretin, Phys. Rev. D **68**, 033018 (2003) [hep-ph/0301151]; T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **90**, 021803 (2003) [hep-ph/0210322]; M. J. Ramsey-Musolf and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **89**, 041601 (2002) [hep-ph/0201297]; J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades, Nucl. Phys. B **626**, 410 (2002) [hep-ph/0112255]; Nucl. Phys. B **474**, 379 (1996) [hep-ph/9511388]; J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades, Phys. Rev. Lett. **75**, 1447 (1995) [Erratum-ibid. **75**, 3781 (1995)] [hep-ph/9505251]; I. R. Blokland, A. Czarnecki and K. Melnikov, Phys. Rev. Lett. **88**, 071803 (2002) [hep-ph/0112117]; M. Knecht, A. Nyffeler, M. Perrottet and E. de Rafael, Phys. Rev. Lett. **88**, 071802 (2002) [hep-ph/0111059]; M. Knecht and A. Nyffeler, Phys. Rev. D **65**, 073034 (2002) [hep-ph/0111058]; Z. Bern, A. De Freitas, L. J. Dixon, A. Ghinculov and H. L. Wong, JHEP **0111**, 031 (2001) [hep-ph/0109079]; M. Hayakawa and T. Kinoshita, Phys. Rev. D **57**, 465 (1998) [Erratum-ibid. D **66**, 019902 (2002)] [hep-ph/9708227]; M. Hayakawa, T. Kinoshita and A. I. Sanda, Phys. Rev. D **54**, 3137 (1996) [hep-ph/9601310]; M. Hayakawa, T. Kinoshita and A. I. Sanda, Phys. Rev. Lett. **75**, 790 (1995) [hep-ph/9503463].

[11] T. Moroi, Phys. Rev. D **53**, 6565 (1996) [Erratum-ibid. D **56**, 4424 (1997)] [hep-ph/9512396].

[12] G. C. McLaughlin and J. N. Ng, Phys. Lett. B **493**, 88 (2000) [hep-ph/0008209].

[13] S. R. Choudhury, A. S. Cornell, A. Deandrea, N. Gaur and A. Goyal, Phys. Rev. D **75**, 055011 (2007) [hep-ph/0612327].

[14] K. Kannike, M. Raidal, D. M. Straub and A. Strumia, JHEP **1202**, 106 (2012) [arXiv:1111.2551];

[15] H. Davoudiasl, H. -S. Lee and W. J. Marciano, arXiv:1205.2709. H. Davoudiasl, H. S. Lee and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **86**, 095009 (2012) [arXiv:1208.2973 [hep-ph]]. H. Davoudiasl, H. S. Lee and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **89**, 095006 (2014) [arXiv:1402.3620 [hep-ph]].

[16] S. Kanemitsu and K. Tobe, Phys. Rev. D **86**, 095025 (2012) [arXiv:1207.1313 [hep-ph]].

[17] F. Jegerlehner and A. Nyffeler, Phys. Rept. **477**, 1 (2009) [arXiv:0902.3360 [hep-ph]].

[18] M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu and Z. Zhang, Eur. Phys. J. C **71**, 1515 (2011) [Erratum-ibid. C **72**, 1874 (2012)] [arXiv:1010.4180 [hep-ph]].

[19] M. Benayoun, P. David, L. DelBuono and F. Jegerlehner, Eur. Phys. J. C **72**, 1848 (2012) [arXiv:1106.1315 [hep-ph]]. F. Jegerlehner and R. Szafron, Eur. Phys. J. C **71**, 1632 (2011) [arXiv:1101.2872]; T. Teubner *et al.*, AIP Conf. Proc. **1343**, 340 (2011); Nucl. Phys. Proc. Suppl. **218**, 225 (2011). T. Teubner, K. Hagiwara, R. Liao, A. D. Martin and D. Nomura, Chin. Phys. C **34**, 728 (2010) [arXiv:1001.5401 [hep-ph]].

[20] G. W. Bennett *et al.* [Muon G-2 Collaboration], Phys. Rev. D **73**, 072003 (2006) [hep-ex/0602035].

[21] P. J. Mohr, B. N. Taylor and D. B. Newell, Rev. Mod. Phys. **80**, 633 (2008) [arXiv:0801.0028 [physics.atom-ph]].

