団代数とその応用

中西　知樹　(名古屋大学)*

1. はじめに — Cluster algebras, what and why?

団代数 (cluster algebra) は2000年ごろにFomin-Zelevinsky [FZ02, FZ03a, FZ03b, BFZ05, FZ07] により導入された可換環のあるクラスであり, 団 (cluster) という環のある特別な生成元の組と、変異 (mutation) という団から新しい団を産み出す操作を持つところにその特質がある. ある団に属する変数を団変数 (cluster variable) というが, 変異で移り合う二つの団に属する団変数の間に交換関係式 (exchange relation) と呼ばれる多項式関係式が得られる. この関係式がいろいろな既知の環やさまざまな対象の間の関係式として現れるのである.

たとえば、簡単な交換関係式の例として

$$x_1x_2 = x_3x_4 + x_5x_6 \tag{1.1}$$

という形の関係式をあげよう. これは, 可積分系においては大変なじみ深い関係式であり, Grassmann 多様体の Plücker 座標の関係式, Schur 関数あるいは一般線形 Lie 代数の指標の関係式, Hirota-Miwa 方程式, 離散 Toda 方程式, T-system, などに現れるが, さらには曲面の Teichmüller 空間の座標の Ptolemy 関係式, 行列における全正値性 (total positivity), ３次元空間における完全被覆 (perfect matching) など, さまざまな分野のさまざまな文脈において現れることが知られている. 団代数においては, このような関係式の族が単に系統的に得られるだけではなく, 団代数の定式化によって後に述べる Laurent 現象を始めとする一連の強力かつ一般的な結果が合わせて得られるのである. これが団代数が有用な応用を持つことの最大の要因であろう.

一方, 団代数においては変異を定める交換行列 (exchange matrix) というものがある. これは変異を生物学的にたとえた場合におけるいわば「DNA」に相当するものであるが, この交換行列が特に (有限)ADE 型の Dynkin 箙 (quiver) の場合, 団変数をその Dynkin 図に対するルート系のルートと対応させることができる [FZ03a]. このことと多元環の表現論における Auslander-Reiten 理論との類似性とその重要性をいち早く認識した多元環論の研究者たちは, この類似性を追求して多元環の表現の導来圏の軌道圏である団圏 (cluster category) により団代数の圏化が与えられること示した [BMR$^+$06]. さらに, Keller たちは, 団傾加群の変異 [IY08], ポテンシャル付箙 [DWZ08, DWZ10], Ginzburg の微分次数付き代数 [Gin06] などを用いて, より一般の団代数に対する三角圏による圏化 (2-Calabi-Yau 実現) へと一般化した ([Kel10a, Ami09, Pla11b]). 加えて, これと並行した結果が Donaldson-Thomas 不変量の変換の立場からも得ることができるも明らかにされた [KS08, Nag10]. 団代数の基礎づけに関しては, まだまだ未整備な点も多く残されているものの, これらをもって初期段階における一応の到達点に達したということができるであろう.

ところで, 生物学的な変異においては「DNA」自身もまたすこしづつ変化していくように, 団代数における「DNA」である交換行列自身も変異に際してすこしづつ変化して

2011 年度日本数学会秋期総合分科会 (2011 年 9 月信州大学) 無限可積分系セッション予稿集・特別講演予稿
著者最終稿
* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: nakanisi@math.natoya-u.ac.jp

いくのである．このことと Dynkin 図との関連を考えるとき, 団代数の理論が従来のルート系の理論の「ある部分の」広汎な一般化になっているという見方もできるのである．現時点においてはこのような観点はまだ必ずしも明確に定式化されているわけではなく, 今後の大きなテーマとなることは間違いないが, このことが団代数がなぜさまざまの分野に遍在する共通構造になり得るのかという疑問に対する一つの納得と示唆を与えるであろう．

以上述べたように, 団代数はその導入から 10 年間余の間に多くの分野と関連しながら急速に研究が進められている．Fomin による団代数に特有なキーワードを用いた論文検索によると 2011 年 6 月の時点での arXiv における関連論文の総数はすでに 360 編余を数え, これを受けて, MSC (Mathematics Subject Classification) の 2010 年改訂において cluster algebra (13F60) という項目が加えられた．

