離散数学及び演習
講義11　2014. 7. 3（木）

環（続き）
（教科書　pp.161-164）
群
（教科書　pp.168-170）

教科書･･･野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

環（復習）

- 代数系（R, ＋, ･）は環である
  - 次の（1）～（7）が成り立つ.

（1）任意の $x, y, z \in R$ に対して，$x+(y+z) = (x+y)+z$
（加法の結合則（associative law））

（2）$c \in R$ が存在して，任意の $x \in R$ に対して，$x+c=c+x=x$
（加法の単位元の存在）

- c … 加法の単位元（unit element，identity element）（零元）

（3）任意の $x \in R$ に対して，$y \in R$ が存在して，$x+y=y+x=c$
（加法の逆元の存在）

- $y=-x$ … x の加法の逆元（inverse element）

（4）任意の $x, y \in R$ に対して，$x+y = y+x$
（加法の交換則（commutative law））

環（復習）（続き）

- 代数系（R, ＋, ･）は環である
  - 次の（1）～（7）が成り立つ.

（5）任意の $x, y, z \in R$ に対して，$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
（乗法の結合則（associative law））

（6）$e \in R$ が存在して，任意の $x \in R$ に対して，$x\cdot e=e\cdot x=x$
（乗法の単位元の存在）

- e … 乗法の単位元（unit element，identity element）

（7）任意の $x, y, z \in R$ に対して，
$x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$,
$(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$
（分配則（distributive law））

- 条件（1）～（7）… 環の公理（axiom）

可換環（復習）

- 代数系（R, ＋, ･）は可換環である
  - （R, ＋, ･）は環で，かつ，次の（8）が成り立つ.

（8）任意の $x, y \in R$ に対して，$x\cdot y = y\cdot x$
（乗法の交換則（commutative law））

体（field）

- 代数系（F, ＋, ･, c, e）は体（可換体）である
  - （F, ＋, ･, c, e）は環で，かつ，次の（8），（9）が成り立つ.

（8）任意の $x, y \in F$ に対して，$x\cdot y = y\cdot x$
（乗法の交換則（commutative law））

（9）任意の $x \in F$（$x \neq c$）に対して，$y \in F$ が存在して，
$x\cdot y = y\cdot x = e$
（乗法の逆元の存在）

- $y=x^{-1}$ … x の乗法の逆元（inverse element）
- x は可逆（invertible）である

- 代数系（F, ＋, ･, c, e）は斜体（skew field）である
  - （F, ＋, ･, c, e）は環で，かつ，上の（9）が成り立つ.

体（続き）

例：

- （$\mathbf{Q}$, ＋, ･, 0, 1）… 有理数体
- （$\mathbf{R}$, ＋, ･, 0, 1）… 実数体
- （$\mathbf{C}$, ＋, ･, 0, 1）… 複素数体
- （$\mathbf{Q}[i]$, ＋, ･, 0, 1）… Gauss の数体
  - $\mathbf{Q}[i]=\{\, x+yi \mid x, y \in \mathbf{Q} \,\}$
    - 明らかに，（$\mathbf{Q}[i]$, ＋, ･, 0, 1）は環である.
    - 明らかに，乗法の交換則が成り立つ.
    - 任意の $x+yi \in \mathbf{Q}[i]$（$x+yi \neq 0$）に対して，
      $$\frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i \in \mathbf{Q}[i]$$
      すなわち，乗法の逆元が存在する.

- 整数環（$\mathbf{Z}$, ＋, ･, 0, 1）は体でない
  - 任意の $n \in \mathbf{Z}$（$n \neq 0$）に対して，$1/n \in \mathbf{Z}$ であるとは限らない.

