順序距離尺度の数値的表現と一意性特性について

村　上　　隆

1. はじめに

中央に支点のある2つの皿をもった天びんを考える。任意のモノの有限集合, S = $\{s_1, \cdots, s_N\}$の重さを，この天びんだけを使ってはかるものとする。天びんの皿に，それぞれモノを1個だけ乗せるという制約の下で，Sの要素の重さを測る場合を考えてみよう（図—1）。測定されたs_iの重さの尺度値を，$f(s_i)$と書くことにする。これらの尺度値全体を，単に尺度fと言う。これには次の規則によればよい。すなわち，天びんの一方の皿にs_iを，他方の皿にs_jを乗せ，s_jの方が下がったとするとき（少くとも上がらないとき），$s_i \precsim s_j$と書くことにすると，

$$s_i \precsim s_j \quad \Rightarrow \quad f(s_i) \leqq f(s_j) \qquad (1)$$

を満足するようにfを定める。（A ⇒ Bは，“もしAならばBである”ことをあらわすものとする。）

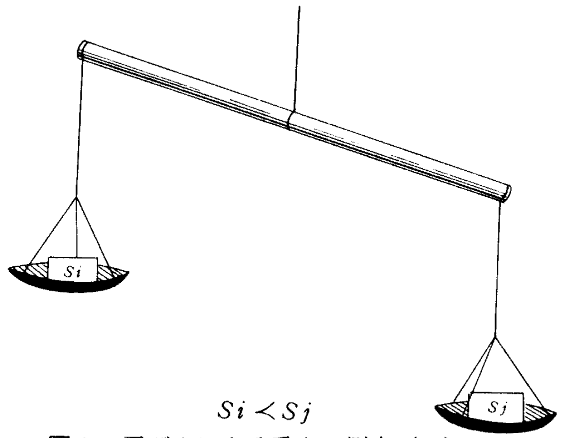

図1　天びんによる重さの測定（1）

例えば，$s_1 \prec s_2 \prec s_3 \prec s_4$となったとすれば，($s_i \precsim s_j$であって，$s_j \precsim s_i$ではないとき，$s_i \prec s_j$と書く。）$f(s_1)=1, f(s_2)=2, f(s_3)=3, f(s_4)=8$のようにしてもよいし，$f(s_1)=3, f(s_2)=6, f(s_3)=100, f(s_4)=101$のようにしてもよい。このような操作では，単に重さの順序をつけることしかできない。この尺度fは周知のように，順序尺度と呼ばれている。順序尺度では，尺度値の差や比の大小を問うことはできない。それでは，この天びんだけでは，順序尺度以上の水準で，重さの尺度を構成することはできないだろうか。

天びんの皿に，モノを2個ずつ乗せることが許されれば，$s_1, \cdots, s_N$の重さについて，単なる順序以上のことが言える（図—2）。一方の皿にモノs_iとs_jを，他方の皿にs_kとs_lを乗せ，後者が下がるとき，$s_i\ s_j \prec s_k\ s_l$と書くことにすれば，

$$s_i\ s_j \precsim s_k\ s_l \quad \Rightarrow \quad f(s_i)+f(s_j) \leqq f(s_k)+f(s_l) \qquad (2)$$

が成立するように，fを定められるようになる。この不等式はまた，

$$f(s_i)-f(s_k) \leqq f(s_l)-f(s_j) \qquad (3)$$

と書くこともできる。すなわちこの操作によって，Sの要素の尺度値の差の大小関係を言うことができる。さてそれでは，この場合重さをどの程度“正確に”測ることができるだろうか。もちろん何らの標準もないから，何グラムとか何キログラムといった単位をつけることはできないであろうが，Sの要素のどれか（例えば最も軽いもの）を単位として，重さをある巾の中で数値的に定めることはできそうに思われる。この数値の巾は，Nの大きさや，重さの分布によっても変化するであろう。

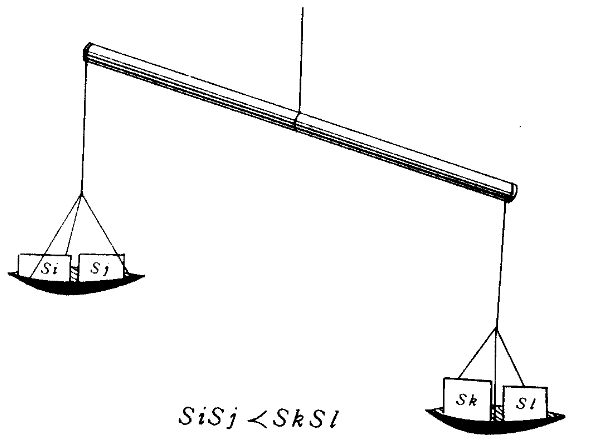

図2　天びんによる重さの測定（2）

2. OMS問題

一見，心理学とは全く無関係な例から出発したが，実はこのような事態は我々が，感覚，効用，好みといった心理量を，被験者の判断のデータから求めようとする場合に極めてよく似ている。人間の判断そのものは，せいぜい順序尺度とみなすのが適切であるような場合が多い

であろう。故に，順序判断という，いわば定性的なデータから，対象の定量的表現に進むのが，心理学的尺度構成の，一つの基本的構図となる。もし２つの刺激の，単なる順序づけのみが可能だとすれば，心理量は順序尺度として測定しうるにすぎない。しかし，何らかの手段で差の順序を決めることができるならば，尺度値はより数値的に，間隔尺度に近いものとして定まることが期待されるようになる。このための手続きは，一般に，(広い意味での）一対比較法の形をとる。問題は結局，以下のように定式化される。

〔**問題**〕　有限個の刺激の集合 $S=\{s_1,\cdots,s_N\}$ の要素からつくられる任意の２つの対 (s_i, s_j) と (s_k, s_l) の間の差の大きさの順序が，何らかの操作によって決定されるものとする。後者がより大と判定されるとき，$(s_i, s_j)\precsim(s_k, s_l)$ と記すことにする。このとき，

$$(s_i,\ s_j)\precsim(s_k,\ s_l) \Rightarrow f(s_i)-f(s_j)\leqq f(s_k)-f(s_l) \quad (4)$$

が成立するような尺度 f を求める。

(4)が成立するような尺度 f のことを，順序距離尺度 ordered metric scale（以下ＯＭＳと略記する。）と呼ぶこととし，以後，前記の問題をＯＭＳ問題と呼ぶ。

ここでＳの要素 s_i は，感覚量の測定の場合には，しばしば刺激の物理量がとられるが，尺度構成にあたって，特に量的表現である必要はなく，単なる名義尺度でもよい。関係 $\precsim$ は，何らかの心理学的な判定基準であって (s_i, s_j) 自体は，何ら量を示すものではない。$f(s_i)$ は，このいわば定性的な関係から導かれる量であって，一般に実数である。故に $\leqq$ は，通常の不等号である。

3. 存在と一意性

尺度構成の問題が一応定式化されると，次に問題になることが２つある。第１は，いかなる条件が満足されるときに解（尺度値）が存在するか，ということであり，第２は，もし解が存在するとして，それがどのような水準で一意的に定まるか，ということである。これらは従来，公理論的測定理論の立場から，研究が行われてきた。先の，(1)で定式化される重さの順序づけの問題においては，Ｓの任意の要素 s_i, s_j, s_k について，次の２つの条件，

