離散数学及び演習
講義 2　 2014. 4.24（木）

直積・関係
2 項関係の性質
（教科書　pp.9-12）

教科書・・・野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

順序対（ordered pair）

- 順序対
  - 決められた順序に並べられた対象からなる対
  - 対象 a と対象 b からなる順序対 (a, b)
    - a … 第 1 成分（1st component）
    - b … 第 2 成分（2nd component）

例：
- （2，5），（－3，2.5） … 座標平面上の点
- （太郎，100），（次郎，50） … 学生とその得点
- （太郎，花子），（太郎，次郎） … 兄弟

- 一般に，$(a, b) \neq (b, a)$
  - cf. $\{a, b\} = \{b, a\}$
- (a, a) も順序対
  - cf. $\{a, a\} = \{a\}$

2

等しい順序対

- 順序対 (a, b) と順序対 (c, d) は等しい（equal）
  $((a, b) = (c, d))$
  - $a=c$ かつ $b=d$
  - 各成分がそれぞれ等しい

3

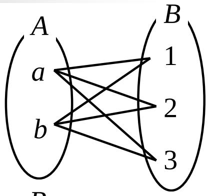
n 項組（n-tuple）

- n 項組
  - 決められた順序に並べられた n 個の対象からなる列
    $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
  - 対象 a_i … 第 i 成分（i-th component）
  - 2 項組 … 順序対のこと
- n 項組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と n 項組 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は等しい
  - 任意の i $(i=1, \ldots, n)$ に対して，$a_i = b_i$

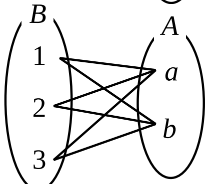
4

直積（cartesian product）

- 集合 A と集合 B の直積
  - $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ かつ $y \in B\}$



例：　$A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2, 3\}$
- $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- $B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
  - 一般に，$A \times B \neq B \times A$.
- $A \times A = A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$



5

直積（続き）

- 集合 $A_1, \ldots, A_n$ の直積
  - $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i,\ i=1, \ldots, n\}$
- $A_1 = \ldots = A_n$ $(= A)$ のとき
  - $A_1 \times \ldots \times A_n = A^n$

例：　$A=\{a, b\}$
- $A \times A \times A = A^3$
  $= \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$

6

定理

- 集合 A, B, C に対して，次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(2)　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

- 有限集合 A, B に対して，

　$|A\times B| = |A|\cdot|B|$

7

2 項関係(binary relation)

- 集合 A から集合 B への 2 項関係 R
  - $R\subseteq A\times B$

例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$　… 学生の集合

　　$B=\{a, b, c, d, e\}$　… 科目の集合

- 順序対 $(1, a)$ … 学生 1 は科目 a を受講している
- $A\times B$ … 学生と科目のすべての組み合わせからなる集合
- $R=\{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$

　　$\subseteq A\times B$

　… 学生とその学生が受講している科目

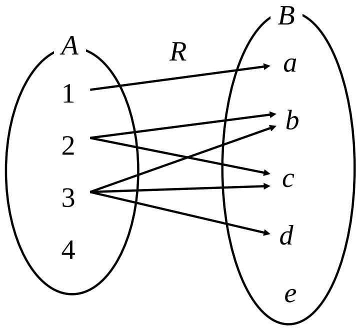
8

2 項関係のグラフ表現

$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{a, b, c, d, e\}$

$R=\{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$

$\subseteq A\times B$



9

2 項関係(続き)

- 集合 A から集合 A への 2 項関係 $R\subseteq A\times A$
- $R\subseteq A\times A=A^2$ … 集合 A 上の 2 項関係
- $(a, b)\in R$ … $a\,R\,b$

例：$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$(すべての自然数からなる集合)

$R=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots, (2, 3), (2, 4), \ldots\}\subseteq\mathbf{N}^2$

- $(1, 2)\in R$ … 1 は 2 より真に小さい
- $1\,R\,2$, $1\,R\,3$, $1\,R\,4$, …, $2\,R\,3$, $2\,R\,4$, …

- R の代わりに$<$を使うと … $1<2$, $1<3$, $1<4$, …,
- $<=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots, (2, 3), (2, 4), \ldots\}\subseteq\mathbf{N}^2$