[22] A. Freitas, J. Lykken, S. Kell and S. Westhoff, JHEP **1405**, 145 (2014) [Erratum-ibid. **1409**, 155 (2014)] [arXiv:1402.7065 [hep-ph]].

[23] G. Venanzoni [Fermilab E989 Collaboration], Frascati Phys. Ser. **56**, 195 (2012).

[24] N. Saito [J-PARC g-'2/EDM Collaboration], AIP Conf. Proc. **1467**, 45 (2012).

[25] F. Jegerlehner, *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon*, Spiringer Tracts in Modern Physics, Vol. 226, November 2007.

[26] T. Blum, A. Denig, I. Logashenko, E. de Rafael, B. Lee Roberts, T. Teubner and G. Venanzoni, arXiv:1311.2198 [hep-ph].

[27] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109**, 111808 (2012) [arXiv:1205.5370 [hep-ph]].

[28] R. Bouchendira, P. Clade, S. Guellati-Khelifa, F. Nez and F. Biraben, Phys. Rev. Lett. **106**, 080801 (2011) [arXiv:1012.3627 [physics.atom-ph]].

[29] C. Bouchiat and L. Michel, Phys. Rev. **106**, 170 (1957); M. Gourdin and E. De Rafael, Nucl. Phys. B **10**, 667 (1969).

[30] J. P. Miller, E. de Rafael and B. L. Roberts, Rept. Prog. Phys. **70**, 795 (2007) [hep-ph/0703049]. S. J. Brodsky and E. De Rafael, Phys. Rev. **168**, 1620 (1968).

[31] A. Czarnecki, B. Krause and W. J. Marciano, Phys. Rev. Lett. **76**, 3267 (1996) [hep-ph/9512369]. S. Peris, M. Perrottet and E. de Rafael, Phys. Lett. B **355**, 523 (1995) [hep-ph/9505405]. A. Czarnecki, B. Krause and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **52**, 2619 (1995) [hep-ph/9506256]. A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, Phys. Rev. D **67**, 073006 (2003) [Erratum-ibid. D **73**, 119901 (2006)] [hep-ph/0212229].

C. Gnendiger, D. Stckinger and H. Stckinger-Kim, Phys. Rev. D **88**, no. 5, 053005 (2013) [arXiv:1306.5546 [hep-ph]].

[32] J. P. Miller, E. d. Rafael, B. L. Roberts and D. Stckinger, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **62**, 237 (2012).

[33] S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 974 (1976); E. Gildener and S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 3333 (1976); E. Gildener, Phys. Rev. D **14**, 1667 (1976); L. Susskind, Phys. Rev. D **20**, 2619 (1979).

[34] Kirill Melnikov and Arkady Vainshtein, *Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment*, Spiringer Tracts in Modern Physics, Vol. 216, May 2006.

[35] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974); R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).

[36] A. Czarnecki and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **64**, 013014 (2001) [hep-ph/0102122].

[37] M. Endo, K. Hamaguchi, S. Iwamoto and T. Yoshinaga, JHEP **1401**, 123 (2014) [arXiv:1303.4256 [hep-ph]].

[38] M. Endo, K. Hamaguchi, T. Kitahara and T. Yoshinaga, JHEP **1311**, 013 (2013) [arXiv:1309.3065 [hep-ph]].

[39] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen and H. Georgi, Phys. Lett. B **513**, 232 (2001) [hep-ph/0105239]; N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, T. Gregoire and J. G. Wacker, JHEP **0208**, 020 (2002) [hep-ph/0202089].

[40] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).

[41] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, E. Katz and A. E. Nelson, JHEP **0207**, 034 (2002) [hep-ph/0206021].

[42] H. C. Cheng and I. Low, JHEP **0309**, 051 (2003) [hep-ph/0308199].

[43] I. Low, JHEP **0410**, 067 (2004) [hep-ph/0409025].

[44] J. Hubisz, P. Meade, A. Noble and M. Perelstein, JHEP **0601**, 135 (2006) [hep-ph/0506042].

[45] M. Asano, S. Matsumoto, N. Okada and Y. Okada, Phys. Rev. D **75**, 063506 (2007) [hep-ph/0602157].