定理

p が素数であるとき，かつそのときに限り，
$(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は体である．

- $\mathbf{Z}_p$ (p は素数)
  … p 元体 (field with p elements) $\mathbf{F}_p$

- $p\in\mathbf{Z}$ に対して，$\mathbf{Z}_p=\{0, 1, \ldots, p-1\}$
  … $p\in\mathbf{Z}$ を法とする完全剰余系
  - $x+_p y=\mathrm{mod}(x+y, p)$
    $x\cdot_p y=\mathrm{mod}(x\cdot y, p)$
  - $(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p, 0, 1)$ は可換環．

- 任意の $x\in\mathbf{Z}_p$ ($x\neq 0$) に対して，
  $y=x^{-1}\in\mathbf{Z}_p$ が存在して，$x\cdot y = y\cdot x = 1$
  （乗法の逆元の存在）
  - $\mathbf{Z}_3=\{0, 1, 2\}$　　$1^{-1}=1$, $2^{-1}=2$
  - $\mathbf{Z}_5=\{0, 1, 2, 3, 4\}$　　$1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $3^{-1}=2$, $4^{-1}=4$
  - $\mathbf{Z}_4=\{0, 1, 2, 3\}$　　$1^{-1}=1$, 2^{-1}: 存在しない，$3^{-1}=3$

乗算表 ($p=3$)

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

乗算表 ($p=4$)

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

7

証明

p が素数であるとき，かつそのときに限り，
$(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は体である．

- a)「 p が素数ならば，$(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は体である」を示す．
- b)「 $(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ が体ならば，p は素数である」を示す．
- a) p は素数であると仮定して，乗法の逆元が存在することを示す．
  - 「任意の $k\in\mathbf{Z}_p$ ($k\neq 0$) に対して，$y\in\mathbf{Z}_p$ が存在して，$k\cdot_p y=1$」を示す．

a) p は素数であると仮定する．
　$(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は可換環である．
　また，任意の $k\in\mathbf{Z}_p$ ($k\neq 0$) に対して，$1\leq k<p$.
　ゆえに，$\gcd(k, p)=1$.
　このとき，合同方程式 $ky\equiv 1 \pmod p$ の解 $y\in\mathbf{Z}_p$ が存在する．
　すなわち，$y\in\mathbf{Z}_p$ が存在して，$k\cdot_p y=1$.
　乗法の逆元が存在するので，$(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は体である．

8

証明

p が素数であるとき，かつそのときに限り，
$(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は体である．

- b)「 $(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ が体ならば，p は素数である」を示す．
  - $(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ が体であるとき，p は素数でないと仮定して，矛盾を導く．

b) $(\mathbf{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ は体であると仮定する．
　さらに，p は素数でないと仮定する．
　このとき，p は合成数だから，
　$k, s\in\mathbf{Z}$ ($1<k, s<p$) が存在して，$p=k\cdot s$.
　$k\in\mathbf{Z}_p$ ($k\neq 0$) だから，k の逆元 $y\in\mathbf{Z}_p$ が存在して，$k\cdot_p y=1$.
　ゆえに，$q\in\mathbf{Z}$ が存在して，$ky-1=q\cdot p=q\cdot k\cdot s$ だから，
　$k(y-q\cdot s)=1$.
　$y-q\cdot s\in\mathbf{Z}$ だから，$1<k$ に矛盾する．

9

有限体 (finite field)

- 体 $(F, +, \cdot)$ は有限体 (Galois 体) である
  - F は有限集合である

  - $|F|$ … 有限体の位数 (order)
  - 位数 q の有限体 … $GF(q)$

例：　p 元体 $\mathbf{F}_p$ は位数 p の有限体

  - 符号理論，暗号理論への応用

E. Galois
(仏，1811-1832)

10

定理

体 $(F, +, \cdot)$ に対して，次の (1)〜(4) が成り立つ．
(1)　加法の単位元は唯一である．
(2)　加法の逆元は唯一である．
(3)　乗法の単位元は唯一である．
(4)　乗法の逆元は唯一である．

- 体は環でもあるから，(1)〜(3) が成り立つのは明らか．
- (4) は (2) と同様に示せる．

11

零因子 (zero divisor)

- 環 $(R, +, \cdot, c, e)$ において，$x\in R$ は零因子である
  - $y\in R$ ($y\neq c$) が存在して，$x\cdot y=y\cdot x=c$

例：
- 環 $(\mathbf{Z}_6, +_6, \cdot_6, 0, 1)$
  - $2\in\mathbf{Z}_6$ は零因子
    - $3\in\mathbf{Z}_6$ ($3\neq 0$) に対して，$2\cdot_6 3=3\cdot_6 2=0$
- 任意の環 $(R, +, \cdot, c, e)$
  - 零元 $c\in R$ は零因子
    - 任意の $y\in R$ ($y\neq c$) に対して，$c\cdot y=y\cdot c=c$

