離散数学及び演習
講義12　2014. 7.10(木)1限

部分系，準同型
（教科書　pp.164-165，170-173）

教科書･･･野崎昭弘:離散系の数学、近代科学社

群(復習)

- 代数系 $(G, \cdot)$ は群(group)である
  - 次の(1)～(3)が成り立つ.

(1) 任意の $x, y, z \in G$ に対して，$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
（結合則(associative law)）

(2) $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して，$x \cdot e = e \cdot x = x$
（単位元の存在）

  - e … 単位元(unit element，identity element)

(3) 任意の $x \in G$ に対して，$y \in G$ が存在して，$x \cdot y = y \cdot x = e$
（逆元の存在）

  - $y = x^{-1}$ … x の逆元(inverse element)

- 条件(1)～(3) … 群の公理(axiom)

代数系の間の関係

- 代数系
  - 組$(X, f_1, \ldots, f_n)$
    - X は集合
    - $f_i : X^2 \to X$

- 代数系$(X, f_1, \ldots, f_n)$，$(Y, g_1, \ldots, g_n)$の間の関係
  - 部分系
  - 準同型，同型
  - 商系　　（次回講義）

部分系(subsystem)

- 代数系$(X, f_1, \ldots, f_n)$は代数系$(Y, g_1, \ldots, g_n)$の部分系である
  - 次の(1)，(2)が成り立つ.

(1) $X \subseteq Y$

(2) $(X, f_1, \ldots, f_n)$と$(Y, g_1, \ldots, g_n)$は同じ公理を満たす.

- 代数系$(H, \cdot)$は群$(G, \cdot)$の部分群(subgroup) である
  - $H \subseteq G$，かつ，$(H, \cdot)$は群である.
- 代数系$(S, +, \cdot)$は環$(R, +, \cdot)$の部分環(subring)である
  - $S \subseteq R$，かつ，$(S, +, \cdot)$は環である.
- 代数系$(K, +, \cdot)$は体$(F, +, \cdot)$の部分体(subfiled)である
  - $K \subseteq F$，かつ，$(K, +, \cdot)$は体である.

部分系(続き)

例:
- 整数環 **Z** は実数環 **R** の部分環
- 実数体 **R** は複素数体 **C** の部分体

- 自明な部分系
  - 群$(G, \cdot, e)$に対して，
    群$(G, \cdot, e)$，群$(\{e\}, \cdot, e)$は部分群である … 自明な部分群
  - 環$(R, +, \cdot, c, e)$に対して，
    環$(R, +, \cdot, c, e)$，環$(\{c\}, +, \cdot, c, c)$は部分環である
    … 自明な部分環

定理

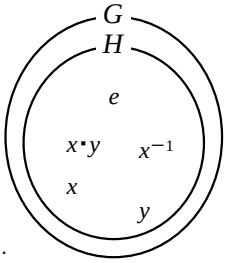
$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，次の(1)～(4)が成り立つ.

(1) $H \subseteq G$.

(2) $e \in H$.

(3) 任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.

(4) 任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.



- (2) G の単位元 は H の単位元でもある.
- (3) G における逆元は H における逆元でもある.

証明

$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(4)が成り立つ．
(1)　$H \subseteq G$.　　(2)　$e \in H$.　　(3)　任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.
(4)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.

- a)「$(H, \cdot)$が$(G, \cdot)$の部分群ならば，(1)～(4)が成り立つ」を示す．
- b)「(1)～(4)が成り立つならば，$(H, \cdot)$は$(G, \cdot)$の部分群」を示す．

---

a)　$(H, \cdot)$は$(G, \cdot)$の部分群であるとする．
(1)　部分群の定義から明らかに，$H \subseteq G$.
(2)　H は群だから，単位元 $e' \in H$ が存在する．
　　このとき，任意の $x \in H$ に対して，$x \cdot e' = e' \cdot x = x$.
　　ところが，$x, e' \in H \subseteq G$ だから，e' は G の単位元でもある．
　　群の単位元は唯一だから，$e = e' \in H$.
(3)　H は群だから，明らかに，任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.
(4)　H は群だから，明らかに，任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.

