論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　甲　第　　号

氏　　　名　劉　旭　(LIU Xu)

論 文 題 目

On complements of complete Kähler domains

(完備ケーラー領域の補集合について)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
小　林　亮　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
大　沢　健　夫

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）.
伊　師　英　之

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
津　川　光　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

多変数複素解析において最初に完備 Kähler 計量を研究対象としたのは Grauert であり，Stein 多様体の特徴づけに関連してのことであった．全ての Stein 多様体は完備 Kähler 計量を許容する．逆の問題に対して Grauert は，Stein 多様体の任意の closed analytic set A の補集合 $X \setminus A$ に完備 Kähler 計量を構成してみせた．こうして完備 Kähler 計量の存在は Stein 性を導くのに不十分であることが示された．それでもなお，

(A) 完備 Kähler 計量が何らかの曲率条件を満たす場合，

(B) 完備 Kähler 領域の境界が一定の regularity 条件を満たす場合，

に完備 Kähler 計量の存在からどのような複素解析的性質が従うかを問う問題は，依然として活発に研究されている．本学位申請論文は，問題 (B) の立場から完備 Kähler 計量の複素解析に貢献するものである．複素領域の多重劣調和関数とは $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に値をとる上半連続で恒等的に $-\infty$ ではなく任意の複素直線への制限が劣調和になる関数と定義される．多重劣調和関数の $-\infty$ 点の集合は (local/global) (complete) pluripolar set とよばれる重要な研究対象である．Closed analytic set は closed pluripolar set であり，上記 Grauert の結果を一般化して closed complete pluripolar set の補集合が完備 Kähler 計量を許容することを示すのは容易である．そこで，完備 Kähler 領域の補集合 A がいつ analytic variety になるか，という問題が生じる．この問題に対し，大沢は実余次元 2 の場合は C^1-regularity から A が analytic variety であることが従うことを示した．実余次元 ≥ 3 の場合は状況が一変する．Diederich-Fornaess は A が analytic variety であるためには C^∞-regularity では不十分であることを例（ball の実余次元 ≥ 3 の C^∞ 部分多様体で複素解析的でなく，完備 Kähler domain の境界になっているもの）を構成することによって示した．本学位申請論文において申請者は同様の例をコンパクトの場合に構成している．問題 (B) は複素解析の局所・大域問題にも関連する．Coltoiu (J. reine angew. Math, 1990) は Stein 多様体では locally complete pluripolar set は globally complete pluripolar であることを示した．Closed complete pluripolar set は完備 Kähler 領域の補集合だから，Stein 多様体 X の閉集合 A に対し $X \setminus A$ が局所的に完備 Kähler 領域になっているとき $X \setminus A$ は大域的に完備 Kähler 領域か？を問うことは自然である．この問題に対する申請者の第一の貢献は問題設定にある．それは (X, A) に対し，ある種の regularity 条件 (C) を満たすような完備 Kähler 計量に話を限定することである．ここで境界の regularity 条件 ((C) は

- X は次の条件を満たす局所有限開被覆 $\{U_i\}$ を許容する；
- 各 U_i に対し $\phi_i \in \mathrm{PSH}(U_i) \cap C^\infty(U_i \setminus A)$ であって $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi_i$ は $A \cap U_i$ に沿って完備な $U_i \setminus A$ の完備 Kähler 計量である（ここで境界条件として $\phi_i \in \mathrm{PSH}(U_i)$ を課すことが本質的）．

と述べられる条件である．申請者の第二の貢献はこの問題設定のもとで問題を完全に解決したことである．

定理． X を Stein 多様体，$A \subset X$ を閉集合とする．もし $X \setminus A$ が上記 (C) の意味で regular な境界をもつ局所的に完備 Kähler 計量を許容したとせよ．このとき，X 上の完備 Kähler 計量であって，大域的に定義された多重劣調和関数 $\phi \in \mathrm{PSH}(X)$ をその Kähler potential に持つものを構成できる．さらに，ϕ は下に有界という条件を満たすものを構成できる．もし全ての ϕ_i が連続ならば大域的 potential ϕ も連続で A の外側では C^∞ であるように構成できる．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

証明は定理の主張が示すように構成的である．構成方法は，古い多重劣調和関数から望ましい性質を持つ新しい多重劣調和関数を構成する技法，Stein 多様体上で無数の局所多重劣調和関数から一つの劣調和関数を作る技法を組み合わせたものである．

学位審査セミナーにおける申請者の発表は十分な背景説明と的確な問題設定のもとで学位論文で述べられた結果をすべて証明しきるものであった．本論文の背景にある基礎的な多変数複素解析の質問に的確な解答を与えることもできた．以上により，学位審査委員会は本学位申請論文は学位に値するという結論に達した．