[46] R. S. Hundi, B. Mukhopadhyaya and A. Nyffeler, Phys. Lett. B **649**, 280 (2007) [hep-ph/0611116].

[47] M. Blanke, A. J. Buras, B. Duling, A. Poschenrieder and C. Tarantino, JHEP **0705**, 013 (2007) [hep-ph/0702136].

[48] J. P. Leveille, Nucl. Phys. B **137**, 63 (1978).

[49] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D **10**, 275 (1974) [Erratum-ibid. D **11**, 703 (1975)]. R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev. D **11**, 566 (1975). G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D **12**, 1502 (1975).

[50] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Rev. D **90**, no. 5, 052005 (2014) [arXiv:1405.4123 [hep-ex]]; G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **737**, 223 (2014) [arXiv:1406.4456 [hep-ex]].

[51] M. Pospelov, Phys. Rev. D **80**, 095002 (2009) [arXiv:0811.1030 [hep-ph]].

[52] D. Tucker-Smith and I. Yavin, Phys. Rev. D **83**, 101702 (2011) [arXiv:1011.4922 [hep-ph]].

[53] B. Holdom, Phys. Lett. B **166**, 196 (1986).

[54] O. Adriani *et al.* [PAMELA Collaboration], Nature **458**, 607 (2009) [arXiv:0810.4995 [astro-ph]].

[55] M. Aguilar *et al.* [AMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **110**, 141102 (2013).

[56] N. Arkani-Hamed, D. P. Finkbeiner, T. R. Slatyer and N. Weiner, Phys. Rev. D **79**, 015014 (2009) [arXiv:0810.0713 [hep-ph]].

[57] S. Gopalakrishna, S. Jung and J. D. Wells, Phys. Rev. D **78**, 055002 (2008) [arXiv:0801.3456 [hep-ph]].

[58] H. Davoudiasl, H. S. Lee and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **89**, 095006 (2014) [arXiv:1402.3620 [hep-ph]].

[59] H. Davoudiasl, H. S. Lee and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **85**, 115019 (2012) [arXiv:1203.2947 [hep-ph]]; H. Davoudiasl, H. S. Lee and W. J. Marciano, Phys. Rev. Lett. **109**, 031802 (2012) [arXiv:1205.2709 [hep-ph]].

[60] H. S. Lee, Phys. Rev. D **90**, 091702 (2014) [arXiv:1408.4256 [hep-ph]].

[61] J. P. Lees *et al.* [BaBar Collaboration], Phys. Rev. Lett. **113**, no. 20, 201801 (2014) [arXiv:1406.2980 [hep-ex]].

[62] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], arXiv:1409.0851 [nucl-ex].

[63] X. G. He, G. C. Joshi, H. Lew and R. R. Volkas, Phys. Rev. D **43**, 22 (1991); S. Baek, N. G. Deshpande, X. G. He and P. Ko, Phys. Rev. D **64**, 055006 (2001) [hep-ph/0104141]; E. Ma, D. P. Roy and S. Roy, Phys. Lett. B **525**, 101 (2002) [hep-ph/0110146]; E. Salvioni, A. Strumia, G. Villadoro and F. Zwirner, JHEP **1003**, 010 (2010) [arXiv:0911.1450 [hep-ph]]; J. Heeck and W. Rodejohann, Phys. Rev. D **84**, 075007 (2011) [arXiv:1107.5238 [hep-ph]].

[64] K. Harigaya, T. Igari, M. M. Nojiri, M. Takeuchi and K. Tobe, JHEP **1403**, 105 (2014) [arXiv:1311.0870 [hep-ph]].

[65] W. Altmannshofer, S. Gori, M. Pospelov and I. Yavin, Phys. Rev. Lett. **113**, 091801 (2014) [arXiv:1406.2332 [hep-ph]]; W. Altmannshofer, S. Gori, M. Pospelov and I. Yavin, Phys. Rev. D **89**, no. 9, 095033 (2014) [arXiv:1403.1269 [hep-ph]].

[66] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979); G. Passarino and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).

[67] G. -C. Cho *et al.*, JHEP **1111**, 068 (2011) [arXiv:1104.1769].

[68] G. -C. Cho and K. Hagiwara, Nucl. Phys. B **574**, 623 (2000) [hep-ph/9912260].