1）$s_i\precsim s_j$，$s_j\precsim s_i$ のうち，少くともどちらか一方が成立する（連結性）

2）$s_i\precsim s_j$ かつ $s_j\precsim s_k \Rightarrow s_i\precsim s_k$（推移性）。

が成立することが，尺度 f が存在するための必要十分条件となる。1）において，$s_i\precsim s_j$ と $s_j\precsim s_i$ がともに成立するのは，天びんがちょうどつりあっている状態に対応する。2）は，この事態では極めて基本的であり，これが成立しないと，s_i, s_j, s_k はいわば三すくみとなって，順序がつかなくなる。

他方，一意性については，f を一つの尺度とし，ρ を任意の単調増加関数とするとき，$f'=\rho(f)$ となるような尺度 f' も(1)を満足する。すなわち，(1)で定義される尺度は，単調変換を除いて一意的に定まると言える。これが，順序尺度の本来の定義であるが，先の例に見るように，これは数値的には，何ら一意的ではない。以上のことは，順序尺度の構成の問題として，ほとんど自明なことであるが，ＯＭＳについてはどうであろうか。

まず，$\precsim$ が先の２つの性質，連結性と推移性を満足せねばならないことは確かであろう。また，

a）$(s_i, s_j)\precsim(s_k, s_l) \Rightarrow (s_l, s_k)\precsim(s_j, s_i)$

b）$(s_i, s_j)\precsim(s_k, s_l) \Rightarrow (s_i, s_k)\precsim(s_j, s_l)$

も満足しなければならない。これらは，対応する尺度値の不等式における関係，

$$f(s_i)-(s_j)\leqq f(s_k)-f(s_l) \Rightarrow f(s_l)-f(s_k)\leqq f(s_j)-f(s_i)$$

及び，

$$f(s_i)-f(s_j)\leqq f(s_k)-f(s_l) \Rightarrow f(s_i)-f(s_k)\leqq f(s_j)-f(s_l)$$

を考えれば，尺度が存在するための必要条件であることは明らかである。もしＳが無限集合であれば，以下幾つかの"技術的"条件を仮定することによって，尺度の存在は証明される。(Suppes & Zinnes (1963) 参照。より弱い条件による定式化には，Krantz, Luce, Suppes & Tversky (1971) の Algebraic differerence structure がある。)"技術的"条件の内容は，任意の s_i，s_j，s_k に対して，等式条件

$$f(s_i)-f(s_j)=f(s_k)-f(x) \quad (5)$$

が成立するようなＳの要素 x の存在を要請するのが主である（いわゆる可解性公理 solvability axiom）。この条件が満足されれば，尺度は，$f'=af+b\ (a>0)$ という正一次変換を除いて一意的に定まることになる。これは間隔尺度の定義そのものである。しかし，Ｓが有限集合の場合，a)，b）の条件だけでは，尺度存在の十分条件にはならない。それどころか，条件をこのような全称命題の形で述べることすら不可能なことが知られている（Scott & Suppes, 1958）。ただし，後に述べるような線形計画法の手続きを用いることによって，解が存在するか否かは，有限回の操作で判定可能ではある。そこで，解が存在することが知られたとして，一意性については更に微妙である。f が(4)を満足するとして，その正一次変換 $f'=af+b\ (a>0)$ もまた(4)を満足するから，f は間隔尺度以上のものではありえない。しかし，

これ以外にも(4)を満足するfはありそうである。かといって，fは単なる順序尺度でもないことも確かである。fを数値的に表現した場合には，ある"巾"をもって定まるはずである。この"巾"の性質について，従来の，公理論的測定理論は，何ら明確に述べることができなかった。

もっとも，(5)を満足するようなxの存在が要請できるならば，存在と一意性について，Ｓが無限集合である場合と同等なことが成立する。しかし，(5)が満足されるためには，$f(s_i)$は完全に等間隔でなければならないことになる。これは，一般の一対比較場面ではほとんど期待できないことであるし，差が完全に等しいことを判定するのもむずかしい。また，このことがわかっているようなら，それは余り尺度構成を行う意味のない事態ということになるであろう。

公理論的測定理論が，従来ほとんど実験データに適用されることがないのは，このあたりに起因すると思われる。それは一対比較データに，実際に尺度値を与える方法を全く含んでいないし，データが尺度化可能か否かを判定する条件としてすら，全く不十分なものである。

ただし，公理論的測定理論の枠内でも Suppes & Zinnes (1963) は，ＯＭＳの間隔尺度への近似の程度を評価する指標を提唱してはいる。fを(4)を満足する一つの尺度とし，gもまた(4)を満足するものとする。かつ，$f(s_i) \neq f(s_j)$であるような２つの刺激 s_i と s_j に対して，$f(s_i) = g(s_i)$，$f(s_j) = g(s_j)$ であるとする。このことは，間隔尺度が，正一次変換を除き一意的であることから正当化される。このとき，ある（小さい）正数ϵが存在して，

$$\max_{i,g} |f(s_i) - g(s_i)| \leq \epsilon \tag{6}$$

となるとき，fを間隔尺度のϵ-近似と呼ぶ，というものである。ここで $\max_{i,g}$ は，Ｓの全要素と，(4)を満足するすべてのgについて，最大値をとることを意味するものとする，しかしながら，これもＯＭＳの性質の検討に，実際に用いられたことはないようである。

本研究では，ＯＭＳの一意性の程度を，実際に尺度値を数値的に与えることによって検討する方法を提唱するが，その前にＯＭＳ問題が従来どのように扱われてきたかを，ひとわたりながめてみることにしよう。

4.　ＯＭＳの例と従来の解法

確率的モデル　前述のように，もし人間が２つの刺激を比較して，"より重い"，"より明るい"，"より好ましい"等の判断を行なうことができるにすぎないとすれば，それによって構成される尺度は，順序尺度にしかならない。すなわち，天びんの一つの皿に一つのモノしか乗せられない場合に対応するわけである。しかしながら，人間は精度の悪い天びんであり，その精度の悪さを差の大きさの比較に利用することができる。通常の一対比較法では，ある属性について，s_iがs_jより大と判断される確率$p(s_i, s_j)$が得られる。そこで，

$$p(s_i, s_j) \leq p(s_k, s_l) \Rightarrow f(s_i) - f(s_j) \leq f(s_k) - f(s_l) \tag{7}$$

が成立するようなfを求めることを問題にするとすればこれはＯＭＳ問題と同等である。そしてこれは，Fechner 以来，心理尺度構成の一つの基本的パターンであった。(7)はまた，μをある単調増加関数とするとき，

$$f(s_i) - f(s_j) = \mu(p(s_i, s_j)) \tag{8}$$

と書くこともできる。従来行なわれてきた解法は，μを何らかの既知関数として，尺度値を求めるものである。代表的なものは，μを正規逆変換と仮定するThurstoneの比較判断の法則 Case V と，μをロジスティック関数と仮定する，いわゆるＢＴＬモデルである。