証明(続き)

$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(4)が成り立つ．
(1)　$H \subseteq G$.　　(2)　$e \in H$.　　(3)　任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.
(4)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.

- b)「(1)～(4)が成り立つならば，$(H, \cdot)$は$(G, \cdot)$の部分群」を示す．
  - b-1) $H \subseteq G$ を示す．
  - b-2)「H は演算・に関して閉じている」を示す．
  - b-3)「$(H, \cdot)$は群の公理を満たす」を示す．

---

b)　(1)～(4)が成り立つと仮定する．
b-1)　(1)から，$H \subseteq G$.
b-2)　(4)から，H は演算・について閉じている．

証明(続き2)

$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(4)が成り立つ．
(1)　$H \subseteq G$.　　(2)　$e \in H$.　　(3)　任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.
(4)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.

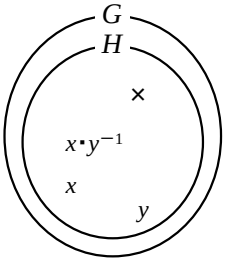
- b)「(1)～(4)が成り立つならば，$(H, \cdot)$は$(G, \cdot)$の部分群」を示す．
  - b-3)「$(H, \cdot)$は群の公理を満たす」を示す．
    - 1)結合則，　2)単位元の存在，　3)逆元の存在

---

b)　(1)～(4)が成り立つと仮定する．
b-3-1)　任意の $x, y, z \in H$ に対して，$x, y, z \in G$ で，G は群だから，
　　$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
b-3-2)　任意の $x \in H$ に対して，$x \in G$ で，G は群だから，$x \cdot e = e \cdot x = x$.
　　ところが，(2)から，$e \in H$. ゆえに，H の単位元が存在する．
b-3-3)　任意の $x \in H$ に対して，$x \in G$.
　　G は群だから，$x^{-1} \in G$ が存在して，$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
　　ところが，(3)から，$x^{-1} \in H$. ゆえに，H に x の逆元が存在する．
以上から，$(H, \cdot)$は$(G, \cdot)$の部分群である．

系

$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(3)が成り立つ．
(1)　$H \subseteq G$.
(2)　$H \neq \phi$.
(3)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y^{-1} \in H$.



証明

$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(3)が成り立つ．
(1)　$H \subseteq G$.　(2)　$H \neq \phi$.　(3)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y^{-1} \in H$.

- 前の定理により，「次の i)～iv) が成り立つとき，
  かつそのときに限り，(1)～(3)が成り立つ」を示す．
  i)　$H \subseteq G$.　　ii)　$e \in H$.　　iii)　任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.
  iv)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.
- a)「i)～iv) が成り立つならば，(1)～(3)が成り立つ」を示す．
- b)「(1)～(3) が成り立つならば，i)～iv)が成り立つ」を示す．

---

a)　i)～iv)が成り立つとする．
(1)　i)から明らか．
(2)　ii)から明らか．
(3)　iii)から，任意の $y \in H$ に対して，$y^{-1} \in H$.
　　ゆえに，iv)から，任意の $x \in H$ とこの $y^{-1} \in H$ に対して，$x \cdot y^{-1} \in H$.

証明(続き)

$(H, \cdot)$が群$(G, \cdot, e)$の部分群であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(3)が成り立つ．
(1)　$H \subseteq G$.　(2)　$H \neq \phi$.　(3)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y^{-1} \in H$.

- 前の定理により，「次の i)～iv) が成り立つとき，
  かつそのときに限り，(1)～(3)が成り立つ」を示す．
  i)　$H \subseteq G$.　　ii)　$e \in H$.　　iii)　任意の $x \in H$ に対して，$x^{-1} \in H$.
  iv)　任意の $x, y \in H$ に対して，$x \cdot y \in H$.
- b)「(1)～(3) が成り立つならば，i)～iv)が成り立つ」を示す．

---

b)　(1)～(3)が成り立つとする．
i)　(1)から明らか．
ii)　(2)から，ある $a \in H$ が存在する．このとき，(3)から，$a \cdot a^{-1} = e \in H$.
iii)　$e \in H$ と任意の $x \in H$ に対して，(3)から，$e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$.
iv)　iii)から，任意の $y \in H$ に対して，$y^{-1} \in H$.
　　ゆえに，任意の $x \in H$ と $y^{-1} \in H$ に対して，(3)から，
　　$x \cdot (y^{-1})^{-1} = x \cdot y \in H$.