10

2 項関係の定義域，値域

関係 $R\subseteq A\times B$ に対して，

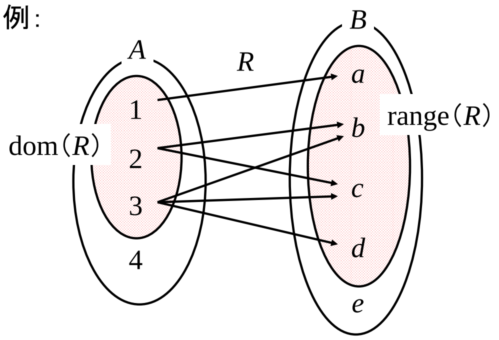
- R の定義域(domain)
  - $\mathrm{dom}(R)=\{x\in A \mid$ ある $y\in B$ に対して，$xRy\}$
- R の値域(range)
  - $\mathrm{range}(R)=\{y\in B \mid$ ある $x\in A$ に対して，$xRy\}$

11

2 項関係の定義域，値域(続き)

- $\mathrm{dom}(R)=\{x\in A \mid$ ある $y\in B$ に対して，$xRy\}$
- $\mathrm{range}(R)=\{y\in B \mid$ ある $x\in A$ に対して，$xRy\}$

例：



12

n 項関係（n-ary relation）

- 集合 A_1, …, A_n の間の n 項関係 R
  - $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$
- $R \subseteq A \times \ldots \times A = A^n$ … 集合 A 上の n 項関係

例：$\mathbf{R}$ … すべての実数からなる集合

$$L = \{ (x, y, z) \mid \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3} \} \subseteq \mathbf{R}^3$$

… $\mathbf{R}$ 上の 3 項関係
（座標空間上の直線）

13

関係の演算

- 関係 R_1, $R_2 \subseteq A \times B$
  - $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$

例：$A = \{1, 2, 3, 4\}$ … 学生の集合
$B = \{a, b, c, d, e\}$ … 科目の集合
$R_1 = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
… 学生とその学生が受講している科目
$R_2 = \{(1, a), (1, d), (2, b), (3, b), (4, d), (4, e)\}$
… 学生とその学生が興味を持っている科目

- $R_1 \cap R_2 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$
  … 学生とその学生が興味を持って受講している科目
- $R_1 - R_2 = \{(2, c), (3, c), (3, d)\}$
  … 学生とその学生が受講しているが興味のない科目

14

逆関係（inverse）

- 関係 $R \subseteq A \times B$ の逆関係 R^{-1}
  - $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ （$\subseteq B \times A$）

例：$A = \{1, 2, 3, 4\}$ … 学生の集合
$B = \{a, b, c, d, e\}$ … 科目の集合
$R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
… 学生とその学生が受講している科目

- $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
  … 科目とそれを受講している学生

15

補関係（complement）

- 関係 $R \subseteq A \times B$ の補関係
  - $R^c = (A \times B) - R$ （$\subseteq A \times B$）

例：$A = \{1, 2, 3, 4\}$ … 学生の集合
$B = \{a, b, c, d, e\}$ … 科目の集合
$R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
… 学生とその学生が受講している科目

- $R^c = \{(1, b), (1, c), (1, d), (1, e),$
  $(2, a), (2, d), (2, e), (3, a), (3, e),$
  $(4, a), (4, b), (4, c), (4, d), (4, e)\}$
  … 学生とその学生が受講していない科目

16

定理

関係 R, $S \subseteq A \times B$ に対して，次の(1)～(5)が成り立つ．

(1) $(R^{-1})^{-1} = R$
(2) $R \subseteq S$ ならば，$R^{-1} \subseteq S^{-1}$
(3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
(4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
(5) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

17

証明

(3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

- a)「$(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$」と
- b)「$R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$」の両方を示す．
- a)「任意の $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$ に対して，$(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$」を示す．

---

a) 任意の $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$ に対して，$(y, x) \in R \cup S$.
ゆえに，$(y, x) \in R$，または，$(y, x) \in S$.
このとき，$(x, y) \in R^{-1}$，または，$(x, y) \in S^{-1}$ だから，
$(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$.
したがって，$(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$.

18

証明（続き）

（3）（ $R \cup S$ ）$^{-1}$ ＝ $R^{-1} \cup S^{-1}$

- a）「（ $R \cup S$ ）$^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$」と
- b）「 $R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq$（ $R \cup S$ ）$^{-1}$ 」の両方を示す．
- b）「任意の $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ に対して，$(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$」を示す．

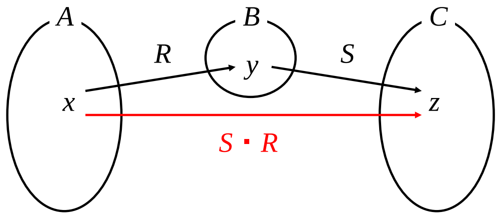
---

b）任意の $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ に対して，
$(x, y) \in R^{-1}$，または，$(x, y) \in S^{-1}$.
ゆえに，$(y, x) \in R$，または，$(y, x) \in S$.
このとき，$(y, x) \in R \cup S$ だから，$(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$.
したがって，$R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$.