差の評定　確率的モデルが，いわば間接的な方法で差の大きさを比較しようとするのに対し，それを直接，形容詞や数詞によって評定させることもしばしば行なわれる。なお，２つの刺激の違いを比の形で評定させる方法もある。恒常和法や比推定法がそれである。これらの方法は，被験者の反応そのものが比率尺度である，という仮定に依拠している。

差の直接比較　刺激の対の差の順序を直接比較によって求める方法もある。この方法では，１試行あたり４つの刺激が，同時的または継時的に，被験者に提示される。これは，正しく(4)そのものの操作であるが，あまり能率の良くない方法であるためか，用いられることは少ない。なお，この際しばしば，３節のａ）ｂ）の条件が満足されるか否かがチェックされる。しかし前述のように，これらは尺度存在の十分条件ではない。

ノンメトリック尺度構成　確率的モデルや，差の評定では，$f(s_i) - f(s_j)$ の推定値そのものが数量的に得られるから，それを用いて，$f(s_i)$を求めることは比較的容易である。（多くの場合，最小自乗解が求められる。）しかしながら，確率的モデルにおけるμの形の仮定は必ずしも妥当ではないかもしれないし，評定値をそのまま比率尺度とみなすことも，楽観的にすぎるように思われる。（もちろん，モデルの適合度のテストは，これらのどの方法においても一応可能であるわけだが。）また差の直接比較では，差そのものは数値的に確定しない。そこで，より少い仮定の下で，(4)を満足する尺度値を求めるために用いられるのがノンメトリック尺度構成法[1]である。（シェパード・ロムニ・ナーラブ，1976）。これらは，何

らかの基準を用いて，(4)を最大限に満足するようなfを求めてゆくものである。この方法についての詳細は，ここでは省略し，この方法による解が，この節で述べた他の方法と同様に，数値的に一意に定まってしまうこと，及び，この方法が対(s_i, s_j)を一次元に並べて処理するため，本質的とは言えない程度の差が解に反映してしまう可能性があることを指摘しておくにとどめよう。

ここで述べたOMSの解法が，すべて数値的に一意に定まるのは，実際のデータが誤差を含み，完全には(4)を満足しないことを利用して，何らかの適合度基準を最適化するという手法をとっているためである。この問題については，また9節で触れる。

5 解の構造

この節では，OMS問題が線形不等式の問題であること，及び，その解の構造がどのようになるかを示す。その前にOMS問題を実際のデータへの適用を考慮して，多少変更しておこう。先に，$\precsim$は，連結性を持つと仮定した。これと(4)より，

$$(s_i, s_j) \precsim (s_k, s_l) \text{ かつ } (s_k, s_l) \precsim (s_i, s_j)$$
$$f(s_i) - f(s_j) = f(s_k) - f(s_l)$$

が導かれる。しかしながら，前述のように，実際の適用において，差が完全に等しいという判定は非常に困難である。そこで，$\precsim$を用いるのをやめて，確実に(s_i, s_j)と(s_k, s_l)の違いが判定できる場合のみ，$(s_i, s_j) \prec (s_k, s_l)$とし，そうでない場合には，差の大小関係は決定しないままにしておくことにしよう。すなわち，$(s_i, s_j) \prec (s_k, s_l)$でも，$(s_k, s_l) \prec (s_i, s_j)$でもない場合を認めるのである。このとき尺度値については，$f(s_i) - f(s_j) \leqq f(s_k) - f(s_l)$でも，$f(s_k) - f(s_l) \leqq f(s_i) - f(s_j)$でもよいことにするのである。これによって，対の間の本質的でない差異が，尺度値にひびくことが避けられると考えられる。かくして，問題は有限集合Sの任意の要素，s_i, s_j, s_k, s_lについて，

$$(s_i, s_j) \prec (s_k, s_l)$$
$$f(s_i) - f(s_j) < f(s_k) - f(s_l) \qquad (9)$$

が成立するようなfを求めること，ということになる。なお，以後の数値計算技法との関係で，不等式には等号を含めて考えることにする。すなわち，

$$(s_i, s_j) \prec (s_k, s_l)$$
$$f(s_i) - f(s_j) \leqq f(s_k) - f(s_l) \qquad (10)$$

としておく。$\prec$は確実な大小関係を示すのであるから，等号が含まれるのは不自然とも思えるが，このことは，不等号の左辺に微小な数δを加え，

$$f(s_i) - f(s_j) + \delta \leqq f(s_k) - f(s_l) \qquad (11)$$

とすれば，一応回避される。

ここで，$f(s_i) \rightarrow x_i$と書きかえる。すると(10)の不等式は，

$$x_i - x_j - x_k + x_l \leqq 0 \qquad (12)$$

と書くことができる。$\prec$が成立するすべての対についてこの形の不等式ができるので，OMS問題は，連立不等式の形に定式化されることになる。行列の形で書くとすれば，

$$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{o} \qquad (13)$$

となる。ここで$\boldsymbol{x}$は求める解ベクトルであって，$\boldsymbol{x}' = (x_1, \cdot\cdot\cdot, x_N)$[2]なる列ベクトルの形をとる。$\boldsymbol{o}$はゼロベクトルである。Aは係数行列であって，その要素は$-2 \sim 2$の整数値をとる。(± 2は，$(s_i, s_j) \prec (s_j, s_k)$の場合等に生ずる。)

(13)の解ベクトルは，一般に複数個存在する。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$が不等式(13)の解であるとすれば，$A\boldsymbol{x}_1 \leqq 0$，$A\boldsymbol{x}_2 \leqq 0$が成立するが，このとき$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$の非負一次結合，

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \qquad (\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0)$$

もまた，(13)の解となる。なぜなら，

$$A(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 A \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 A \boldsymbol{x}_2 \leqq \boldsymbol{o}$$

だからである。実際(13)の一般解$\boldsymbol{x}$は，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha \qquad (\lambda_\alpha \geqq 0)$$

の形をとることが証明される。(二階堂，1961)。もし，$\boldsymbol{x}_\alpha$をすべて求めることができれば，(10)を満足する尺度値は，すべて求めることができたことになる。OMSの解が，数値的に一意性が高くなるほど，$\boldsymbol{x}_\alpha$は相互に類似したものとなるであろうし，$\boldsymbol{x}_\alpha$をすべて知ることができれば，fの間隔尺度への近似の程度も，(6)によって，容易に評価しうるものとなるであろう。

6. ORDMET

McCllelan & Coombs (1975)は，$\boldsymbol{x}_\alpha$をすべて求めるORDMETというモデルを考案した。以下に記述するアルゴリズムは，McClleland & Coombsによるものを筆者が多少変形したものである。彼等の依拠したのは，20世紀初頭の Farkas による線型不等式の解法である。この方法は，適当な初期ベクトル，$\boldsymbol{x}_\alpha^{(0)}$，$(\alpha = 1, \cdot\cdot\cdot, N)$を出発点に，(13)の不等式の成立を順次確めてゆく。初期ベクトルとしては，第α要素のみを1とする単位ベクトルをとればよい。もし(13)が成立しないベクトル$\boldsymbol{x}_\alpha^+$があれば，(13)の成立するベクトル$\boldsymbol{x}_\alpha^-$の定数

