

Studies on Quotient Singularities via Cohen-Macaulay Representations

(コーエン・マコーレー表現論を用いた商特異点の研究)

中 嶋 祐 介

論文の要約

商特異点の性質は現在までに可換環論、代数幾何学、ホモロジー代数など様々な分野の手法を用いて研究されてきたが、本論文では 80 年代後半から M. Hochster、C. Huneke らを中心にして急速に発展してきた正標数の可換環論の手法を用いて商特異点を考察する。また、その過程において Auslander-Reiten 理論をはじめとした Cohen-Macaulay 表現論の手法が非常に重要な役割を果たしている。

正標数の可換環に対しては Frobenius 写像と呼ばれる正標数の世界特有の写像が定義でき、その写像による押し出しにより Frobenius 直像と呼ばれる加群が定義される。さらにこの操作を繰り返していくことにより、さらにサイズの大きな Frobenius 直像を構成していくことができる。正標数の可換環の性質をこの加群の構造を通じて理解することはひとつの大きな目標であり、特に Frobenius 写像による押し出しを繰り返していった時に Frobenius 直像の中にどんな加群がどのくらい現れるかを調べることは重要である。また、Frobenius 直像を用いて環のクラスを特徴付ける数値的不変量が定義されるため、その値を具体的に求めることも重要なテーマのひとつである。本論文では上記の Frobenius 直像に関する問題を有限群の作用に関する不変式環 (商特異点) の場合について考察している。商特異点の場合には Frobenius 直像は MCM (= maximal Cohen-Macaulay) 加群となり、その直和因子として現れる MCM 加群は有限群の既約表現と 1 対 1 に対応することがわかる。このような直和因子の中で特に自由加群であるものの重複度に注目し、Frobenius 写像による押し出しを繰り返した時の漸近挙動を見ることにより、F-signature と呼ばれる数値的不変量が定義される。この不変量は K. Smith-M. Van den Bergh の有限 F 表現型の研究を基にして、C. Huneke-G. Leuschke により定義されたもので、この値により環のクラス (正則、強 F 正則) を特徴づけることが出来る。商特異点の F-signature の値は渡辺・吉田により具体的に与えられており、特にその値から商特異点は強 F 正則という正標数の環のクラスに属することがわかる。私は橋本光靖教授 (岡山大学) との共同研究において、この不変量を自由でない直和因子の重複度に対して拡張した Generalized F-signature という不変量を定義し、その値を具体的に決定した。この結果により Frobenius 写像による押し出しを十分大きくとると、Frobenius 直像の中に現れる各直和因子の重複度は対応する既約表現の次元に比例することが明らかになった。その結果のひとつの帰結として 2 次元の場合に

は Frobenius 直像を加法生成加群として生成される圏と MCM 加群のなす圏が一致し、Auslander-Reiten 理論と呼ばれる一連の結果をこの圏に適用することが出来る。例えば Frobenius 直像の中に直和因子として現れる MCM 加群達の間を AR (= Auslander-Reiten) クイバーと呼ばれる有向グラフによって視覚化することができ、上記で述べた不変量以外の様々な数値的不変量 (dual F-signature、Hilbert-Kunz 重複度など) の考察が可能となる。特に三内により定義された dual F-signature は F-signature のある種の一般化であり、この不変量も F 有理をはじめとした正標数の環のクラスを特徴付けるものとして重要であることが認識されている。このような良い性質があるにも関わらず、この不変量の値を具体的に求めることは困難であると考えられていた。しかし、上記の AR クイバーを用いた考察によりいくつかの MCM 加群に対してその値を与えることに成功した。さらに special CM 加群と呼ばれる MCM 加群のあるクラスに注目し、その加群の dual F-signature の値を考察した。Special CM 加群は商特異点の最小特異点解消をとったときに現れる例外曲線と 1 対 1 に対応することが知られており (special McKay 対応)、特異点の性質を考察する際にこの加群のクラスに注目することは重要であるが、特に special CM 加群とその AR 移動となる加群の dual F-signature の値を比較することにより、Gorenstein となる商特異点の新たな特徴付けを与えることに成功した。

さらに、上記の不変量を求める手法を利用すると各 MCM 加群の極小生成系の個数を求めることと、AR クイバー上のある特定の path を数え上げることが同値であることもわかる。これを応用して Ulrich 加群と呼ばれる MCM 加群の中のあるクラスを考察することができる。一般に MCM 加群の極小生成系の個数はその加群の重複度以下になることが知られているが、Ulrich 加群は両者が一致する加群として定義される。この加群の性質については様々な文献で研究されているが、与えられた環上の Ulrich 加群の分類や特徴付けは多くの場合に対して成されていない。そこで私は 2 次元巡回商特異点の場合について日本大学の吉田健一教授と共同研究を行い、Ulrich 加群の特徴付けを与えた。この特徴付けにおいても special CM 加群が重要な役割を果たしており、special McKay 対応によりこれらの加群と対応する例外曲線及びその自己交差数により Ulrich 加群の現れ方や個数を記述できることが明らかとなった。