19

関係の合成（composition）

- 関係 $R \subseteq A \times B$ と関係 $S \subseteq B \times C$ の合成関係
  - $S \cdot R$
    ＝ $\{(x, z) \mid$ ある $y \in B$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in S\}$
    （ $\subseteq A \times C$ ）
    - $S \cdot R = \{(x, z) \mid$ ある $y \in B$ に対して，$(x, y) \in S$ かつ $(y, z) \in R\}$ と定義する場合もある



20

合成関係（続き）

- $S \cdot R = \{(x, z) \mid$ ある $y \in B$ に対して，$(x, y) \in R$，$(y, z) \in S\}$

例： $A = \{1, 2, 3, 4\}$　… 学生の集合
$B = \{a, b, c, d, e\}$　… 科目の集合
$C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$　… 先生の集合
$R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
… 学生とその学生が受講している科目
$S = \{(a, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (c, \gamma), (d, \gamma)\}$
… 科目とそれを担当している先生
$S \cdot R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \beta), (3, \gamma)\}$
… 学生とその学生の受講科目を担当している先生

21

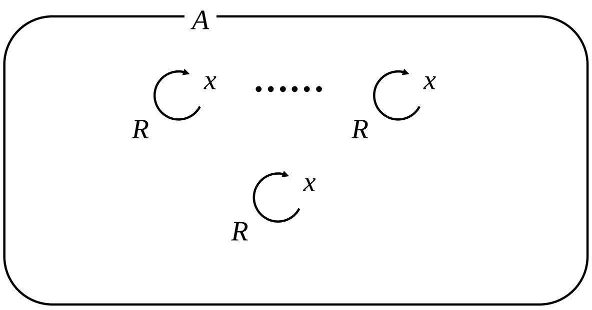
定理

関係 $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$，$T \subseteq C \times D$ に対して，
$(T \cdot S) \cdot R = T \cdot (S \cdot R)$
（関係の合成に関する結合則）
が成り立つ．

22

反射的な関係

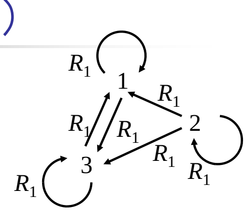
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反射的（reflexive）である
  - 任意の $x \in A$ に対して，$(x, x) \in R$



23

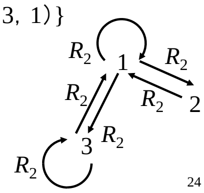
反射的な関係（続き）

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反射的である
  - 任意の $x \in A$ に対して，$(x, x) \in R$



例： $A = \{1, 2, 3\}$

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
  - $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R_1$
  - 任意の $x \in A$ に対して $(x, x) \in R_1$ だから，R_1 は反射的である.
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$
  - $(2, 2) \notin R_2$ だから，R_2 は反射的でない.



24

反射的な関係(続き2)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反射的である
  - 任意の $x \in A$ に対して，$(x, x) \in R$

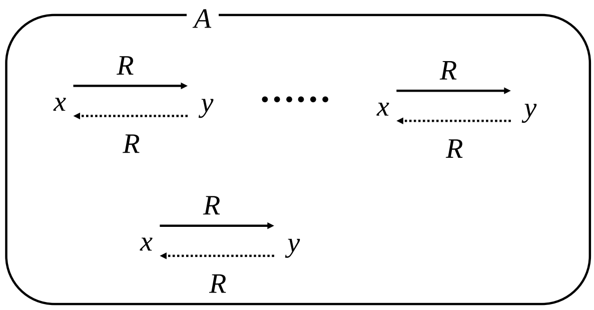
例：　$\mathbf{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

- $S_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x$ は y を割り切る $\}$
  - 任意の $x \in \mathbf{N}$ に対して $(x, x) \in S_1$ だから，S_1 は反射的である．
- $S_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x < y \}$
  - $(1, 1) \notin S_2$ （$1 < 1$ でない）だから，S_2 は反射的でない．
- $S_3 = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x \leq y \}$ は反射的である．