1) 通常ノンメトリック多次元尺度構成法と呼ばれる。ここでは，あくまでも一次元の場合のみを考えるので多次元の文字をはずしておくことにする。

2) $\boldsymbol{x}$は列ベクトル，$\boldsymbol{x}'$はその転置を示すものとする。

倍を加算することにより，(13)が成立するように修正する。$\boldsymbol{x}_\alpha^+$ は1つとは限らないから，$\boldsymbol{x}_\alpha^+$ 1つについて，修正されたベクトルは $\boldsymbol{x}_\alpha^-$ の数だけ存在することになる。最終的には $\boldsymbol{x}_\alpha$ の数は極めて膨大なものになってしまうのであるが，それらのうちには他の $\boldsymbol{x}_\alpha$ の正一次結合であらわされるものが，多数存在するはずである。そして，このようなベクトルは，(13) から解るように，一般解の表現のために不必要である。ORDMETでは，そのような冗長なベクトルをシンプレックス法のアルゴリズムを用いて除去することにより，$\boldsymbol{x}_\alpha$ の数を減らすように工夫されている。

しかしながら，この工夫にもかかわらず，$\boldsymbol{x}_\alpha$ の数は刺激の数 N が増大すると急速に増加する。筆者の計算では，$N=9$ のとき，必要な $\boldsymbol{x}_\alpha$ の数は62に達した。これはほとんどの対の間に順序がつけられている場合[3)]であり，これが不完全であると，この数は更に増加する。($N=5$ で完全な順序が存在すれば，4で済む場合においてすら，不完全情報下では15に達することがある。) 更に，N が増加すると $\boldsymbol{x}_\alpha$ は互いに極めてよく似たものとなるため，シンプレックス法の計算は極めて精度の高いものが必要となり，それも含めて，必要な記憶容量と計算時間は，著しく大きくなる。このような理由で，$N\geqq 10$ では，ほとんど実用にならないと考えられる。感覚尺度構成の問題では，$N=10$ は決して大きいとは言えないから，ORMETは，OMSの一意性の検討にはふさわしい方法とは言えないであろう。

7. ε- 一意性と線形計画法

線形不等式(13) の解をすべて求めることを断念せざるを得ないとしても，OMSの数値的一意性，すなわち，間隔尺度への近似の程度を評価する方法が他にないわけではない。間隔尺度への近似の程度を評価するためには必ずしもすべての解ベクトルを知っている必要はない。問題を再度定式化しよう。(10) を満足する複数の尺度 f_α が存在するのであるが，すべての f_α について任意の s_i に対し，$f_\alpha(s_{min})\leqq f_\alpha(s_i)$，$f_\alpha(s_i)\leqq f_\alpha(s_{max})$ となるような，s_{min}，s_{max} が存在するものと仮定する。それらを，s_1，s_N と置いても一般性を失なわない。そこですべての f_α について，$f_\alpha(s_1)=0$，$f_\alpha(s_N)=1$ と置く。これは，後に定義する $max(\varepsilon)$，$\bar{\varepsilon}$ を異なるデータの間で比較可能にするため，尺度全体の長さを基準化する意味をもっている。このとき，s_i に対する尺度値の一意性の指標を，

$$\varepsilon_i = \max_\alpha f_\alpha(s_i) - \min_\alpha f_\alpha(s_i) \quad (i=2,\cdots,N-1) \tag{14}$$

と定義する。もし，ある ε_i が際立って大きいならば，s_i の尺度化の情報が，十分でないことを示すであろう。また ε_i の最大値

$$max(\varepsilon) = \max_i \varepsilon_i \tag{15}$$

は，(6)式に極めて近いものであるが，これは，OMSの全体としての間隔尺度への近似の程度を示すものとして，一意性の指標となり得るであろう。同じ目的に，

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{i=2}^{N-1} \varepsilon_i \Big/ (N-2) \tag{16}$$

も利用しうると思われる。$max(\varepsilon)$ または $\bar{\varepsilon}$ によって評価されるOMSの間隔尺度への近似の程度のことを，OMSの ε- 一意性と呼ぶことにする。ε- 一意性が高いとは，$max(\varepsilon)$ や $\bar{\varepsilon}$ が小さいことを言うものとする。

さて，$\max_\alpha f_\alpha(s_i)$ 及び $\min_\alpha f_\alpha(s_i)$ を求めることは，必ずしも全ての f_α を求めることができなくても，可能である。それには，よく知られた線形計画法のアルゴリズムを利用することができる。不等式制約条件の線形計画法とは，一般に

$$\sum_j a_{ij}\ x_j - b_i \leqq 0 \tag{17}$$

$$x_j \geqq 0 \tag{18}$$

なる条件の下で，目的関数

$$z = \sum_j c_j\ x_j \tag{19}$$

を最大化するものである（伊理，1973）。ここで，x_j は変数，a_{ij}，b_i，c_i は定数である。再び $f(s_i)\rightarrow x_i$ なる書き換えを行なってみると，$\max_\alpha f_\alpha(s_i)$，$\min_\alpha f_\alpha(s_i)$ を求める問題をこの形に定式化することは，ほとんど自明に近いほど単純であることがわかる。$x_1=0$，$x_N=1$ を定数とし，x_2，$\cdots$，x_{N-1} を変数とすることによって，(12) はすべて，(17) の形に書きあらわすことが出来る。目的関数，$\max_\alpha f_\alpha(s_i)$ を求めるには単に，

$$z = x_i \tag{20}$$

とすればよく，$min\ f_\alpha(s_i)$ は

$$z = -x_i \tag{21}$$

とすれば，$-z$ がこれに相当することは容易にわかる。

不等式制約条件における線形計画法のアルゴリズムは幾つか知られているが，次節における数値実験では，最も簡単な2段階シンプレックス法と呼ばれるやり方を使用する（伊理，1973）。この方法の第1段階は，(17)，(18) を満足するような x_i を見出すためのものである。実際のデータにおいて，もしここで，そのような x_i（可能解と呼ばれる）が見出せなければ，(9)を満足する f は存在しない。すなわち，ここで解の存在の判定を行なうことができる。第2段階は，目的関数の最大化を行なう部分である。OMS問題では，目的関数が $2(N-2)$ 個存在す

3)　8節における $n=2$ の条件

るから，この部分は，それだけの回数反復されることになる。

ここで簡単な計算例をあげておこう。 $(s_2, s_1) \prec (s_4, s_3) \prec (s_3, s_2) \prec (s_3, s_1) \prec (s_4, s_2) \prec (s_4, s_1)$とする。制約不等式は，

$$(s_2, s_1) \prec (s_4, s_3) \;\rightarrow\; x_2 + x_3 - 1 \leqq 0$$
$$(s_4, s_3) \prec (s_3, s_2) \;\rightarrow\; x_2 - 2x_3 + 1 \leqq 0$$
$$(s_3, s_2) \prec (s_3, s_1) \;\rightarrow\; -x_2 \qquad \leqq 0$$

である。(他は，以上のどれかと同等になる。) 2段階法により，

$$max\, f(s_2) = 0.33 \qquad min\, f(s_2) = 0.00$$
$$max\, f(s_3) = 1.00 \qquad min\, f(s_3) = 0.50$$