さて、講演者とその共同研究者 (Inoue, Iyama, Kashaev, Keller, Kuniba, Suzuki, Tateo, Zelevinsky) は、この 3 年間に, 団代数の周期性と付随する dilogarithm 恒等式に関する一連の研究行い, 数々の結果を得た [IIK$^+$10c, KNS09, Nak11a, IIK$^+$10a, IIK$^+$10b, Nak10a, NT10, Nak11b, IN10, NZ12, KN11]. 特に, その応用として 80 年代および 90 年代における可積分系, 特に Bethe 仮説の研究に起源を持ち長らく未解決問題であった Y-system の周期性予想や共形場理論の中心荷電に対する dilogarithm 恒等式予想の証明を与えた．本講演ではこららの結果を中心にして、団代数および団代数と可積分系の関連や応用の一端を紹介をしたい.

なお, 本稿と講演者による日本語の解説 [Nak10c, Nak10b] あるいは原著論文との間に内容の一部重複があることをお断りしておく．

2. 団代数

この章では Fomin-Zelevinsky [FZ02, FZ03a, FZ07] により導入された係数付き団代数の定義を与える．

2.1. 行列と箙の変異

以下では, 自然数 n を固定し $I = \{1, \dots, n\}$ を添字集合とする．$B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ を反対称 (整数) 行列とする．このとき, 行列 B の $k \in I$ における変異 (mutation) $\mu_k(B) = B' = (b'_{ij})_{i,j \in I}$ を次で定める．

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & \text{その他の場合.} \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし, 整数 x に対して, $x \geq 0$ のとき $[x]_+ = x$, $x < 0$ のとき $[x]_+ = 0$ とする．このとき, B' はふたたび反対称であり, また μ_k は対合的, すなわち $\mu_k^2 = \mathrm{id}$ がなりたつ.

反対称行列 B に対して, 頂点集合を I として, $b_{ij} > 0$ のとき, 頂点 i から頂点 j へ b_{ij} 本の矢を持つ箙 Q を対応させる．この箙 Q はループと 2 サイクルを持たず, また, これにより反対称行列とループと 2 サイクルを持たない箙の間の 1 対 1 対応が与えられる. 以下ではこの対応により反対称行列 B と箙 Q を同一視する.

Remark 2.1 Fomin-Zelevinsky はより一般に反対称化可能行列 B に対して, 団代数を定義しているが, 簡単のため本稿では B が反対称行列の場合に限って論じる.

2.2. 団代数

Definition 2.2 $\mathbb{P}$が半体(semifield)であるとは, $\mathbb{P}$が乗法的abel群であり, 可換で結合的な演算$\oplus$ (加法)を持ち, 分配則$(a \oplus b)c = ac \oplus bc$をみたすことである.

Example 2.3 以下の3つの半体が重要である.

(a) 普遍半体(universal semifield) $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$.

変数の組$y = (y_i)_{i \in I}$に対して, yの引き算を伴わない(subtraction-free)有理式表示を持つ有理式全体のなす半体.

(b) tropical半体 (tropical semifield) $\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(y)$.

変数の組$y = (y_i)_{i \in I}$に対して, yの生成する乗法的自由アーベル群(すなわちyの係数1のLaurent単項式全体のなす群)に以下の加法$\oplus$を入れたもの.

$$\prod_{i \in I} y_i^{a_i} \oplus \prod_{i \in I} y_i^{b_i} := \prod_{i \in I} y_i^{\min(a_i, b_i)}. \tag{2.2}$$

(c) 自明半体(trivial semifiled) $\mathbf{1} = \{1\}$.

$1 \times 1 = 1 \oplus 1 = 1$と定める.

いま, 反対称行列$B = (b_{ij})_{i,j \in I}$と形式的変数の組$x = (x_i)_{i \in I}$および形式的変数の組$y = (y_i)_{i \in I}$の3つ組(B, x, y)を考え、これを初期種子(initial seed)と呼ぶ. 初期種子(B, x, y)の$k \in I$における変異$\mu_k(B, x, y) = (B', x', y')$を次で定める. まず, $B' = \mu_k(B)$は(2.1)で定めたとおりとする. つぎに, $y' = (y'_i)_{i \in I}$ $(y'_i \in \mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y))$を以下のとおり定める.