12

整域(integral domain)

- 代数系(R, ＋, ･, c, e) は整域である
  - (R, ＋, ･, c, e) は可換環で，かつ，次の(10)が成り立つ．

(10)　任意の x, $y \in R$ に対して，

$x \cdot y = c$ ならば，$x = c$ または $y = c$

(零元でない零因子の非存在)

(10')　任意の x, $y \in R$ に対して，

$x \cdot y = c$ かつ $x \neq c$ ならば，$y = c$

13

整域(続き)

例：

- 整数環($\mathbf{Z}$, ＋, ･, 0, 1)
  - 任意の x, $y \in \mathbf{Z}$ に対して，$x \cdot y = 0$ ならば，$x=0$ または $y=0$
- 多項式環($\mathbf{R}[x]$, ＋, ･, 0, 1)
- p 元体 ($\mathbf{F}_p$, $+_p$, $\cdot_p$, 0, 1) (p は素数)
  - 任意の x, $y \in \mathbf{F}_p$ に対して，$x \cdot_p y = 0$ ならば，$x=0$ または $y=0$
  - 任意の x, $y \in \mathbf{F}_p$ に対して，$x \cdot y \equiv 0 \pmod{p}$ ならば，$x \equiv 0 \pmod{p}$ または $y \equiv 0 \pmod{p}$．
  - 一般に，環($\mathbf{Z}_p$, $+_p$, $\cdot_p$, 0, 1)は整域でない
    - 零元でない零因子が存在する．

14

定理

可換環(R, ＋, ･, c, e) が整域であるとき，かつそのときに限り，次が成り立つ．

任意の x, y, $z \in R$ に対して，

$x \cdot z = y \cdot z$ かつ $z \neq c$ ならば，$x = y$.

$z \cdot x = z \cdot y$ かつ $z \neq c$ ならば，$x = y$.

(消去則)

15

証明

可換環(R, ＋, ･, c, e)が整域であるとき，かつそのときに限り，次が成り立つ．

任意の x, y, $z \in R$ に対して，$x \cdot z = y \cdot z$ かつ $z \neq c$ ならば，$x = y$.

- a)「R が整域であるとき，$x \cdot z = y \cdot z$ かつ $z \neq c$ ならば $x = y$ 」を示す．
- b)「$x \cdot z = y \cdot z$ かつ $z \neq c$ ならば $x = y$ であるとき，R は整域である」を示す．

---

a)　R は整域であると仮定する．
また，任意の x, y, $z \in R$ に対して，$x \cdot z = y \cdot z$ かつ $z \neq c$ と仮定する．
このとき，$x \cdot z + (-(y \cdot z)) = y \cdot z + (-(y \cdot z)) = c$.
分配則から，$(x + (-y)) \cdot z = c$.
R は整域で，$z \neq c$ だから，$x + (-y) = c$.
したがって，$x = -(-y) = y$.

b) 任意の x, y, $z \in R$ に対して，$x \cdot z = y \cdot z$ かつ $z \neq c$ ならば $x = y$ と仮定する．
ここで，$y = c$ とおくと，$x \cdot z = c \cdot z$ かつ $z \neq c$ ならば，$x = c$.
ゆえに，$x \cdot z = c$ かつ $z \neq c$ ならば，$x = c$.
すなわち，R は整域である．

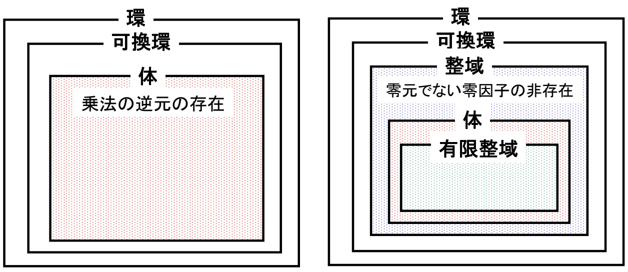
16

定理

次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　体は整域である．

(2)　有限な整域は体である．



17

証明

(1)　体は整域である．

- 零元でない零因子は存在しないことを示す．
- 「任意の x, $y \in F$ に対して，$x \cdot y = c$ かつ $x \neq c$ ならば，$y = c$」を示す．

(F, ＋, ･, c, e)を体とする．

任意の x, $y \in F$ に対して，$x \cdot y = c$ かつ $x \neq c$ とする．

このとき，F は体だから，$x^{-1} \in F$ が存在する．

ここで，$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot c = c$.