定理

次の(1)，(2)が成り立つならば，$(H, \cdot)$は群$(G, \cdot)$の部分群である．

(1)　HはGの空でない有限部分集合である．

(2)　任意の$x, y \in H$に対して，$x \cdot y \in H$.

13

証明

次の(1)，(2)が成り立つならば，$(H, \cdot)$は群$(G, \cdot)$の部分群である．

(1)　HはGの空でない有限部分集合である．

(2)　任意の$x, y \in H$に対して，$x \cdot y \in H$.

- 前の定理により，次のi)～iv)が成り立つことを示す．
  - i)　$H \subseteq G$.　　ii)　$e \in H$.　　iii)　任意の$x \in H$に対して，$x^{-1} \in H$.
  - iv)　任意の$x, y \in H$に対して，$x \cdot y \in H$.

---

(1)，(2)が成り立つとする．

i)　(1)から明らか．

ii)，iii)　任意の$x \in H$に対して，$x \cdot x = x^2 \in H$, $x \cdot x^2 = x^3 \in H$, $x \cdot x^3 = x^4 \in H$, ….
Hは有限だから，すべての$x^i \in H$ $(i > 0)$が異なることはない．
すなわち，ある$m, n \in \mathbf{N}$ $(m > n)$が存在して，$x^m = x^n$.
ゆえに，$e = x^n \cdot x^{-n} = x^m \cdot x^{-n} = x^{m-n} \in H$.
さらに，$e = x \cdot x^{m-n-1}$だから，$x^{-1} = x^{m-n-1} \in H$.

iv)　(2)から明らか．

14

定理

$(S, +, \cdot)$が環$(R, +, \cdot, c, e)$の部分環であるとき，
かつそのときに限り，次の(1)～(5)が成り立つ．

(1)　$S \subseteq R$.

(2)　$c \in S$.

(3)　$e \in S$.

(4)　任意の$x, y \in S$に対して，$x + (-y) \in S$.

(5)　任意の$x, y \in S$に対して，$x \cdot y \in S$.

- $(R, +)$は群(加法群)である．
  - (2)，(3)から，$S \neq \phi$.
  - (1)，(2)，(4)　iff　$(S, +)$は$(R, +)$の部分群　(定理)

15

証明

代数系$(S, +, \cdot)$が環$(R, +, \cdot, c, e)$の部分環であるとき，
かつそのときに限り，次の(1)～(5)が成り立つ．

(1)　$S \subseteq R$.　　(2)　$c \in S$.　　(3)　$e \in S$.

(4)　任意の$x, y \in S$に対して，$x + (-y) \in S$.

(5)　任意の$x, y \in S$に対して，$x \cdot y \in S$.

- a)　「$(S, +, \cdot)$が$(R, +, \cdot)$の部分環ならば，(1)～(5)」を示す．
- b)　「(1)～(5)ならば，$(S, +, \cdot)$は$(R, +, \cdot)$の部分環」を示す．

---

a)　$(S, +, \cdot)$は$(R, +, \cdot)$の部分環であるとする．
(1)，(2)，(4)　このとき，$(S, +)$は$(R, +)$の部分群である．
ゆえに，前の定理の系から，(1)，(2)，(4)が成り立つ．
(3)　Sは環だから，乗法の単位元$e' \in S$が存在する．
このとき，任意の$x \in S$に対して，$x \cdot e' = e' \cdot x = x$.
ところが，$x, e' \in S \subseteq R$だから，e'はRにおける乗法の単位元でもある．
環における乗法の単位元は唯一だから，$e = e' \in S$.
(5)　$(S, +, \cdot)$は環だから，明らかに，(5)が成り立つ．

16

証明(続き)

$(S, +, \cdot)$が環$(R, +, \cdot, c, e)$の部分環であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(5)が成り立つ．

(1)　$S \subseteq R$.　　(2)　$c \in S$.　　(3)　$e \in S$.