$$y'_i = \begin{cases} y_i^{-1} & i = k \\ y_i y_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+} (1 \oplus y_k^{\varepsilon})^{-b_{ki}} & i \neq k. \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで, $\varepsilon = +, -$は符号で, どちらに対しても(2.1)は同じ値になる. (以降の同様の式においてこの注意は繰り返さない.) 最後に, $\tilde{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$を$\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$の群環, $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$をその商体として, $x' = (x'_i)_{i \in I}$ $(x'_i \in \tilde{\mathbb{Q}}(x))$を以下のとおり定める.

$$x'_i = \begin{cases} x_i & i \neq k \\ \dfrac{1}{x_i} \left(\dfrac{y_k}{y_k \oplus 1} \displaystyle\prod_{j \in I} x_j^{[b_{jk}]_+} + \dfrac{1}{y_k \oplus 1} \displaystyle\prod_{j \in I} x_j^{[-b_{jk}]_+} \right) & i = k. \end{cases} \tag{2.4}$$

これらをyとxの交換関係式(exchange relation)という. このとき, $\mu_k^2 = \mathrm{id}$がなりたつ.

このように得られた新たな「種子」(B', x', y')に対しても同様の規則で変異を次々と繰り返し, 得られたすべての種子(B', x', y')を集めよう. 各種子(B', x', y')に対して, B'を交換行列(exchange matrix), x'を団(cluster), x'_i $(i \in I)$を団変数(cluster variable), y'を係数の組(coefficient tuple), y'_i $(i \in I)$を係数(coefficient)という. あるいは、より気楽にx'_iをx変数, y'_iをy変数ということも多い.

Remark 2.4 (a). y変数の変異が(2.3)のように二通りの表式を持つことの重要性が認識されたのは量子団代数の研究を通してであり, ごく最近のことである [Nag10, Kel11, KN11].

(b) 若干余談になるが, Teichmüller 空間の観点から Fomin-Zelevinsky とほぼ独立に団代数の概念に到達した Fock-Goncharov の重要な文献 [FG09a, FG07, FG09c, FG09b] においては, 一貫して団変数に a, 係数に x という記号が用いられていて, 特に変数 x の意味するところが Fomin-Zelevinsky と正反対であることがこの分野の研究者の小さいが無視できない悩みとなっている.

Definition 2.5 ([FZ02, FZ03a]) 初期種子 (B, x, y) に対して変異で得られるすべての団変数たちで生成される体 $\tilde{\mathbb{Q}}(x)$ の $\tilde{\mathbb{Z}}$ 部分代数を係数つき団代数といい, $\mathcal{A}(B, x, y)$ と表す. また, 射影 $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y) \to \mathbf{1}$ により係数を自明化して得られる体 $\mathbb{Q}(x)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数係数なし団代数といい, $\mathcal{A}(B, x)$ と表す.

本稿では, 係数つき団代数を単に団代数ということにする.
以下の二つが団代数に関する最も基本的な定理である.

Theorem 2.6 (Laurent 現象 ([FZ02, FZ07])) $\mathcal{A}(B, x, y)$ のすべての団変数は初期団変数 x_i $(i \in I)$ の $\tilde{\mathbb{Z}}$ 係数の Laurent 多項式で表示できる.

Theorem 2.7 (有限型団代数の分類 ([FZ03a])) $\mathcal{A}(B, x, y)$ の異なる団変数が有限個であるための必要十分条件は $\mathcal{A}(Q, x, y)$ のある種子 (Q', x', y') に対して, Q' の下部グラフ (矢の向きを無視したグラフ) が ADE 型の Dynkin 図となることである.

x 変数と y 変数の間には以下のような特筆すべき関係がある.

Proposition 2.8 ([FZ02]) 各種子 (B', x', y') に対して

$$\hat{y}'_i = y'_i \prod_{j \in I} {x'_j}^{b'_{ji}} \tag{2.5}$$

とおくと, $\hat{y}'_i$ たちは y'_i たちと同じ交換関係式 (2.3) をみたす.

3. T-system と Y-system

T-system と Y-system は量子可積分系における Bethe ansatz との関連で 90 年代に見いだされた関数方程式系であり, 量子群の有限次元表現, 特に Kirillov-Reshetikhin 加群と関わりが深い. 団代数の導入後, 次第にそれらと団代数との関連が認識された. 以下ではもっとも簡単な場合である, ADE 型の量子アフィン代数に付随する T-system と Y-system を例にその概要を説明する.

X を ADE 型の Dynkin 図とし, I をその index 集合とする. また ℓ は 2 以上の整数とする.