25

対称的な関係

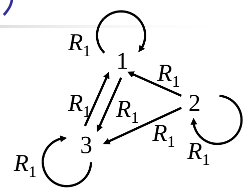
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は対称的(symmetric)である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$



26

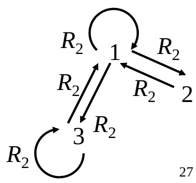
対称的な関係(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は対称的である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$



例：$A = \{ 1, 2, 3 \}$

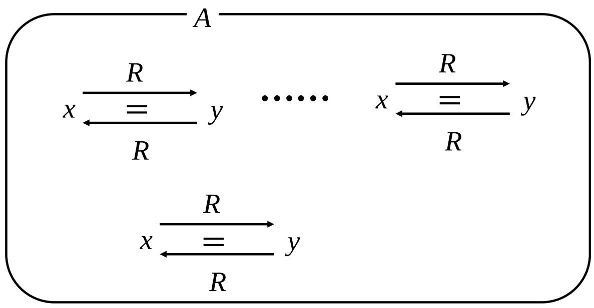
- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
  - $(2, 1) \in R_1$ であるが，$(1, 2) \notin R_1$ だから，R_1 は対称的でない．
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$
  - $(1, 1) \in R_2$ に対して $(1, 1) \in R_2$，
$(1, 2) \in R_2$ に対して $(2, 1) \in R_2$，
$(2, 1) \in R_2$ に対して $(1, 2) \in R_2$，
：
$(3, 1) \in R_2$ に対して $(1, 3) \in R_2$
  - ゆえに，R_2 は対称的である．



27

反対称的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反対称的(antisymmetric)である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば，$x = y$



28

反対称的な関係(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反対称的である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば，$x = y$

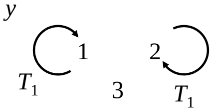
例：　$\mathbf{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

- $S_3 = \{ (x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x \leq y \}$
  - 任意の $x, y \in \mathbf{N}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば，$x = y$
  - ゆえに，S_3 は反対称的である．

29

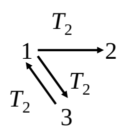
対称的な関係・反対称的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は対称的である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は反対称的である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば，$x = y$



例：　$A = \{ 1, 2, 3 \}$

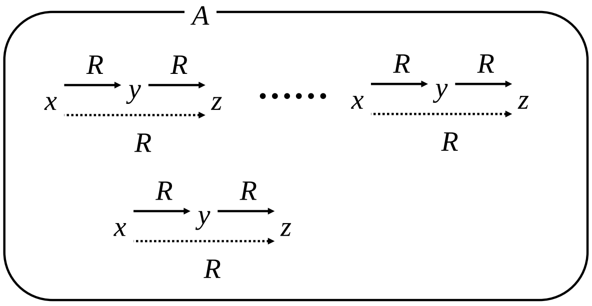
- $T_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$
  - T_1 は対称的かつ反対称的である．
- $T_2 = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$
  - T_2 は対称的でも反対称的でもない．
（$1 \neq 3$）



30

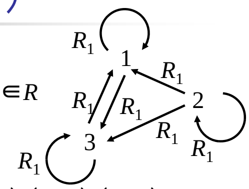
推移的な関係

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は推移的(transitive)である
  - 任意の $x, y, z \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば，$(x, z) \in R$



31

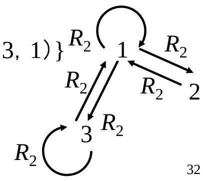
推移的な関係(続き)



- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は推移的である
  - 任意の $x, y, z \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば，$(x, z) \in R$

例：　$A = \{1, 2, 3\}$

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$
  - $(1, 1), (1, 1) \in R_1$ に対して $(1, 1) \in R_1$，
    $(2, 1), (1, 3) \in R_1$ に対して $(2, 3) \in R_1$，
    ：
    $(3, 1), (1, 3) \in R_1$ に対して $(3, 3) \in R_1$
  - ゆえに，R_1 は推移的である．
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$
  - $(2, 1), (1, 3) \in R_2$ に対して $(2, 3) \notin R_2$ だから，R_2 は推移的でない．



32

推移的な関係(続き2)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は推移的である
  - 任意の $x, y, z \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば，$(x, z) \in R$

例：　A：すべての人からなる集合

- $R = \{(x, y) \mid y$ は x の先祖である $\}$
  - R は推移的である．
- $S = \{(x, y) \mid y$ は x の親である $\}$
  - S は推移的でない．