が得られる。

$$\varepsilon_2 = 0.33 \qquad \varepsilon_3 = 0.50$$

である。ＯＲＤＭＥＴによる解は，３つあり，

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} (0.00\,,\ 0.33\,,\ 0.67\,,\ 1.00\,) \\ (0.00\,,\ 0.00\,,\ 0.50\,,\ 1.00\,) \\ (0.00\,,\ 0.00\,,\ 1.00\,,\ 1.00\,) \end{cases}$$

である。線形計画法による解がこれと対応していることは，明らかである。

8. 数値実験 [4)]

ＯＭＳの数値的一意性，すなわちＯＭＳの間隔尺度への近似の程度を，実際に数値的に見ることができる形で表現してみること，そして，一意性に影響を与えるであろう諸要因の効果を予備的に検討するために，一連の数値実験を試みた。この数値実験の基本的パラダイムを述べておこう。まず事前に真の尺度値$f(s_i)$を決める。その後$f(s_i)$のすべての組み合わせについて，差$f(s_i)-f(s_j)$をつくり，それを順序に還元する。すなわち，

$$f(s_i) - f(s_j) < f(s_k) - f(s_l) \quad \Rightarrow \quad (s_i, s_j) \prec (s_k, s_l) \qquad (22)$$

とする。

$$f(s_i) - f(s_j) = f(s_k) - f(s_l) \qquad (23)$$

となるような場合には，(s_i, s_j)と(s_k, s_l)の順序はつけないことにする。(これは5節で述べた考え方に対応する。) そして，この順序のみを用いて$f(s_i)$を復元してみる。７節で述べた線形計画法のアルゴリズムがそのために用いられる。なお，このとき$(s_i, s_j) \prec (s_p, s_q) \prec (s_k, s_l)$となるような$(s_p, s_q)$が存在しない場合のみ(22)を制約不等式とする。これは，このような(s_p, s_q)があれば，$(s_i, s_j) \prec (s_p, s_q)$及び$(s_p, s_q) \prec (s_k, s_l)$から当然$(s_i, s_j) \prec (s_k, s_l)$は導かれるからである。

---

4) 以下の計算は，名古屋大学大型計算機センター ＦＡＣＯＭ 230－75によった。

これによって係数行列が大きくなりすぎるのを防ぐことができる。(23)のようなことがない尺度では，制約不等式の数は，$N(N-1)/2-1$となる。

実際のデータに対して，このアルゴリズムを適用する場合には，データの誤差の関係から，不等式系が矛盾を含み，可能解が存在しない場合が多く，それに対する対策が主要な問題となるであろう。真の尺度値を先に設定するここでのやり方では，不等式系が矛盾する心配はない。この条件は，余りにも人工的にすぎるとも思われようが，ＯＭＳを実際に数値表現すること自体，初期の試みとしては，十分意味のあることであると思われる。また，実際のデータへの適用が可能になった場合にも，いかなる条件で，どの程度の一意性が得られるかを知っておくことは，実験の計画等に際しても，重要な情報となるであろう。

真の尺度値$f(s_i)$としてどのようなものをとるか，ということは，いかなる要因が，ＯＭＳの一意性に影響を与えるか，という点とも関連して，なかなか困難な問題である。ここでは，最初の試みということもあって，次のようなやり方をとってみた。まず，$s_1 = 0$, $s_N = 1$とし，$s_i\ (i = 2, \cdots, N-1)$は，この区間の中で等間隔にとるものとする。すなわち，

$$s_i = (i-1)/(N-1) \quad (i = 2, \cdots, N-1) \qquad (24)$$

とするわけである。次に$f(s_i)$は，s_iのベキ関数の形で，

$$f(s_i) = s_i^{\,n} \qquad (n > 0) \qquad (25)$$

とする，これによって，

$$0 = f(s_1) < f(s_2) < \cdots < f(s_N) = 1 \qquad (26)$$

となる。これは，７節で行なった尺度値の基準化と一致する。ここでnを変化させることにより，隣接する尺度値の差（一階差分），$\triangle f(s_i) = f(s_{i+1}) - f(s_i)$の分散が変化する。一階差分の分散は，$\varepsilon$-一意性に対して何らかの影響を与えると予想される。(25)によって定義される尺度を原尺度（original scale）と呼ぶ。

最初に，一意性に大きな影響を与えると思われる刺激の数Nの大きさの効果について検討する。刺激の数が増大するにつれて，制約不等式の数は増加する。また，尺度値の両端は，$f(s_1) = 0$, $f(s_N) = 1$に固定されているから，Nが大きくなるほどＯＭＳの一意性の程度は増大することが，直観的に予想される。この場合は，原尺度に関する計算を行なう。

ところで，原尺度は，一階差分がｉが増加するに従って，単調に増減するという特殊なものである。そこで，$\triangle f(s_i)$をランダムに入れかえた尺度値を作り，幾つかのNについて一意性の検討を行なう。すなわち，$\triangle f(s_i)$ $(i = 1, \cdots, N-1)$をランダムに並べかえたものを，

表－1
$N=11$, $n=1.5$ の原尺度の再現

i	s_i	$max f$	$min f$	ε_i	$s_i^{1.4}$	$s_i^{1.5}$	$s_i^{1.6}$
1	0.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	0.1	.053	.000	.053	.040	.032	.025
3	0.2	.109	.077	.032	.105	.089	<u>.076</u>
4	0.3	.184	.152	.033	<u>.185</u>	.164	<u>.146</u>
5	0.4	.273	.231	.042	<u>.277</u>	.253	.231
6	0.5	.370	.333	.036	<u>.379</u>	.354	<u>.330</u>
7	0.6	.487	.452	.035	<u>.489</u>	.465	<u>.442</u>
8	0.7	.613	.576	.037	.607	.586	<u>.565</u>
9	0.8	.742	.692	.050	.732	.716	.700
10	0.9	.871	.833	.038	.863	.854	.845
11	1.0	1.000	1.000	.000	1.000	1.000	1.000

$\triangle f^*(s_i)$ $(i=1,\cdot\cdot\cdot,N-1)$ とするとき，

$f^*(s_i+1)=f^*(s_i)+\triangle f^*(s_i)$, $f^*(s_1)=0$

によって，f^*を定義する。これを置換尺度(permutation scale)と呼ぶ。これによってN及び一階差分の分散については同一の条件で，どの程度一意性の変動が生ずるかを知ることができよう。

なお，線形計画法の計算の実行に際しては，$x_1(=f(s_1))=1$, $x_N(=f(s_N))=2$と置いたことを付記しておく。これは，線形計画法においては，(18) に見られるように，$x_i\geqq 0$ なる制約条件が課されているが，これが解に実質的な影響を与えては具合の悪い場合があるからである。

一意性の指標としては，(15)，(16) で定義した $max(\varepsilon)$ と$\bar{\varepsilon}$を用いるが，尺度値全体の計算例を一つだけ示しておく（表－1）。これは，$N=11$, $n=1.5$ の場合である。この場合，真の尺度値の差は，すべて異なるので，制約不等式は，$N(N-1)/2-1=54$となる。ただし，この中のかなりの部分が他から導かれるものであろう（特に，それらを除去する工夫はしていない)。表－1にはs_i，真の尺度値，再現された尺度値の最大値及び最小値，ε_iが示されている。間隔尺度への近似の程度が，直観的に見てとれるであろう。$max(\varepsilon)=.053$, $\bar{\varepsilon}=.039$である。当然のことであるが，真の尺度値は，再現された尺度値の範囲に含まれている。