(4)　任意の$x, y \in S$に対して，$x + (-y) \in S$.

(5)　任意の$x, y \in S$に対して，$x \cdot y \in S$.

- b)　「(1)～(5)ならば，$(S, +, \cdot)$は$(R, +, \cdot)$の部分環」を示す．
  - b-1)　$S \subseteq R$を示す．
  - b-2)「Sは乗法に関して閉じている」を示す．
  - b-3)「Sは加法に関して閉じている」と
    「$(S, +, \cdot)$は環の公理を満たす」を示す．

---

b)　(1)～(5)が成り立つと仮定する．

b-1)　(1)から，$S \subseteq R$.

b-2)　(5)から，Sは乗法に関して閉じている．

17

証明(続き2)

$(S, +, \cdot)$が環$(R, +, \cdot, c, e)$の部分環であるとき，かつそのときに限り，
次の(1)～(5)が成り立つ．

(1)　$S \subseteq R$.　　(2)　$c \in S$.　　(3)　$e \in S$.

(4)　任意の$x, y \in S$に対して，$x + (-y) \in S$.

(5)　任意の$x, y \in S$に対して，$x \cdot y \in S$.

- b)　「(1)～(5)ならば，$(S, +, \cdot)$は$(R, +, \cdot)$の部分環」を示す．
  - b-3)「Sは加法に関して閉じている」と
    「$(S, +, \cdot)$は環の公理を満たす」を示す．

---

b)　(1)～(5)が成り立つと仮定する．

b-3-1)　(1)，(2)，(4)から，$(S, +)$は$(R, +)$の部分群である．

b-3-2)　(3)から，$e \in S \subseteq R$.
任意の$x \in S$に対して，$x \in R$.
eはRにおける乗法の単位元だから，$x \cdot e = e \cdot x = x$.
ゆえに，eはSにおける乗法の単位元でもある．

b-3-3)　任意の$x, y, z \in S$に対して，$x, y, z \in R$だから，加法の交換則，
乗法の結合則，分配則が成り立つ．

18

定理

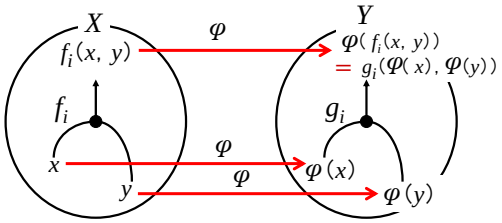
$(K, +, \cdot)$が体$(F, +, \cdot, c, e)$の部分体であるとき，
かつそのときに限り，次の(1)～(4)が成り立つ．

(1)　$K \subseteq F$.
(2)　$K \neq \phi$.
(3)　任意の $x, y \in K$ に対して，$x+(-y) \in K$.
(4)　任意の $x, y \in K-\{c\}$ に対して，$x \cdot y^{-1} \in K-\{c\}$.

- (1)，(2)，(3)　iff　$(K, +)$は$(F, +)$の部分群
- (1)，(2)，(4)　iff　$(K-\{c\}, \cdot)$は$(F-\{c\}, \cdot)$の部分群

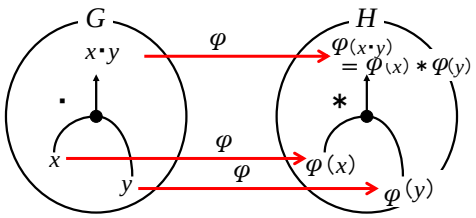
準同型(homomorphic)

- 代数系$(Y, g_1, \ldots, g_n)$は代数系$(X, f_1, \ldots, f_n)$に準同型である
  - 関数 φ: $X \to Y$ が存在して，次の性質が成り立つ．
    任意の $x, y \in X$ と任意の i $(1 \leq i \leq n)$に対して，
    $$\varphi(f_i(x, y)) = g_i(\varphi(x), \varphi(y))$$
  - 関数 φ　…　X から Y への準同型(写像)(homomorphism)