一方，$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = e \cdot y = y$.

したがって，$y = c$.

18

証明（続き）

（2）　有限な整域は体である．

- 乗法の逆元が存在することを示す．
  - 「任意の $x \in F$ $(x \neq c)$ に対して，$y \in F$ が存在して，$x \cdot y = y \cdot x = e$」を示す．

$(F, +, \cdot, c, e)$ を有限な整域とする．
まず，任意の $x \in F (x \neq c)$ を考える．
関数 $f : F \rightarrow F$ を任意の $u \in F$ に対して $f(u) = x \cdot u$ と定義する．
任意の $u_1, u_2 \in F$ に対して，$f(u_1) = f(u_2)$ とする．このとき，$x \cdot u_1 = x \cdot u_2$.
ゆえに，$x \cdot u_1 + (-(x \cdot u_1)) = x \cdot u_2 + (-(x \cdot u_1))$ だから，$c = x \cdot (u_2 + (-u_1))$.
$x \neq c$ で，F は整域だから，$u_2 + (-u_1) = c$.
ゆえに，$u_2 = u_1$ であり，f は単射である．
F は有限集合だから，f は全射でもある．
さらに，$F = \{u_1, \ldots, u_n\}$ とおくと，f は全単射だから，
$F = \{ f(u_1), \ldots, f(u_n) \} = \{ xu_1, \ldots, xu_n \}$.
$e \in F$ だから，$u_i \in F$ が存在して，$xu_i = e$.
すなわち，任意の $x \in F (x \neq c)$ に対して，乗法の逆元 u_i が存在する．

19

整域における整除関係

整域 $(R, +, \cdot)$ と $x, y \in R$ に対して，

- x は y の約元（factor）である
  y は x の倍元（multiple）である
  x は y を割り切る（divide）
  （y は x で割り切れる（divisible））
  … $x \mid y$
  - $q \in R$ が存在して，$y = q \cdot x$

20

公約元

整域 $(R, +, \cdot)$ と $x, y \in R$ に対して，

- $d \in R$ は x, y の公約元（common factor）である
  - $d \mid x$ かつ $d \mid y$.
- $d \in R$ は x, y の最大公約元（greatest common factor）である
  … $d = \gcd(x, y) = (x, y)$
  - d は x, y の公約元で，かつ，x, y の任意の公約元 d' に対して，$d' \mid d$ （d' は d の約元）．

21

定理

整域 $(R, +, \cdot)$ と任意の $a, b \in R$ に対して，
$x, y \in R$ が存在して，$a \cdot x + b \cdot y = \gcd(a, b)$.

22

素元（prime element）

整域 $(R, +, \cdot, c, e)$ に対して，

- $p \in R$ は素元である
  - p は次の（1）～（3）を満たす．
  （1）　p は可逆元でない（$p^{-1} \in R$ は存在しない）．
  （2）　$p \neq c$
  （3）　$x \cdot y \in R$ に対して，$p \mid x \cdot y$ ならば，$p \mid x$ または $p \mid y$.

例：

- 整域 $(\mathbf{Z}, +, \cdot, 0, 1)$
  - 正の素元は素数．
- 整域 $(\mathbf{R}[x], +, \cdot, 0, 1)$
  - 素元は既約多項式．

23

素元分解整域

- 代数系 $(R, +, \cdot, c, e)$ は素元分解整域（prime factorization domain）である
  - $(R, +, \cdot, c, e)$ は整域で，かつ，
    任意の $x \in R$ $(x \neq c)$ は，可逆元でなければ，
    有限個の素元 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ に対して，
    $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ の形（素元の積の形）で表すことができる．
    - $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ の形　…　素元分解（prime factorization）