この一意性が，どの程度のものであるかを，もう少しはっきりさせるために，(25) において，n = 1.4 , 1.6 としたものと比較してみよう。これらの値も表－1に入れてあるが，そこで下線を付した数値は，再現された尺度値の範囲に含まれていない。尺度値の再現には，順序のみしか用いなかったにもかかわらず，真の尺度値についてこれだけの情報を回復しているのは，興味深いことと言えよう。以下，先に述べたような要因の効果の検討にはいる。

刺激の数　一意性に対する，Nの大きさの効果を調べるために，$N=4\sim20$に対する，$max(\varepsilon)$及び$\bar{\varepsilon}$が求められた。真の尺度値は，(25) 式において，$n=1$，1.5，2，2.5，3.5，とした5種の原尺度が設定された。ただし，$n=1$においては，真の尺度値が完全に等間隔となるため，順序を決定できない対が多く，必然的に不等式の

表－2
$N\leqq 20$ における原尺度に対する $max(\varepsilon)$ の値

N	$n=1.0$	$n=1.5$	$n=2.0$	$n=2.5$	$n=3.5$
4	.500	.333	.500	.500	.500
5	.500	.250	.333	.500	.500
6	.333	.167	.222	.333	.500
7	.333	.133	.167	.200	.286
8	.250	.104	.118	.143	.182
9	.250	.071	.091	.100	.114
10	.208	.061	.071	.119	.120
11	.200	.053	.059	.063	.102
12	.167	.045	.053	.050	.074
13	.167	.038	.059	.042	.063
14	.143	.034	.043	.042	.062
15	.143	.023	.036	.029	.048
16	——	.017	.030	.027	.034
17	——	.015	.031	.022	.033
18	——	.013	.025	.021	.026
19	——	.015	.022	.019	.022
20	——	.011	.019	.017	.020

数が非常に増加するため，記憶容量と計算時間の関係で，$N \geqq 16$の計算は省略された。この結果は，表－2，表－3にまとめられている。

Nと，$max(\epsilon)$及び$\bar{\epsilon}$ との関係を検討してみると，これらは両対数グラフ上で，ほぼ直線的関係にあることが見出された。$\bar{\epsilon}$に関する結果の一部を，図－3に示す。すなわち，$max(\epsilon)$ 及び，$\bar{\epsilon}$ と，N との間には，次のベキ関数が経験的に成立することになる。

$$max\ (\epsilon) = k\ N^{m} \tag{27}$$

$$\bar{\epsilon} = k'\ N^{m'} \tag{28}$$

ここで，k, k' は正の，m，m' は負の定数である。図－3からわかるように，m'の値は，$n=1$においてほぼ－1であり，$n=1.5$，2においてほぼ－2となっている。なお，$n=2.5$，3.5においては，これより大きい数値をとっている。$n=1$は，前述のように，順序の決定できない対が非常に多いかなり特殊なケースであり，$n=2$においても，少数の順序の決定できない対があることから，$\bar{\epsilon}$は，比較的大きいNに対しても，他の場合に比して大きな値をとっている。$n=1.5$，2.5，3.5の各条件は，真の尺度値の差はすべて異なる値をとる。この場合，一階差分の分散が最も大きい$n=3.5$では，小さいNに対して$\bar{\epsilon}$の値が大きく，それに対して，$n=1.5$では$\bar{\epsilon}$は小さい。$n=2.5$ではそれらの中間にある。しかしながら，Nが大きくなるにつれて，これらは，ほぼ同程度の一意性を持つようになる。一階差分の変動は，9節で述べるように，ϵ-一意性に対する決定的な要因である。かくして，一階差分が単調に増減するような事態では，その分散が特に大きくない限り，一意性は刺激の数Nの2乗のオーダーで減少する，と考えてよいように思われる。なお，図－3に見られるように，いずれの条件においても，$\bar{\epsilon}$はNのベキ関数からかなりランダムなズレを示している。このことは，ほぼ同一の条件においても，ϵ-一意性の程度には，Nだけでは説明できないかなりの変動が存在することを示している。しかし，$max(\epsilon)$ では，一階差分の分散の違いは大きなNでも影響している。

表－3
$N \leqq 20$ における原尺度に対する$\bar{\epsilon}$ の値

N	$n=1.0$	$n=1.5$	$n=2.0$	$n=2.5$	$n=3.5$
4	.500	.250	.375	.375	.375
5	.444	.189	.222	.292	.292
6	.292	.138	.182	.188	.234
7	.320	.095	.138	.133	.121
8	.217	.072	.095	.099	.104
9	.226	.041	.070	.064	.071
10	.188	.045	.058	.070	.065
11	.187	.039	.045	.048	.057
12	.147	.032	.043	.034	.041
13	.160	.024	.036	.030	.035
14	.127	.023	.032	.028	.031
15	.133	.018	.028	.021	.024
16	——	.013	.024	.019	.020
17	——	.012	.023	.016	.018
18	——	.011	.018	.014	.014
19	——	.010	.017	.012	.012
20	——	.009	.016	.010	.011

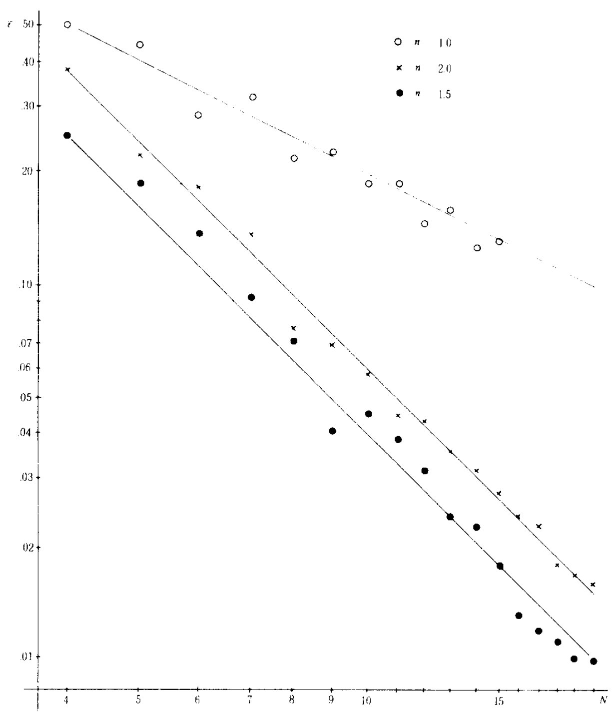

図3　両対数グラフに示された，各条件におけるNと$\bar{\epsilon}$の関係
直線は上が $\bar{\epsilon}=K'N^{-1}$　下2本は $\bar{\epsilon}=K'N^{-2}$