群準同型

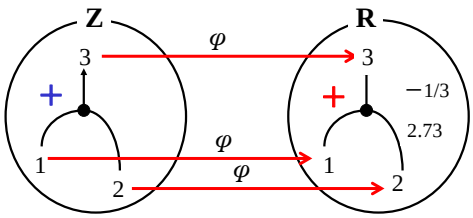
- 群$(H, *)$は群$(G, \cdot)$に(群)準同型である
  - 関数φ：$G \to H$ が存在して，次の性質が成り立つ．
    任意の $x, y \in G$ に対して，
    $$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$
  - 関数 φ　…　G から H への(群)準同型写像



群準同型(続き)

例：　群$(\mathbf{R}, +)$は群$(\mathbf{Z}, +)$に準同型である

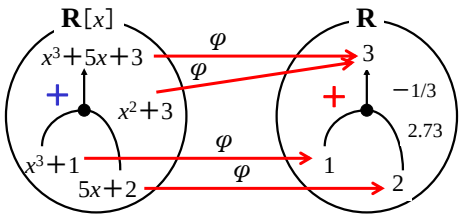
- 準同型写像 φ: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$
  任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して，$\varphi(n) = n$.
- 任意の $x, y \in \mathbf{Z}$ に対して，
  $\varphi(x+y) = x+y = \varphi(x)+\varphi(y)$



群準同型(続き2)

例：群$(\mathbf{R}, +)$は群$(\mathbf{R}[x], +)$に準同型である

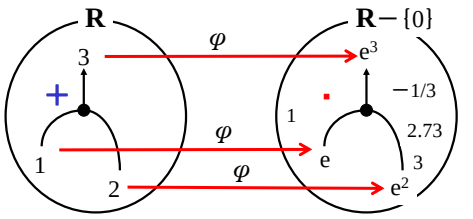
- 準同型写像 φ: $\mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$
  任意の $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$ に対して，
  $\varphi(P(x)) = a_0$.
- 任意の $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して，
  $\varphi(P(x) + Q(x)) = a_0 + b_0 = \varphi(P(x)) + \varphi(Q(x))$



群準同型(続き3)

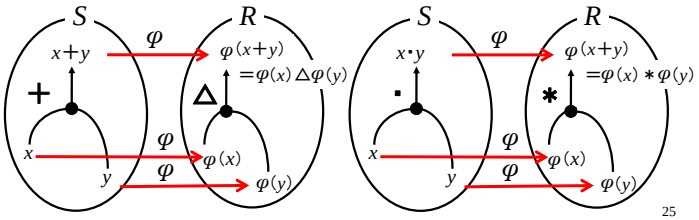
例：　乗法群$(\mathbf{R}-\{0\}, \cdot)$は加法群$(\mathbf{R}, +)$に準同型である

- 準同型写像 φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}-\{0\}$
  任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$\varphi(x) = \exp(x)$
- 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して，
  $\varphi(x+y) = \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$



環準同型

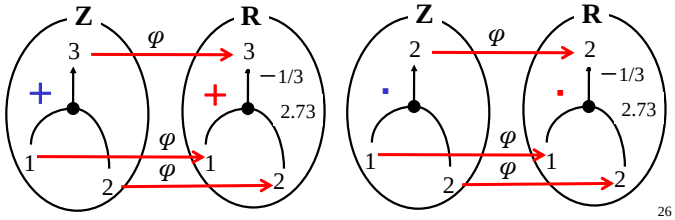
- 環$(R, \triangle, *)$は環$(S, +, \cdot)$に(環)準同型である
  - 関数$\varphi: S \to R$が存在して，次の性質が成り立つ．
    任意の$x, y \in S$に対して，
    $\varphi(x+y) = \varphi(x) \triangle \varphi(y)$
    $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$
  - 関数φ … SからRへの(環)準同型写像



環準同型(続き)

例：　実数環$(\mathbf{R}, +, \cdot)$は整数環$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$に準同型である