24

定理

- 素元分解整域における素元分解の表現は，一意的である．
  - 素元分解整域　…　一意分解整域
    （unique factorization domain，UFD）
- 素元分解整域において，最大公約元は必ず存在する．

25

Euclid 域（Euclidean domain）

- 代数系（R，＋，・，c，e）は Euclid 域である
  - （R，＋，・，c，e）は整域で，かつ，
    関数 $v : R \to \mathbf{N} - \{0\}$ が存在して，次の（1），（2）が成り立つ．

（1）　任意の x，$y \in R$（x，$y \neq c$）に対して，$v(x \cdot y) \geq v(x)$．
（2）　任意の x，$y \in R$（$y \neq c$）に対して，q，$r \in R$ が存在して，
次の a），b）が成り立つ．
a）　$x = q \cdot y + r$
b）　$r = c$ または　$v(r) < v(y)$

- 関数 v　…　R 上の付値（valuation）

例：
- （$\mathbf{Z}$，＋，・，0，1）　…　$v(x) = |x|$
- （$\mathbf{R}[x]$，＋，・，0，1）　…　$v(P(x)) = \deg(P(x))$
- （$\mathbf{Z}[i]$，＋，・，0，1）　…　$v(x + yi) = x^2 + y^2$

26

定理

- Euclid 域は素元分解整域である．
- Euclid 域（R，＋，・，c，e）と任意の x，y，r，$s \in R$に対して，$x = q \cdot y + r$ ならば，$\gcd(x, y) = \gcd(y, r)$．
  - Euclid の互除法により，最大公約元を求められる．

27

半群，モノイド

- 代数系（G，・）は半群（semigroup）である
  - 次の（1）が成り立つ．

（1）　任意の x，y，$z \in G$ に対して，$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
（結合則（associative law））

- 代数系（G，・）はモノイド（monoid）（単位半群，unitary semigroup）である
  - （G，・）は半群で，かつ，次の（2）が成り立つ．

（2）　$e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して，$x \cdot e = e \cdot x = x$
（単位元の存在）

  - e　…　単位元（unit element，identity element）

28

群（group）

- 代数系（G，・）は群である
  - （G，・）はモノイドで，かつ，次の（3）が成り立つ．

（3）　任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$x \cdot y = y \cdot x = e$
（逆元の存在）

  - $y = x^{-1}$　…　逆元（inverse element）

29

群（続き）

- 代数系 G は群である
  - G 上に 1 つの演算が定義されている．
    （演算は G 上で閉じている）
  - 次の（1）～（3）（群の公理）が成り立つ．

（1）　結合則
（2）　単位元の存在
（3）　逆元の存在

30

群（続き2）

例:

- モノイド
  - （**Z**, ＋, 0）
  - （**R**, ＋, 0）
  - （**Z**, ・, 1）
  - （**R**, ・, 1）
- 群
  - （**Z**, ＋, 0）
  - （**R**, ＋, 0）
  - （**R**－{0}, ・, 1）

31

可換群（commutative group）

- 代数系 （G, ・） は可換群（Abel 群（Abelian group））である
  - （G, ・） は群で，かつ，次の（4）が成り立つ．

（4）　任意の x, $y \in R$ に対して，$x \cdot y = y \cdot x$

（交換則（commutative law））

N. H. Abel
（ノルウェー，1802-1829）

32

乗法群，加法群

- 群（G, ・, e）　　… 乗法群（multicative group）
  - 単位元 e
  - $x \in G$ の逆元 x^{-1}
- 可換群（G, ＋, c）　… 加法群（additive group）
  - 単位元 c （零元）
  - $x \in G$ の逆元 $-x$

33

群と環

- 環（R, ＋, ・）の公理

（1）　加法の結合則
（2）　加法の単位元の存在
（3）　加法の逆元の存在
（4）　加法の交換則
（5）　乗法の結合則
（6）　乗法の単位元の存在
（7）　分配則

（1）～（4）：（R, ＋）は加法群
（5）～（6）：（R, ・）はモノイド

34

群と体

- 体（F, ＋, ・）の公理

（1）　加法の結合則
（2）　加法の単位元の存在
（3）　加法の逆元の存在
（4）　加法の交換則
（5）　乗法の結合則
（6）　乗法の単位元の存在
（9）　乗法の逆元の存在
（8）　乗法の交換則
（7）　分配則