ペア (X, ℓ) に対して, 変数の族

$$Y = \{Y_m^{(a)}(u) \mid a \in I; m = 1, \dots, \ell - 1; u \in \mathbb{Z}\} \tag{3.1}$$

に対する以下の関数方程式系をレベル ℓ の X 型 Y-system という.

$$Y_m^{(a)}(u-1) Y_m^{(a)}(u+1) = \frac{\prod_{b \in I, b \sim a} (1 + Y_m^{(b)}(u))}{(1 + Y_{m-1}^{(a)}(u)^{-1})(1 + Y_{m+1}^{(a)}(u)^{-1})}, \tag{3.2}$$

ただし, $Y_0^{(a)}(u)^{-1} = Y_\ell^{(a)}(u)^{-1} = 0$ とする. また, $a \sim b$ は a, b が X において隣接することを意味する. Y-system は, S 行列模型や格子模型の熱平衡条件である熱力学的 Bethe 仮

説方程式 (thermodynamic Bethe ansatz (TBA) equation) の解のみたす関数方程式として, $\ell = 2$ のとき [Zam90] により導入され, その後, 一般の ℓ に対して [KN92, RTV93] により上の形に一般化された.

同様に, ペア (X, ℓ) に対して, 変数の族

$$T = \{T_m^{(a)}(u) \mid a \in I; m = 1, \dots, \ell - 1; u \in \mathbb{Z}\} \tag{3.3}$$

に対する以下の関数方程式系をレベル ℓ の X 型 T-system という.

$$T_m^{(a)}(u-1)T_m^{(a)}(u+1) = \prod_{b \in I, b \sim a} T_m^{(b)}(u) + T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u), \tag{3.4}$$

ただし, $T_0^{(a)}(u) = T_\ell^{(a)}(u) = 1$ とする. T-system は, 格子模型の転送行列の関係式 (の予想) として導入され [KNS94], それ以前に共形場理論の中心荷電の dilogarithm 恒等式予想と関連して導入された Q-system [Kir89, KR90] の affine 化となっている. 表現論的には T-system は量子アフィン代数の表現の Grothendieck 群における Kirillov-Reshetikhin 加群の間の関係式 (の予想) に他ならない. その後, この予想は q 指標 [FR99] を用いて, [Nak03, Her06] により証明された.

さて、Y-system (3.2) と T-system (3.4) の間には一見して外見上の類似性があるが, それとはまた別に以下のような代数的な関係がある.

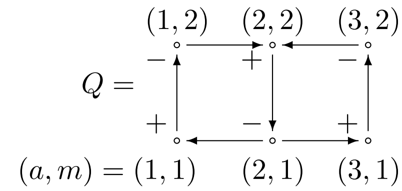
Proposition 3.1 ([KNS94]) 変数の族 T が T-system (3.4) をみたすとき,

$$Y_m^{(a)}(u) := \frac{\prod_{b \in I, b \sim a} T_m^{(b)}(u)}{T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u)} \tag{3.5}$$

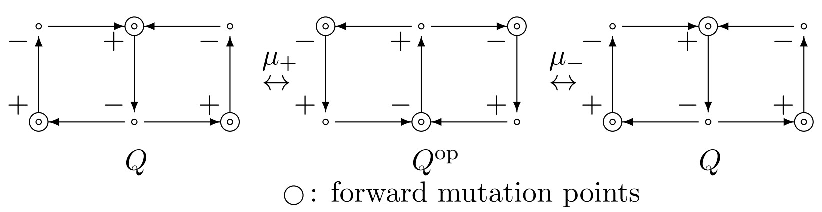
とおくと, 変数の族 Y は Y-system (3.4) をみたす.

さて, Y-system と T-system がともにある共通の団代数の y 変数と x 変数 (ただし y 変数は自明化する) の関係式として定式化できることを以下の例で説明しよう.

Example 3.2 $X = A_3$, $\ell = 3$ を考えよう. 以下の箙 Q に対応する団代数 $\mathcal{A}(Q, x, y)$ を考える.



μ_+ をすべての符号 $+$ を持つ頂点における変異の合成とする. これは合成の順序によらないことに注意する. 同様に, μ_- を定める. このとき, 以下の箙の変異の列における周期性が成り立つ.