[69] K. Hagiwara *et al.*, Z. Phys. C **64**, 559 (1994) [Erratum-ibid. C **68**, 352 (1995)] [hep-ph/9409380].

[70] M. E. Peskin and T. Takeuchi, Phys. Rev. Lett. **65**, 964 (1990); Phys. Rev. D **46**, 381 (1992).

[71] G. Altarelli and R. Barbieri, Phys. Lett. B **253**, 161 (1991); G. Altarelli, R. Barbieri and S. Jadach, Nucl. Phys. B **369**, 3 (1992) [Erratum-ibid. B **376**, 444 (1992)]; G. Altarelli, R. Barbieri and F. Caravaglios, Phys. Lett. B **349**, 145 (1995).

[72] I. Maksymyk, C. P. Burgess and D. London, Phys. Rev. D **50**, 529 (1994) [hep-ph/9306267].

[73] Tevatron Electroweak Working Group, f. t. C. Collaboration and D. Collaboration, arXiv:1204.0042.

[74] Tevatron Electroweak Working Group and for the CDF and D0 Collaborations, arXiv:1107.5255.

[75] See web page: http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/

[76] J. Alwall *et al.*, JHEP **0709**, 028 (2007) [arXiv:0706.2334].

[77] T. Hambye, K. Kannike, E. Ma and M. Raidal, Phys. Rev. D **75**, 095003 (2007) [hep-ph/0609228].

[78] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet, M. B. Gavela and T. Hambye, JHEP **0712**, 061 (2007) [arXiv:0707.4058 [hep-ph]].

[79] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford Science Publications, 1988.

[80] J. Hisano and K. Tobe, Phys. Lett. B **510**, 197 (2001) [hep-ph/0102315].

[81] J. Adam *et al.* [MEG Collaboration], Phys. Rev. Lett. **110**, 201801 (2013) [arXiv:1303.0754 [hep-ex]].

[82] B. Aubert *et al.* [BaBar Collaboration], Phys. Rev. Lett. **104**, 021802 (2010) [arXiv:0908.2381 [hep-ex]].

[83] C. Dohmen *et al.* [SINDRUM II. Collaboration], Phys. Lett. B **317**, 631 (1993).

[84] W. H. Bertl *et al.* [SINDRUM II Collaboration], Eur. Phys. J. C **47**, 337 (2006).

[85] A. M. Baldini, F. Cei, C. Cerri, S. Dussoni, L. Galli, M. Grassi, D. Nicolo and F. Raffaelli *et al.*, arXiv:1301.7225 [physics.ins-det].

[86] T. Aushev, W. Bartel, A. Bondar, J. Brodzicka, T. E. Browder, P. Chang, Y. Chao and K. F. Chen *et al.*, arXiv:1002.5012 [hep-ex].

[87] T. P. working gourp, Search for the $\mu \to e$ Conversion Process at an Ultimate Sensitivity of the Order of 10^{-18} with PRISM, `http://j-parc.jp/researcher/Hadron/en/pac_0606/ pdf/p20-Kuno.pdf.`

[88] COMET Collaboration, `http://comet.kek.jp/Documents.html`; Y. Kuno [COMET Collaboration], PTEP **2013**, 022C01 (2013).

[89] Mu2e Collaboration, R. Abrams et al. (2012), arXiv:1211.7019

[90] D. V. Forero, M. Tortola and J. W. F. Valle, Phys. Rev. D **90**, no. 9, 093006 (2014) [arXiv:1405.7540 [hep-ph]].

[91] Z. Hou, C. L. Reichardt, K. T. Story, B. Follin, R. Keisler, K. A. Aird, B. A. Benson and L. E. Bleem *et al.*, Astrophys. J. **782**, 74 (2014) [arXiv:1212.6267 [astro-ph.CO]].

[92] G. F. Giudice, P. Paradisi and M. Passera, JHEP **1211**, 113 (2012) [arXiv:1208.6583 [hep-ph]].

[93] V. Cirigliano, R. Kitano, Y. Okada and P. Tuzon, Phys. Rev. D **80**, 013002 (2009) [arXiv:0904.0957 [hep-ph]].

[94] G. J. van Oldenborgh, Comput. Phys. Commun. **66**, 1 (1991).