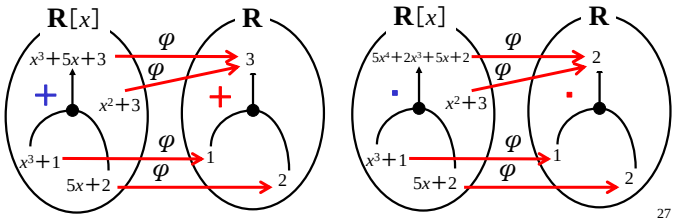
- 準同型写像$\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$
  任意の$n \in \mathbf{Z}$に対して，$\varphi(n) = n$.
- 任意の$x, y \in \mathbf{Z}$に対して，
  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
  $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$



環準同型(続き2)

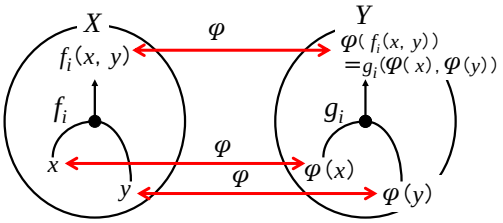
例：　実数環$(\mathbf{R}, +, \cdot)$は多項式環$(\mathbf{R}[x], +, \cdot)$に準同型である

- 準同型写像$\varphi: \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$
  任意の$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbf{R}[x]$に対して，$\varphi(P(x)) = a_0$.
- 任意の$P(x)$, $Q(x) \in \mathbf{R}[x]$に対して，
  $\varphi(P(x) + Q(x)) = \varphi(P(x)) + \varphi(Q(x))$,
  $\varphi(P(x) \cdot Q(x)) = \varphi(P(x)) \cdot \varphi(Q(x))$



同型(isomorphic)

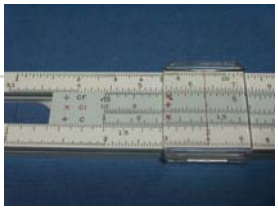
- 代数系$(X, f_1, \ldots, f_n)$と代数系$(Y, g_1, \ldots, g_n)$は同型である
  … $(X, f_1, \ldots, f_n) \simeq (Y, g_1, \ldots, g_n)$
  - 準同型$\varphi: X \to Y$が存在して，φは全単射である
  - 関数φ … XからYへの同型(写像)(isomorphism)
- φによって対応する要素を同一視すれば，XとYは「同じもの」



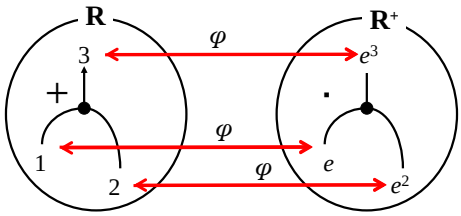
同型(続き)

例：　$\mathbf{R}^+ = \{ x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \}$

- 乗法群$(\mathbf{R}^+, \cdot)$と加法群$(\mathbf{R}, +)$は同型
  - 準同型写像$\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$
    任意の$x \in \mathbf{R}$に対して，$\varphi(x) = \exp(x)$
  - φは全単射
    - 任意の$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ $(x_1 \neq x_2)$に対して，$\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$,
    - 任意の$y \in \mathbf{R}^+$に対して，$x = \log(y)$とおくと，$y = \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$



計算尺



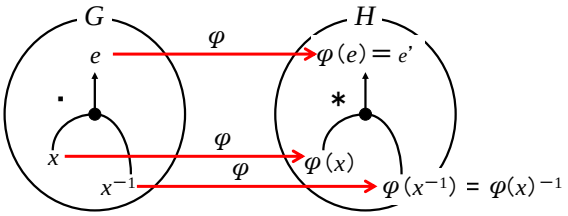
定理

群$(G, \cdot, e)$, $(H, *, e')$と準同型$\varphi: G \to H$に対して，
次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　$\varphi(e) = e'$

(2)　任意の$x \in G$に対して，$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

- 群準同型写像は単位元と逆元を保存する．



証明

群$(G, \cdot, e)$, $(H, *, e')$ と準同型$\varphi : G \to H$ に対して,
(1)　$\varphi(e) = e'$

φは準同型だから, 任意の $x, y \in G$ に対して,
$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.
ここで, $x = y = e$ とおくと, $\varphi(e \cdot e) = \varphi(e) * \varphi(e)$.
ゆえに, $\varphi(e) = \varphi(e) * \varphi(e)$ だから,
$\varphi(e) * \varphi(e)^{-1} = (\varphi(e) * \varphi(e)) * \varphi(e)^{-1}$
$= \varphi(e) * (\varphi(e) * \varphi(e)^{-1})$　（結合則）
$= \varphi(e) * e'$　（逆元）
$= \varphi(e)$　（単位元）
一方, $\varphi(e) * \varphi(e)^{-1} = e'$ だから, $\varphi(e) = e'$.