○: forward mutation points

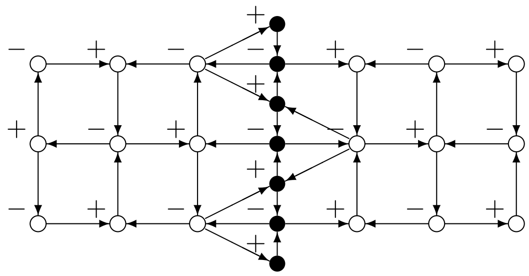


図 1: $X = B_4$, $\ell = 4$ の場合の初期箙

いま, $(x(0), y(0)) = (x, y)$ とおき, 変数の族 $(x(u), y(u))$ $(u \in \mathbb{Z})$ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \cdots &\overset{\mu_+}{\leftrightarrow} (Q^{\mathrm{op}}, x(-1), y(-1)) \overset{\mu_-}{\leftrightarrow} (Q, x(0), y(0)) \overset{\mu_+}{\leftrightarrow} (Q^{\mathrm{op}}, x(1), y(1)) \\ &\overset{\mu_-}{\leftrightarrow} (Q, x(2), y(2)) \overset{\mu_+}{\leftrightarrow} \cdots \end{aligned} \tag{3.6}$$

$P_+ = \{(u, a, m) \mid u + a + m = 0 \bmod 2\}$ とおく. これは, 前方変異点 (forward mutation point, 上の図で $\circ$ をつけた点) に対応していることに注意する.

このとき以下がなりたつ.

(1) $\{y_{am}(u) \mid (u, a, m) \in P_+\}$ は Y-system をみたす.

(2) $\{x_{am}(u-1) \mid (u, a, m) \in P_+\}$ は T-system をみたす. ただし, y 変数は自明化する.

(3) T-system と Y-system の関係 (Prop. 3.1) は, x 変数と y 変数の関係 (Prop. 2.8) の特別な場合に帰着する.

X が nonsimply laced の場合の T-system と Y-system はより複雑であるが, その分より興味深いとも言える. 例えば, レベル 4 の B_4 型 T-system と Y-system は, 図 1 の箙 Q と箙の周期

$$Q \overset{\mu_+^\bullet \mu_+^\circ}{\leftrightarrow} Q_1 \overset{\mu_-^\bullet}{\leftrightarrow} Q_2 \overset{\mu_+^\bullet \mu_-^\circ}{\leftrightarrow} Q_3 \overset{\mu_-^\bullet}{\leftrightarrow} Q \tag{3.7}$$

を用いて団代数の関係式として定式化ができる [IIK+10a].

量子群の観点からは, T-system は広汎なクラスの「quantum Kac-Moody algebra の量子アフィン化」に対して一般化されている [Her07]. さらに, これらはすべて団代数により定式化ができる [KNS09, IIK+10a, IIK+10b, Nak10a]. また, これらの例のさらなる広汎な一般化として, 交換行列 B の任意の周期に対して, 付随する T-system および Y-system を定式化することができる [Nak11b].

4. tropical 化

Fomin-Zelevinsky は [FZ07] において, 団変数 (x 変数) および係数 (y 変数) の F 多項式, C 行列, G 行列による積表示を与えることによりその構造を明らかにした. これと Plamondon [Pla11b, Pla11a] の団圏による圏化の結果と y 変数の tropical 化を組み合わせることにより団代数の理論は非常に豊富かつ強力なものになった. ここではその基本的事項についてまとめておこう.

4.1. tropical y 変数

自然な半体の準同形写像 $\pi_{\mathrm{trop}} : \mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y) \to \mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(y)$, $y_i \mapsto y_i$, $\alpha \mapsto 1$ $(\alpha \in \mathbb{Q}_+)$ に対して, 係数 y_i' の像を $[y_i']_{\mathbf{T}} := \pi_{\mathrm{trop}}(y_i')$ と表し, tropical 係数 (tropical coefficient), あるいは tropical y 変数と呼ぶ. ([FZ07] では principal coefficient と呼ばれている.)