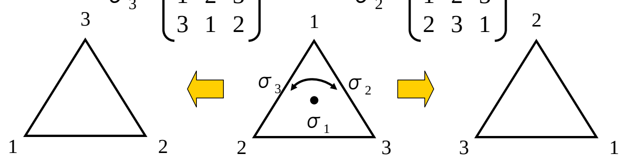
（1）～（4）：（F, ＋）は加法群
（5）～（8）：（$F-\{c\}$, ・）は可換乗法群

35

置換群（permutation group）

- 正三角形の回転における頂点の対応

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

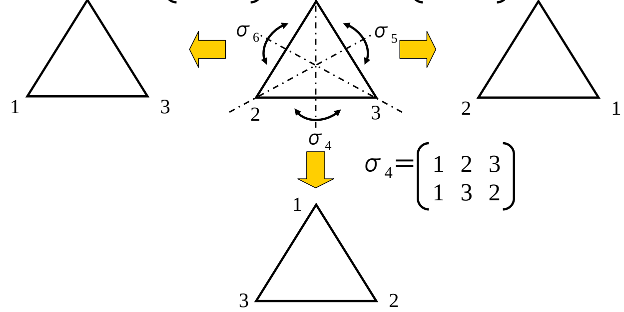
- σ_i … 頂点集合 {1, 2, 3} 上の置換

36

置換群（続き）

- 正三角形の反転における頂点の対応

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

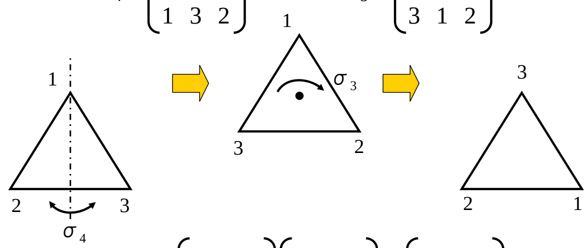


$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

置換群（続き2）

- 正三角形の回転・反転の合成における頂点の対応

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

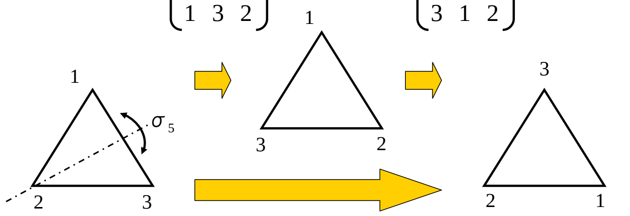


$$\sigma_3 \cdot \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

置換群（続き3）

- 正三角形の回転・反転の合成における頂点の対応

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\sigma_3 \cdot \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_5$$

置換群（続き4）

- $S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \middle| \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \right\}$

  $= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$
  - 集合 {1, 2, 3} 上のすべての置換からなる集合
- （$S(3)$，・）は群である　…　置換群
  - 演算・は $S(3)$ 上で閉じている
  - 演算・の結合則は成り立つ
  - 単位元 σ_1
  - 逆元

    $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$，$\sigma_2^{-1} = \sigma_3$，

    $\sigma_3^{-1} = \sigma_2$，$\sigma_4^{-1} = \sigma_4$，

    $\sigma_5^{-1} = \sigma_5$，$\sigma_6^{-1} = \sigma_6$
  - 演算・は非可換

    $\sigma_3 \cdot \sigma_4 = \sigma_5$

    $\sigma_4 \cdot \sigma_3 = \sigma_6$

    $\sigma_3 \cdot \sigma_4 \neq \sigma_4 \cdot \sigma_3$

乗積表（群表）

・	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	σ_6	σ_4	σ_5
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	σ_5	σ_6	σ_4
σ_4	σ_4	σ_5	σ_6	σ_1	σ_2	σ_3
σ_5	σ_5	σ_6	σ_4	σ_3	σ_1	σ_2
σ_6	σ_6	σ_4	σ_5	σ_2	σ_3	σ_1