33

関係の冪(べき)

関係 $R \subseteq A^2$ に対して，

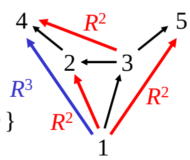
- $R^1 = R$
- $R^n = R \cdot R^{n-1}$　$(n \geq 2)$

例：　$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$

- $R^1 = R$
- $R^2 = R \cdot R = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4)\}$
- $R^3 = R \cdot R^2 = \{(1, 4)\}$
- $R^4 = R \cdot R^3 = \phi$

：



34

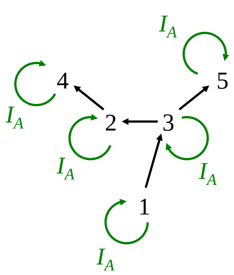
恒等関係

- A 上の恒等関係(identity relation)
  - $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$

例：　$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$

- $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$



35

推移閉包・反射推移閉包

関係 $R \subseteq A^2$ に対して，

- R の推移閉包(transitive closure)　R^+
  - $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$　$(= R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots)$
- R の反射推移閉包(reflexive transitive closure)　R^*
  - $R^* = I_A \cup R^+$

- $I_A = R^0$ とおくと，

(1)　$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

(2)　$R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$

36

推移閉包（続き）

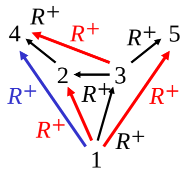
例1： $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R=\{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$

- $R^1 = R$
- $R^2 = R \cdot R = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4)\}$
- $R^3 = R \cdot R^2 = \{(1, 4)\}$
- $R^4 = R \cdot R^3 = \phi$

:

- $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots$
  $= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}$



37

推移閉包（続き）

例2： $R=\{(x, y) \mid y$ は x の先祖である $\}$

$S=\{(x, y) \mid y$ は x の親である $\}$

- R は S の推移閉包　（$R = S^+$）

- 関係 $R \subseteq A^2$ の推移閉包
  - $R^+=\{(x, y) \mid$ ある $x_0, \dots, x_n$ $(n \geq 1)$に対して，$x_0=x, x_n=y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i=0, 1, \dots, n-1)\}$
- 教科書では推移閉包を R^* で表している

$$\underset{(=x)}{x_0} \xrightarrow{R} x_1 \xrightarrow{R} x_2 \xrightarrow{R} \cdots \xrightarrow{R} x_{n-1} \xrightarrow{R} \underset{(=y)}{x_n}$$

$$\underbrace{(=x) \cdots\cdots\cdots (=y)}_{R^+}$$

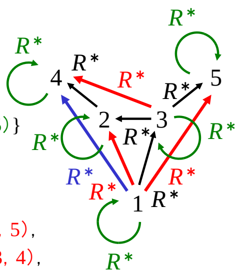
38

反射推移閉包（続き）

例1： $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R=\{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$

- $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots$
  $= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}$
- $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- $R^* = I_A \cup R^+$
  $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 5)\}$



39

反射推移閉包（続き）

例2： $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, \dots\}$, $R=\{(x, y) \mid y=x+1\}$ $(\subseteq \mathbf{N}^2)$

- $R^+ = < = \{(x, y) \mid x < y\}$
- $R^* = \leq = \{(x, y) \mid x \leq y\}$

- 関係 $R \subseteq A^2$ の反射推移閉包
  - $R^*=\{(x, y) \mid$ ある $x_0, \dots, x_n$ $(n \geq 0)$に対して，$x_0=x, x_n=y, (x_i, x_{i+1}) \in R$ $(i=0, 1, \dots, n-1)\}$
    - $x=y$ の場合でも，$(x, y) \in R^*$とする

$$\underset{(=x)}{x_0} \xrightarrow{R} x_1 \xrightarrow{R} x_2 \xrightarrow{R} \cdots \xrightarrow{R} x_{n-1} \xrightarrow{R} \underset{(=y)}{x_n}$$

$$\underbrace{(=x) \cdots\cdots\cdots (=y)}_{R^*}$$

R^*

40

定理

関係 $R \subseteq A^2$ に対して，次の(1)，(2)が成り立つ.

(1)　R^+は推移的である.

(2)　R^*は反射的かつ推移的である.

41

まとめ

- 今回の講義
  - 直積・関係
  - 2 項関係の性質

- 次回の講義
  - 同値関係（教科書　pp.19-23）
  - 半順序（教科書　pp.12-16）
- 今回の演習
  - 直積・関係

42