証明（続き）

群$(G, \cdot, e)$, $(H, *, e')$ と準同型$\varphi : G \to H$ に対して,
(2)　任意の $x \in G$ に対して, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

φは準同型だから, 任意の $x, y \in G$ に対して,
$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.
ここで, $y = x^{-1}$ とおくと, $\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1})$.
ゆえに, $\varphi(e) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1})$ だから,
$\varphi(x)^{-1} * \varphi(e) = \varphi(x)^{-1} * (\varphi(x) * \varphi(x^{-1}))$
$= (\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)) * \varphi(x^{-1})$　（結合則）
$= e' * \varphi(x^{-1})$　（逆元）
$= \varphi(x^{-1})$　（単位元）
一方, (1)から, $\varphi(e) = e'$ だから,
$\varphi(x)^{-1} * \varphi(e) = \varphi(x)^{-1} * e' = \varphi(x)^{-1}$.
ゆえに, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

系

環$(S, +, \cdot, c, e)$, $(R, +, \cdot, c', e')$ と準同型 $\varphi : S \to R$ に対して,
次の(1), (2)が成り立つ.
(1)　$\varphi(c) = c'$
(2)　任意の $x \in S$ に対して, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

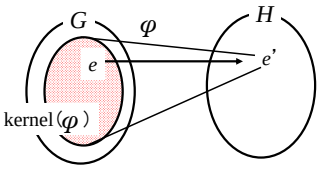
- $(S, +, c)$, $(R, +, c')$は加法群だから, 明らか.

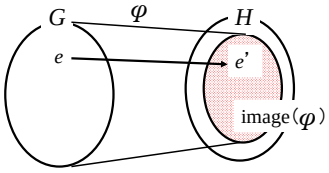
- 環準同型写像は加法の単位元と逆元を保存する.
  - 乗法の単位元を保存するとは限らない.

群準同型写像の核, 像

群$(G, \cdot, e)$, $(H, *, e')$ と準同型$\varphi : G \to H$ に対して,

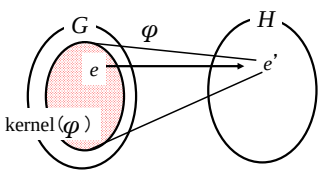
- φ の核(kernel)
  - $\mathrm{kernel}(\varphi) = \{ x \in G \mid \varphi(x) = e' \}$　$(\mathrm{Ker}\,\varphi)$
- φ の像(image)
  - $\mathrm{image}(\varphi) = \{ \varphi(x) \mid x \in G \}$　$(\mathrm{Im}\,\varphi)$

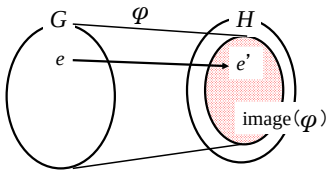




定理

群$(G, \cdot, e)$, $(H, *, e')$ と準同型$\varphi : G \to H$ に対して,
次の(1), (2)が成り立つ.
(1)　(kernel(φ), $\cdot$)は G の部分群である.
(2)　(image(φ), $*$)は H の部分群である.





証明

群$(G, \cdot, e)$, $(H, *, e')$ と準同型$\varphi : G \to H$ に対して,
(1)　(kernel(φ), $\cdot$)は G の部分群である.
- 前の定理により, 次の(a)～(d)を示す.
  - (a)　$\mathrm{kernel}(\varphi) \subseteq G$.　(b)　$e \in \mathrm{kernel}(\varphi)$.
  - (c)　任意の $x \in \mathrm{kernel}(\varphi)$ に対して, $x^{-1} \in \mathrm{kernel}(\varphi)$.
  - (d)　任意の $x, y \in \mathrm{kernel}(\varphi)$ に対して, $x \cdot y \in \mathrm{kernel}(\varphi)$.