定理

次の（1）～（3）が成り立つ．

（1）　モノイドの単位元は唯一である．

（2）　群の単位元は唯一である．

（3）　群の逆元は唯一である．

- 環の単位元，逆元の唯一性と同様に示せる．

定理

代数系（G，・）が次の（1）～（3）を満たすとき，かつそのときに限り，（G，・）は群である．

（1）　任意の $x, y, z \in G$ に対して，$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

（結合則（associative law））

（2）　$e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して，$x \cdot e = x$

（右単位元の存在）

- e　…　右単位元（right unit element，right identity element）

（3）　任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$x \cdot y = e$

（右逆元の存在）

- y　…　右逆元（right inverse element）

証明

代数系$(G, \cdot)$が次の(1)～(3)を満たすとき，かつそのときに限り，$(G, \cdot)$は群である．
(1)　任意の $x, y, z \in G$ に対して，$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ （結合則）
(2)　$e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して，$x \cdot e = x$ （右単位元の存在）
(3)　任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$x \cdot y = e$ （右逆元の存在）

- a)「$(G, \cdot)$が(1)～(3)を満たすならば，$(G, \cdot)$は群である」を示す．
- b)「$(G, \cdot)$は群ならば，$(G, \cdot)$は(1)～(3)を満たす」を示す．
  - 明らか．
- a)「$(G, \cdot)$に対して．群の公理が成り立つ」を示す．
  - a-1)「結合則が成り立つ」を示す．
  - a-2)「逆元が存在する」を示す．
  - a-3)「単位元が存在する」を示す．

---

a)　代数系$(G, \cdot)$が(1)～(3)を満たすと仮定する．
a-1) 明らかに，結合則は成り立つ．

証明（続き）

a)「代数系$(G, \cdot)$が(1)～(3)を満たすならば，$(G, \cdot)$は群である」を示す．
- a-2)「逆元が存在する」を示す．
- a-2)「左逆元が存在する」を示す．

---

a)　代数系$(G, \cdot)$が(1)～(3)を満たすと仮定する．
a-2) 右逆元の存在から，任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$x \cdot y = e$.
さらに，この y に対して，$z \in G$ が存在して，$y \cdot z = e$.
このとき，

$$
\begin{aligned}
y \cdot x &= y \cdot (x \cdot e) && \text{（右単位元）} \\
&= (y \cdot x) \cdot e && \text{（結合則）} \\
&= (y \cdot x) \cdot (y \cdot z) && \\
&= ((y \cdot x) \cdot y) \cdot z && \text{（結合則）} \\
&= (y \cdot (x \cdot y)) \cdot z && \text{（結合則）} \\
&= (y \cdot e) \cdot z && \\
&= y \cdot z && \text{（右単位元）} \\
&= e &&
\end{aligned}
$$

ゆえに，$x \cdot y = y \cdot x = e$ だから，y は x の逆元である．

証明（続き）

1)「代数系$(G, \cdot)$が(1)～(3)を満たすならば，$(G, \cdot)$は群である」を示す．
- a-3)「単位元が存在する」を示す．
- a-3)「左単位元が存在する」を示す．

---

a)　代数系$(G, \cdot)$が(1)～(3)を満たすと仮定する．
a-3) 逆元の存在から，任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$x \cdot y = y \cdot x = e$.
このとき，

$$
\begin{aligned}
e \cdot x &= (x \cdot y) \cdot x && \\
&= x \cdot (y \cdot x) && \text{（結合則）} \\
&= x \cdot e && \\
&= x && \text{（右単位元）}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$x \cdot e = e \cdot x = x$ だから，e は単位元である．

系

代数系$(G, \cdot)$が次の(1)～(3)を満たすとき，かつそのときに限り，$(G, \cdot)$は群である．
(1)　任意の $x, y, z \in G$ に対して，$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
（結合則(associative law)）

(2)　$e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して，$e \cdot x = x$
（左単位元の存在）
- e … 左単位元(left unit element, left identity element)

(3)　任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$y \cdot x = e$
（左逆元の存在）
- y … 左逆元(left inverse element)

まとめ

- 今日の講義
  - 環（続き）
  - 群
- 次回の講義
  - (1限)部分系，準同型（教科書　pp.164-165, 170-173）
  - (2限)商系（教科書　pp.165-168）
- 次回の演習
  - なし
- 今日の演習
  - 環（続き），群