置換尺度におけるϵ-一意性の変動　$n=1.5$，2.5，3.5の各場合について，それぞれ$N=7$，11，15の各条件で，20ずつの置換尺度を設定して尺度値の再現を行った。ϵ-一意性についての結果をまとめたものが，表－4，及び表－5である。これらの表には，各条件における，各20の置換尺度に対する$max(\epsilon)$ 及び $\bar{\epsilon}$ の平均値，標準偏差，変動係数，最大値，最小値が示されている。これらと，表－2，表－3を比較してまず明らかになることは，$max(\epsilon)$ 及び$\bar{\epsilon}$ の平均値は，同一条件における原尺度の値よりもかなり大きいことである。このことは，n が大きい場合ほど著しい。これは，一階差分の単調に増減することがϵ-一意性にとって，かなり有利な条件であることを示すものである。しかも，これが必ずしも最大のϵ-一意性のための条件ではなく，ほとんどの条件で，原尺度より高いϵ-一意性を示す置換尺度が存在する。

表－4
置換尺度における $max(\varepsilon)$ の変動（V は変動係数）

N	n	max	min	$Mean$	SD	V
	1.5	.250	.100	.161	.042	.259
7	2.5	.400	.167	.280	.078	.277
	3.5	.500	.250	.406	.117	.287
	1.5	.111	.042	.072	.021	.286
11	2.5	.167	.063	.105	.031	.295
	3.5	.250	.083	.166	.054	.327
	1.5	.050	.021	.033	.010	.317
15	2.5	.077	.019	.041	.014	.353
	3.5	.161	.031	.080	.040	.496

表－5
置換尺度における $\bar{\varepsilon}$ の変動

N	n	max	min	$Mean$	SD	V
	1.5	.169	.070	.120	.026	.220
7	2.5	.318	.124	.200	.055	.275
	3.5	.467	.113	.253	.090	.355
	1.5	.075	.030	.047	.012	.260
11	2.5	.119	.041	.073	.020	.269
	3.5	.192	.064	.108	.036	.330
	1.5	.031	.015	.021	.005	.239
15	2.5	.043	.015	.027	.007	.262
	3.5	.099	.016	.047	.022	.466

次に注目すべきことは，同一条件内における，ε- 一意性の変動が大きいことである。最小値と最大値の比は，条件によっては5倍以上となっている。

変動の大きさを，条件毎に比較してみると，標準偏差は，Nが大きいほど，またnが小さいほど，小さくなることが明らかである。すなわち，多くの刺激を用い，かつそれらの真の尺度値の一階差分が，余り異ならないほど，絶対値でみた ε- 一意性は安定してくることになる。これはいわば絶対誤差であるが，相対誤差の測度である変動係数でみると，多少事情が異なってくる。このときも，n が小さいほど相対誤差は小さいが，一方，（特に $max(\varepsilon)$ において）Nが増大するほど，相対誤差も増大する傾向が認められる。

置換尺度の場合，一階差分の値の"分布"自身は，原尺度と変化していないのであり，その順序が変化するにすぎないにもかかわらず，ここに見られるような大きな ε- 一意性の変動が見られるのは意外に思われる。ここで ε- 一意性の高い尺度とは，いかなる特性を持つものかという疑問が生ずる，残念ながら，現在のところ，それはほとんど解らないと言ってよい。前述のように，一階差分の単調性は，確かに一意性を上昇させる一つの要因のようではあるが，表－4，表－5で最小値となっている置換尺度は，これとは全く異なるものが多いのである。この点は今後検討してゆかねばならない。

9. 考　察

前節における数値実験によって，OMSの一意性について明きらかになったことをまとめてみよう。第1に，他の条件が一定ならば，刺激の数Nが大きくなるほど，ε- 一意性が高まる（ε- 一意性の指標として $\bar{\varepsilon}$ を用いるとすれば，これは N^{-2} に比例して減少する）ということである。第2に，真の尺度値の一階差分の分散が小さいほど，ε- 一意性は高まるということである。（ただし，一階差分が余りにも似ていると，順序判定の不能な対が増加して，一意性はかえって低下する）。他方，一階差分の値の分布は同一でも，その順序が異なると，ε- 一意性にはかなりの変動が生ずる。その原因は現在のところ明らかでない。ただし一階差分が単調に変化する場合，ε- 一意性が高くなることは認められる。

この最後の点から，データ収集前の段階で，尺度の ε- 一意性を予測することはむずかしい。実際のデータでは後述するような誤差の影響も考えねばならない，望みの ε- 一意性を得るために，幾つの刺激を用いなければならないか，といったことを決めるのも困難である。しかしながら，ある範囲内では，$max(\varepsilon)$ と $\bar{\varepsilon}$ は，N の単純な関数となっていることも事実である。そこで，多少評価は甘くても，$\bar{\varepsilon}$ 及び $max(\varepsilon)$ を，N の関数として上から押さえる式を形式的に証明することはできないか，という問題が生ずる。残念ながら，少くとも $max(\varepsilon)$ については，このことを全く無条件で行なうことは不可能である。次のような例を考えよう。

$$f(s_1) \leqq f(s_2) \leqq \cdots\cdots \leqq f(s_{N-1}) \leqq f(s_N)$$

であって，かつ

$$(s_1, s_{N-1}) \prec (s_{N-1}, s_N) \tag{29}$$

としてみよう。すなわちこれは，他に比べて $f(s_N)$が際立って大きい場合である。このとき(29)を満足するような尺度において，$f(s_{N-1})$のとりうる値の範囲を考えると

$$0.0 \leqq f(s_{N-1}) \leqq 0.5 \tag{30}$$

であることは容易にわかる。(29)が成立している限り，Nがいかに大であっても，この範囲は縮少しないから，一般に $max(\varepsilon)$ は，尺度値としてあらゆるものを考慮したときには，Nの大きさの如何にかかわらず，0.5を下まわり得ないことになる。$\bar{\varepsilon}$ の方は，Nが大となるに従って，小さくなることは期待できる。これによって，$\bar{\varepsilon}$がNの大きな値に対しては，$max(\varepsilon)$ ほど，一階差分の分散によって異ならないことが説明される。しかし，むし

ろこの例は，$\bar{\varepsilon}$ が ε_- 一意性の指標として不適切であることを示すものと言える。$max(\varepsilon)=0.5$ となるような尺度は実用上，ほとんど意味をなさないと考えられるからである。

上の例は，有限集合において定義されるOMSが，3節で述べた可解性公理を持たないことの結果として生ずるのである。だからこそ，OMSで完全な一意性に到達するためには，尺度値が全く等間隔であるという条件が必要だったのである。実際の適用においては，事前の情報を利用して，なるべくこれに近い条件が満足されるように努力する，ということであろう。なお，この場合，等号条件を回避するために，(11) において導入した δ を用いたとしても，結論は，ほとんど変化しないと思われる。δ として，大きめの数値をとれば，ε_- 一意性の上昇は得られるであろうが，可能解が得られなくなる可能性も大きくなる。

次に，実際のデータへの適用に際しての誤差の取り扱いについて述べよう。対 (s_i, s_j) について，差の数的評定が何回か反復されている場合を考えよう。このとき，評定値にわずかの差しかなくても$\prec$が成立していると判定するとすれば，ほとんどの場合，(13) の不等式系は矛盾を含むことになり，可能解が得られないことになるであろう。これを避けるためには，$\prec$の成立基準について，何らかの（ノンパラメリックな）統計的基準を導入せねばならない。これは確率的モデルや，差の直接評定についても同様である。適用例については，村上 (1977) を参照されたい。