(a)　明らかに, $\mathrm{kernel}(\varphi) \subseteq G$.
(b)　群準同型は単位元を保存するから, $\varphi(e) = e'$. ゆえに, $e \in \mathrm{kernel}(\varphi)$.
(c)　任意の $x \in \mathrm{kernel}(\varphi)$ に対して, $\varphi(x) = e'$ だから,
$\varphi(x^{-1}) = e' * \varphi(x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1})$.
φは準同型だから, $\varphi(x) * \varphi(x^{-1}) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e) = e'$.
ゆえに, $\varphi(x^{-1}) = e'$ だから, $x^{-1} \in \mathrm{kernel}(\varphi)$.
(d)　任意の $x, y \in \mathrm{kernel}(\varphi)$ に対して, φは準同型だから,
$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y) = e' * e' = e'$. ゆえに, $x \cdot y \in \mathrm{kernel}(\varphi)$.
以上から, (kernel(φ), $\cdot$)は G の部分群である.

証明（続き）

群$(G, \cdot, e)$，$(H, *, e')$と準同型$\varphi: G \to H$に対して，
（2）$(\mathrm{image}(\varphi), *)$は$H$の部分群である．

- 前の定理により，次の(a)～(d)を示す．
  - (a) $\mathrm{image}(\varphi) \subseteq H$.　(b) $e' \in \mathrm{image}(\varphi)$.
  - (c) 任意の$x' \in \mathrm{image}(\varphi)$に対して，$x'^{-1} \in \mathrm{image}(\varphi)$．
  - (d) 任意の$x', y' \in \mathrm{image}(\varphi)$に対して，$x' * y' \in \mathrm{image}(\varphi)$．

(a) 明らかに，$\mathrm{image}(\varphi) \subseteq H$.
(b) 群準同型は単位元を保存するから，$\varphi(e) = e'$．ゆえに，$e' \in \mathrm{image}(\varphi)$.
(c) 任意の$x' \in \mathrm{image}(\varphi)$に対して，$x \in G$が存在して，$x' = \varphi(x)$.
ゆえに，$x'^{-1} = \varphi(x)^{-1}$.
ところで，群準同型は逆元を保存するから，$\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.
ゆえに，$x'^{-1} = \varphi(x^{-1})$.
$x^{-1} \in G$だから，$\varphi(x^{-1}) \in \mathrm{image}(\varphi)$.
ゆえに，$x'^{-1} \in \mathrm{image}(\varphi)$.

37

証明（続き2）

群$(G, \cdot, e)$，$(H, *, e')$と準同型$\varphi: G \to H$に対して，
（2）$(\mathrm{image}(\varphi), *)$は$H$の部分群である．

- 前の定理により，次の(a)～(d)を示す．
  - (a) $\mathrm{image}(\varphi) \subseteq H$.　(b) $e' \in \mathrm{image}(\varphi)$.
  - (c) 任意の$x' \in \mathrm{image}(\varphi)$に対して，$(x')^{-1} \in \mathrm{image}(\varphi)$．
  - (d) 任意の$x', y' \in \mathrm{image}(\varphi)$に対して，$x' * y' \in \mathrm{image}(\varphi)$．

(d) 任意の$x', y' \in \mathrm{image}(\varphi)$に対して，$x, y \in G$が存在して，
$x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$.
φは準同型だから，$x' * y' = \varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$.
$x \cdot y \in G$だから，$\varphi(x \cdot y) \in \mathrm{image}(\varphi)$.
すなわち，$x' * y' \in \mathrm{image}(\varphi)$.
以上から，$(\mathrm{image}(\varphi), *)$は$H$の部分群である．

38

まとめ

- 今日の講義
  - 部分系，準同型
- 次回の講義（2限）
  - 商系（教科書　pp.165-168）
- 今日の演習
  - なし

39