定義により, $[y_i']_{\mathbf{T}}$ は初期係数の Laurent 単項式である. また, それらは形式的には (2.3) とまったく同じ交換関係式をみたす. ただし, $\oplus$ は tropical 半体の和 (2.2) である. 後に判明するように (Corollary 4.7) $[y_i']_{\mathbf{T}}$ は常にそのべきが正または負の Laurent 単項式である. 特に, (2.3) において ε を $[y_k']_{\mathbf{T}}$ のべきの符号と一致させると $1 \oplus y_k^{\varepsilon} = 1$ であるので交換関係式は以下の形になる.

$$[y_i']_{\mathbf{T}} = \begin{cases} [y_i]_{\mathbf{T}}^{-1} & i = k \\ [y_i]_{\mathbf{T}}[y_k]_{\mathbf{T}}^{[\varepsilon b_{ki}]_+} & i \neq k \quad (\varepsilon \text{ は } [y_k']_{\mathbf{T}} \text{ のべきの符号}). \end{cases} \tag{4.1}$$

式 (4.1) に現れる項 $[y_k]_{\mathbf{T}}^{[\varepsilon b_{ki}]_+}$ を便宜的に非自明項と呼ぶことにすると, 非自明項は ε と b_{ki} が同符号のときにかぎり寄与する. これを箙で表すと以下のような状況になる: (arrow-sign coordination)

$$\underset{k}{\circledcirc} \longrightarrow \underset{i}{\circ} \quad \varepsilon\text{: positive} \quad \text{or} \quad \underset{k}{\circledcirc} \longleftarrow \underset{i}{\circ} \quad \varepsilon\text{: negative}$$

4.2. F 多項式, C 行列, G 行列

はじめに定理 (公式) を述べよう.

Theorem 4.1 ([FZ07]) 団代数 $\mathcal{A}(B, x, y)$ の各種子 (B', x', y') に対して, ある y の多項式 $F_i'(y)$ $(i \in I)$、整数行列 $C' = (c_{ij}')_{i,j \in I}$ および整数行列 $G' = (g_{ij}')_{i,j \in I}$ が存在して以下がなりたつ.

$$y_i' = \left(\prod_{j \in I} y_j^{c_{ji}'} \right) \prod_{j \in I} F_j'(y_1, \ldots, y_n)_{\oplus}^{b_{ji}'}, \tag{4.2}$$

$$x_i' = \left(\prod_{j \in I} y_j^{g_{ji}'} \right) \frac{F_i'(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)}{F_i'(y_1, \ldots, y_n)_{\oplus}}, \quad \hat{y}_i = y_i \prod_{j \in I} x_j^{b_{ji}}. \tag{4.3}$$

ここで, $F_i'(y_1, \ldots, y_n)_{\oplus}$ は多項式 $F_i'(y_1, \ldots, y_n)$ における和 $+$ を $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ における和 $\oplus$ で形式的に置き換えたものである. ($\hat{y}$ の定義における b_{ji} (=初期行列 B の成分) は b_{ji}' のミスプリントではない.)

以下では, 順に, F_i', C', G' の定義を述べる.

(F 多項式の定義) 各団変数 x_i' に対して, F 多項式 $F_i'(y)$ を以下で定める.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}[x^{\pm}] & & \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}[x^{\pm 1}] & & \\ \cup & & \cup & & \\ \mathcal{A}(B, x, y) & \overset{\pi_{\mathrm{trop}}}{\longrightarrow} & [\mathcal{A}(B, x, y)]_{\mathbf{T}} & \overset{x_1 = \cdots = x_n = 1}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}[y^{\pm 1}] \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ x_i' & \mapsto & [x_i']_{\mathrm{T}} & \mapsto & F_i'(y) \end{array} \tag{4.4}$$

$F'(y)$ が実際に y の多項式であることは後に判明するが, ここではそれについては述べない.

(C 行列の定義) tropical y 変数 $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は初期係数の Laurent 単項式であるから

$$[y'_i]_{\mathbf{T}} = \prod_{j \in I} y_j^{c'_{ji}}, \quad c'_{ji} \in \mathbb{Z} \tag{4.5}$$

と表される. これにより整数行列 $C' = (c'_{ij})_{i,j \in I}$ が定まる.

(G 行列の定義) $\deg : x_i, y_i \mapsto \mathbb{Z}^n$ を以下で定める.

$$\deg\, x_i = \vec{e}_i, \quad \deg\, y_i = -\vec{b}_i, \tag{4.6}$$

ただし, $\vec{e}_i$ は基本単位ベクトル, $\vec{b}_i$ は B の i 列目のなすベクトルとする.

Fact 4.2 $[x'_i]_{\mathbf{T}}$ はこの degree に関して斉次である.

そこで, 行列 G' の i 列目 $\vec{g}'_i$ を $\vec{g}'_i = \deg[x_i]_{\mathbf{T}}$ によって定める.