この統計的基準が，ε_- 一意性にいかなる影響を及ぼすかは，数値実験によってある程度見ることができる。適切な統計的基準が設定されていれば，それは真の尺度値の差のある値以下の相違が，データからは識別できないということを意味するであろう。σ をある正数とするとき，対の間の順序を

$$f(s_i)-f(s_j)+\sigma \leqq f(s_k)-f(s_l) \Rightarrow (s_i, s_j) \prec (s_k, s_l) \qquad (31)$$

という形で定義する。σ が大となるほど，多くの対の間の順序が決定不能となる。$n=1.5$，$N=15$ において，幾つかの σ の値に対する，$max(\varepsilon)$ と $\bar{\varepsilon}$ を計算したものが表－6である。$max(\varepsilon)$, $\bar{\varepsilon}$ とも，ほぼ σ の一次関数として増加している。なおここでは，必ずしも $0 \leqq f(s_i) \leqq 1$ とならない場合が出てくる。故に，$max(\varepsilon)$, $\bar{\varepsilon}$ についてもこのことを考慮して値を見てゆく必要がある。

実際のデータへの適用に際しては，(11) の $\delta>0$ を加えた方が良い。なぜなら，実際のデータでは，結果的に，$(s_i, s_j) \prec (s_k, s_l)$ かつ，$(s_k, s_l) \prec (s_i, s_j)$ なる関係が生ずる可能性があり，$\delta=0$ の場合，(5) のような

表－6
σ に対応する ε_- 一意性の変化

σ	$max(\varepsilon)$	$\bar{\varepsilon}$
0.00	.023	.018
0.01	.056	.047
0.02	.096	.070
0.03	.120	.086
0.04	.139	.113
0.05	.160	.133
0.06	.217	.165
0.08	.226	.201
0.10	.322	.231
0.20	.500	.411

等式条件を意味することになるので，一意性が過度に高められることになるからである，δ の値の適切な決め方は，今後の課題である。

誤差を含むデータから導かれるOMSは，二重の意味で，間隔尺度として非一意的であることが，これで明らかになった。一つには，順序から数値的表現に変換するという事態そのものが持つ本質的制約であり，他方では，データの誤差により，順序自体に不確定な部分があらわれるためである。そして，この両者を含めて ε_- 一意性は，順序データから構成された尺度値の信頼性を示す概念であると考えることができよう。これらを含めた意味での ε_- 一意性の程度を予測する理論の構築は極めて困難であろう。

最適化手法による尺度を解釈するに際しては，信頼性の低いデータによる尺度値でも，その一意性の故に絶対化する危険が伴うし，逆にモデルへの不適合を理由に，全データを捨て去るようなこともありうる。それに対して，ここで用いられたアルゴリズムは，信頼性を各刺激毎の尺度値の範囲，及び全体としての ε_- 一意性として示すことにより，測定の反復，あるいは適当な刺激の追加や削除等の方法により，データの信頼性を高めてゆくための一段階としても用い得るであろう。前節の数値実験は，少数の要因を特殊な条件下で単独でとりあげているにすぎないし，未だに不明確な点も多いが，そのための指針となりうるものを含んでいると思われる。

本研究は専ら差の順序関係から，尺度値を求める方法について考えてきた。しかしながらこの方法は，いわゆる conjoint measurement のモデルにも容易に拡張することができる。このモデルのうち最も単純な，additive conjoint measurement (Luce & Tukey, 1964) では，2つの集合AとBの要素の対 (a_i, b_s) の順序関係から，AとB上の実数値関数 f と g を，

$$(a_i, b_s) \prec (a_j, b_t)$$
$$\Rightarrow \quad g(a_i) + h(b_s) \leqq g(a_j) + h(b_t) \qquad (32)$$

を満足するように求めることが問題となる。A，Bを要因，a_i，b_s はそれぞれの水準と考えれば，これは（交互作用成分を除いた）2要因分散分析の順序尺度版，といったものであることが理解されよう。要因の数はもっと増加することができるし，限られた形ではあるが交互作用項も考慮することができる。このモデルと7節で述べたアルゴリズムの組み合わせは，分布フリーな統計解析におけるパラメータ推定の方法とも解釈できると思われる。これは本研究で扱ったモデルより，一般的なデータ分析の方法となる可能性を持つものと言えよう。

文 献

伊理正夫 1973 線形計画法（現代数学全書3）白日社

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P., & Tversky, A. 1971 *Foundations of Measurement.* New York: Academic Press.

Luce, R. D., & Tukey, J. W. 1964 Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology,* **1**, 1-27.

McClelland, G. H., & Coombs, C. H. 1975 ORDMET: A general algorithm for constructing all numerical solutions to rodered metric structures. *Psychometrika,* **40**, 269-290.

村上隆 1977 差の順序判断による一次元尺度の一意性 日本心理学会第41回大会発表論文集 260－261

二階堂副包 1961 経済のための線型数学（新数学シリーズ）培風館

Scott, D., & Suppes, P. 1958 Foundational aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic,* **23**, 113-128.

シェパード・ロムニー・ナーラブ（編）岡太彬訓・渡辺恵子訳 1976 多次元尺度構成法 MDS 共立出版 (Shepard, R. N., Romney, A. K. & Nerlove, S. B. (Eds.) 1972 *Multidimensional Scaling. Theory and Applications in the Behavioral Science.* New York & London: Seminar Press.)

Suppes, P., & Zinnes, J. L. 1963 Basic Measurement Theory. In R. D. Luce, R. R. Bush, & E. Galanter (Eds.), *Handbook of Mathematical Psychology,* I. New York: Wiley.

ON THE NUMERICAL REPRESENTATIONS AND THE UNIQUENESS PROPERTIES OF ORDERED METRIC SCALES

Takashi MURAKAMI

Scale values of an ordered metric scale (OMS) derived from a given ordering of differences between two stimuli are not necessarily determined uniquely like an interval scale when the stimulus set is finite. In this study, a method to find the maximum and minimum scale values for all stimuli in any OMS is proposed. The smaller is the range of scale values for any stimulus, the higher is the uniqueness of numerical assignment of OMS. The maximum value of the ranges for all stimuli is called an index of ε-uniqueness for a given OMS.

The numerical experiments were carried out to explore the effects of factors affecting the ε-uniqueness. Assumed true scale values were reduced to the orderings of differences between all the pairs of stimuli. Using a modified linear programming algorithm, these orderings were processed to recover the scale values and to calculate the indices of E-uniqueness. Factors investigated in the experiments are the number of stimuli N, and the size of variance of first order differences of the scale values and their permutation.

The Main results are as follows;

1) Increase in N and decrease in variance of first order differences raise ε-uniqueness. Unless variance of first order differences is too large or too small, maximum range of scale values decreases in proportion to N^{-2} approximately.

2) While remaining conditions are kept to be constant, ε-uniqueness varies with the permutation of first order differences remarkably.