論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　甲　　第　　　号

氏　　　　　名　　中　嶋　　祐　介

論　文　題　目

Studies on Quotient Singularities via Cohen-Macaulay Representations
(コーエン・マコーレー表現論を用いた商特異点の研究)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
伊　山　　　修

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
伊　藤　　由　佳　理

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
宇　沢　　　達

委　員　岡山大学理学部数学科　教授　理学博士
橋　本　　光　靖

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の重要な背景として, 商特異点についてその特有の性質を調べるという, 古くからある問題意識が挙げられる。代数幾何学, 表現論, 可換環論それぞれからの視点や手法が取り入れられ, 活発に研究が進められている。そのような中で, 本論文に関係の深い, やや独立した話題が 2 つ挙げられる。

一つ目は, F-signauture とその類似物に関する研究である。1980 年代後半に正標数の可換環を Frobenius 写像を通して調べる, いわゆる正標数の可換環論が活発化し, その流れの中で 2000 年代前半に F-signature という不変量が Huneke と Leuschke によって調べられ, その後多くの研究者によって活発に調べられてその重要性が認識されてきた。不変式環についても 渡辺・吉田による順な作用に関する不変式環の F-sigunature が群の位数の逆数になるという結果が先行していた。強 F 正則性と関係の深いこの不変量の類似物として, 三内は F 有理性と関係の深い dual F-signature を考えたが, F-signature に比べて明らかに計算が大変で, 計算例が乏しい状況であった。

もう一つは SL_2 の有限部分群 G の 2 変数ベキ級数環 $S = k[[x,y]]$ への順な作用における McKay 対応が挙げられる。この状況で不変式環 $R = S^G$ の上の直既約極大 Cohen–Macaulay 加群は G の既約表現と 1 対 1 に対応しており, 極大 Cohen–Macaulay 加群の Auslander–Reiten quiver は G の McKay quiver と対応している。一方, $\operatorname{Spec} R$ の極小特異点解消の既約例外曲線と非自明な G の既約表現も 1 対 1 に対応している。後者の対応は Wunram によって導入された special な極大 Cohen–Macaulay 加群によって GL_2 の small subgroup に一般化されている。McKay 対応を舞台とした商特異点研究は, 代数幾何学と環論・表現論を含む幅広い領域で行われている。

中嶋氏の学位論文は以上の状況を背景としたものであり, その主たる成果は以下のとおりである：以下 k は代数閉体, G は GL_n の small かつ順な有限部分群とする。G は $S = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ に自然に作用する。R は不変式環 S^G を表すとする。

第 1 の成果として, 正標数において一般化された F-signature を定義し, R についてそれを求めた。R の直既約極大 Cohen–Macaulay 加群 M について, e 番目の Frobenius 直像 ${}^eR$ に M が直和因子として含まれる最大個数を $a_e(M)$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} a_e(M)/p^{ne}$ を M の**一般化された** *F-signature* であると定義し, それが $M = (S \otimes_k V)^G$, V は G の既約表現の場合に $(\dim V)/|G|$, その他の M については 0 であることを橋本と共同で示した。これは渡辺・吉田の F-signature に関する結果のひとつの一般化になっている。

さらには第 2 の成果として, やはり正標数において, GL_2 の順な small subgroup の作用による商特異点について, 三内による dual F-signature を調べ, 特に 巡回商特異点と有理 2 重点については, すべての special な直既約極大 Cohen–Macaulay 加群の dual F-signature を求めている。上記 2 つの背景をよく踏まえた上で, 生成元を Auslander–Reiten quiver の path ととらえるというアイデアを用い, また, dual F-signature を計算するのに必要な全射を数えることについて, 新しいアイデアを出している。その上で徹底した計算を行って困難を克服している点が高く評価できる。巡回商特異点を調べるについては, Hirzebruch–Jung の連分数展開が効果的に用いられている。

また, 第 3 の成果として, 吉田健一氏と共同で, 2 次元巡回商特異点上の直既約極大 Cohen–Macaulay 加群について, その生成元の個数を Hirzebruch–Jung の連分数展開の言葉で表した。それを用いて様々な場合に直既約 Ulrich 加群がいくつあるかを求め, また環の Hilbert–Kunz 重複度を計算した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

このように，中嶋氏の学位論文は不変式論, 商特異点の理論において, F 特異点とMcKay 対応という２つの面からの新しい切り口で重要な知見を与えたものであり, 学位論文として十分な内容を持つものである。主論文では背景となる F 特異点 (とりわけ F-signature をはじめとする不変量) と McKay 対応について丁寧な準備がなされており, 入門的解説としても優れたものとなっている。第１の成果は副論文１として, 第２の成果は副論文２および３として, 第３の成果は副論文４としてまとめられ, いずれも arXiv で公開されており, 中でも副論文３は既に Algebras and Representation Theory 誌に掲載が決定している。これら論文のうち副論文１と副論文４は共著論文となってはいるが, 中嶋氏の貢献はその主要な部分すべてにわたるものである。

２０１５年７月２１日に学位の公開審査セミナーを行ったが, 背景と問題, その解決への基本的アプローチ，および主結果とその意義などが, 非専門家にも良く伝わるように工夫されたものであり, また質問に対する応対も的確なものであった。以上によって, 審査委員会は学位を授与するべきであるものと判断する。