[95] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.

[96] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications, 2005.

[97] R. Jackiw and S. Weinberg, Phys. Rev. D **5**, 2396 (1972); G. Altarelli, N. Cabibbo and L. Maiani, Phys. Lett. B **40**, 415 (1972). I. Bars and M. Yoshimura, Phys. Rev. D **6**, 374 (1972).

[98] K. Fujikawa, B. W. Lee and A. I. Sanda, Phys. Rev. D **6**, 2923 (1972).

[99] A. de Gouva, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **188**, 303 (2009).

[100] S. Schael *et al.* [ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL and SLD and LEP Electroweak Working Group and SLD Electroweak Group and SLD Heavy Flavour Group Collaborations], Phys. Rept. **427**, 257 (2006) [hep-ex/0509008].

[101] M. Baak, M. Goebel, J. Haller, A. Hoecker, D. Kennedy, R. Kogler, K. Moenig and M. Schott *et al.*, Eur. Phys. J. C **72**, 2205 (2012) [arXiv:1209.2716 [hep-ph]].

[102] M. Baak, M. Goebel, J. Haller, A. Hoecker, D. Ludwig, K. Moenig, M. Schott and J. Stelzer, Eur. Phys. J. C **72**, 2003 (2012) [arXiv:1107.0975 [hep-ph]].

[103] [ALEPH and CDF and D0 and DELPHI and L3 and OPAL and SLD and LEP Electroweak Working Group and Tevatron Electroweak Working Group and SLD Electroweak and Heavy Flavour Groups Collaborations], arXiv:1012.2367 [hep-ex]; W. Hollik, CERN Yellow Report CERN-2010-002, 1-44 [arXiv:1012.3883 [hep-ph]]; J. D. Wells,

"TASI lecture notes: Introduction to precision electroweak analysis," hep-ph/0512342; W. Hollik, "Electroweak precision analyses,"

[104] D. C. Kennedy and B. W. Lynn, Nucl. Phys. B **322**, 1 (1989).

[105] T. Takeuchi, In *Nagoya 1991, Proceedings, Dynamical symmetry breaking* 299-335 and SLAC Stanford - SLAC-PUB-5619 (91/09,rec.Nov.) 37 p

[106] T. Takeuchi, In *Hiroshima 1991, Proceedings, Electroweak symmetry breaking* 165-188, and SLAC Stanford - SLAC-PUB-5730 (92/03,rec.May) 24 p.

[107] S. P. Martin, K. Tobe and J. D. Wells, Phys. Rev. D **71**, 073014 (2005) [hep-ph/0412424].

[108] A. Ferroglia, G. Ossola, M. Passera and A. Sirlin, Phys. Rev. D **65**, 113002 (2002) [hep-ph/0203224].

[109] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).

[110] A. Pich, hep-ph/9806303.

[111] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231**, 269 (1984); G. Gallavotti, Rev. Mod. Phys. **57**, 471 (1985); K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 (1971); K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12**, 75 (1974). C. Becchi, hep-th/9607188.

[112] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43**, 209 (1993).

[113] G. P. Lepage, hep-ph/0506330.

[114] W. Hollik, In *Langacker, P. (ed.): Precision tests of the standard electroweak model* 37-116, and Muenchen MPI Phys. - MPI-Ph-93-021 (93/04,rec.Sep.) 79 p. Bielefeld U. - BI-TP-93-16 (93/04,rec.Sep.) 79 p

[115] M. Bohm, H. Spiesberger and W. Hollik, Fortsch. Phys. **34**, 687 (1986); W. F. L. Hollik, Fortsch. Phys. **38**, 165 (1990).

[116] W. F. L. Hollik, Fortsch. Phys. **38**, 165 (1990); F. Jegerlehner, Conf. Proc. C **900603**, 476 (1990); A. Denner, G. Weiglein and S. Dittmaier, Nucl. Phys. B **440**, 95 (1995) [hep-ph/9410338].

[117] H. Murayama, I. Watanabe and K. Hagiwara, KEK-91-11.

[118] S. Davidson and H. E. Haber, Phys. Rev. D **72**, 035004 (2005) [Erratum-ibid. D **72**, 099902 (2005)] [hep-ph/0504050].