実は, C 行列と G 行列には後述するような簡単な関係 (Corollary 4.8) がある.

4.3. 圏化

団代数の三角圏による圏化 (2-Calabi-Yau 実現) は, 箙 Q が ADE 型のときに Buan ら [BMR$^+$06] が導入した団圏 (cluser algebra) によって始められ, その後 Keller とその周辺の人々(Fu, Yang, Amiot, Plamondon ら) により一般の Q の場合に順次拡張されてきた. ここでは現時点においてその最も一般の場合である Plamondon [Pla11b, Pla11a] による結果のうち本稿に関連する結果のみを詳しい説明を一切省いて述べる.

任意の箙 Q に対して, Q の principal extension $\tilde{Q}$ とその上のあるポテンシャル W を用いて一般団圏 (generalized cluster category) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(\tilde{Q},W)}$ という三角圏が定まる. このとき, 各団代数の各種子 (B', x', y') に対して $\mathcal{C}$ のある rigid object $T' = \bigoplus_{i \in I} T'_i$ が標準的に定まり, 以下が成り立つ.

Theorem 4.3 ([Pla11b, Pla11a]) $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$ を初期種子 (B, x, y) に対応する rigid object とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\tilde{Q}' = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T') \text{ に付随する箙}, \tag{4.7}$$

$$c'_{ij} = -\mathrm{ind}_{T'}(T_i[1])_j = \mathrm{ind}^{\mathrm{op}}_{T'}(T_i)_j, \tag{4.8}$$

$$g'_{ij} = \mathrm{ind}_T(T'_j)_i, \tag{4.9}$$

$$F'_i(y) = \sum_{e \in \mathbb{Z}^{\tilde{I}}_{\geq 0}} \chi(\mathrm{Gr}_e(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'_i[1]))) \prod_{j \in I} y_j^{e_j}. \tag{4.10}$$

ここで, $\mathrm{Gr}_e(X)$ は X に対する次元ベクトル e の quiver Grassmannian であり, χ はその Euler 数である.

4.4. Theorem 4.3 の系

この節では, 前節の圏化によって得られるいくつかの重要な系について述べる.

Definition 4.4 $\nu : I \to I$ を全単射とし, (B', x', y') を団代数の種子とする. また, I-列 $(k_1, \dots, k_L)$ に対して $(B'', x'', y'') = \mu_{k_L} \cdots \mu_{k_1}(B', x', y')$ とする. このとき, $(k_1, \dots, k_L)$ が (B', x', y') の ν 周期であるとは, 以下が成り立つことである.

$$b''_{\nu(i)\nu(j)} = b'_{ij}, \quad x''_{\nu(i)} = x'_i, \quad y''_{\nu(i)} = y'_i, \quad (i, j \in I). \tag{4.11}$$

以下の tropical y 変数による団代数の周期性の判定条件はまことに強力である.

Corollary 4.5 ([Pla11a, IIK$^+$10a]) $(k_1, \dots, k_L)$ が (B', x', y') の ν 周期であるための必要十分条件以下で与えられる.

$$[y''_{\nu(i)}]_{\mathbf{T}} = [y'_i]_{\mathbf{T}} \quad (i \in I).$$

すなわち, 団代数の種子の周期性は, tropical y 変数の周期性から従う.

つぎに, F 多項式および y 変数に関する系を与える.

Corollary 4.6 ([Pla11a]) (1) F 多項式の定数項は 1 である.

(2) C 行列の各列のすべての成分は sign-coherent (異符号を含まない) でありかつ 0 ベクトルではない.

なお, この定理の別証明は [DWZ10, Nag10] により与えられている.

Corollary 4.6 と Theorem 4.1 を組み合わせてさらに以下が得られる.

Corollary 4.7 y'_i は初期係数 y に関する Laurent 展開が可能であり, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ はその主要項を与える. さらに, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は正または負のベキの単項式になる.

Corollary 4.6 よりさらに以下の C 行列と G 行列の関係が得られる.

Corollary 4.8 ([Nak11b]) C' の転置 C'^{T} と G' は互いに逆行列である.

5. 応用 1. Y-system の周期性

団代数の特筆すべき応用として, 90 年代に可積分系の研究から生まれ未解決であった Y-system の周期性予想の証明が得られる.

X を有限型 (すなわち A, ..., G 型) の Dynkin 図形とし, ℓ を 2 以上の整数とする. 変数の集合 $T = (T^{(a)}_m(u))$, $Y = (Y^{(a)}_m(u))$ がそれぞれレベル ℓ の X 型 T-system と Y-system を満たすとする. このとき, Corollay 4.7 にしたがい, 対応する団代数の tropical y 変数の周期性を示すことにより以下の周期性が得られる.

Theorem 5.1 ([IIK$^+$10a, IIK$^+$10b])

$$T^{(a)}_m(u + t(h^\vee + \ell)) = T^{(a)}_m(u), \tag{5.1}$$

$$Y^{(a)}_m(u + t(h^\vee + \ell)) = Y^{(a)}_m(u). \tag{5.2}$$

ただし, $h^\vee$ は X の dual Coxeter 数, また t は X の段数 (tier number), すなわち, ADE 型に対しては $t = 1$, BCF 型に対しては $t = 2$, G 型に対しては $t = 3$ である.

Remark 5.2 上の周期はスペクトル変数 u の正規化の仕方に依存する. ここでは, T-system および Y-system の左辺が a が短ルートのとき常に (3.4), (3.2) の形となるように正規化をしている.

以下ではこの定理の背景と証明の発展について主に講演者自身の研究の経緯の観点から概観する．

Al. B. Zamolodchikov [Zam90, Zam91] は, 共形場理論の変形の観点から ADE に付随する可積分 S 行列模型の熱力学的極限の研究を行い, TBA 方程式の解のみたす関数方程式としてレベル 2 の ADE 型 Y-system の導入にいたったことはすでに述べた通りである. さらに, Zamolodchikov は, その Y-system の解が (5.2) の周期性を持つことに気づき (正確には予想を与え) , それにより共形場理論の摂動場の共形次元が得られることを示した. この一般化として, Ravanini 等 [RTV93] は ADE で一般の ℓ の場合に, さらに Kuniba 等 [KNS94] は nonsimply laced の場合に (5.2) を拡張し, これらは「Y-system の周期性予想」として知られるようになった．一方, Gliozzi-Tateo [GT95] はこの周期性と 80 年代後半に Kirillov 等 [KR86, Kir89, KR90, BR90, Kun93] により定式化された「共形場理論の中心荷電に対する dilogarithm 恒等式予想」との関連を明らかにした.

さて、(5.2) は Y-system を u に関する離散発展方程式とみた場合に, その初期条件として具体的な数値計算例より計算機でその有効性は確認することができる．しかし, 周期性の証明はその問題の単純性とは逆に大変難しい問題であることも次第に明らかになった．その中で A 型の場合はさまざまなアイデアを用いて解の具体形表式を与えることができ, $X = A_1$ に対しては, Frenkel-Szenes [FS95] および Gliozzi-Tateo [GT96] が, また, $X = A_n$ に対して Volkov [Vol07] と Szenes [Sze09] が (5.2) を証明した．以上をまとめると, Y-system とその周期性は共形場理論とその摂動の間の定量的な関係を与える上で一つの中心的な役割を果たすことが明らかになっていたが, その数学的な枠組みについては「量子群および Bethe 仮説と関係が深い」という認識にとどまっていた.

一方, Fomin-Zelevinsky は団代数の導入と平行して, レベル 2 の ADE 型 Y-system を団代数の観点から始めて研究し, (5.2) を証明した [FZ03b]. その後しばらくおいて, Keller [Kel10a, Kel10b] は団圏による圏化の応用として, Auslander-Reiten 理論における AR-translation と関連づけることにより (一般レベルの) ADE 型 Y-system の周期性を証明するに至った．これにより, 団代数と Y-system の関連の重要性が決定的となった．これに比して T-system と団代数との関係の認識はやや遅れていたが Q-system と団代数との関連が [DK09] により指摘されて以降急速に認識が進み [IIK$^+$10c, HL10, Nak09], Inoue 等 [IIK$^+$10c] は T-system においても周期性 (5.1) が成り立つことの予想を指摘し, [Kel10a] の方法を適用し, ADE 型 T-system の場合に (5.1) を証明した．以上の発展を踏まえて, Inoue 等 [IIK$^+$10a, IIK$^+$10b] は, tropical y 変数の周期性に帰着させる方法 (Corollay 4.7) によりあらたに nonsimply laced の場合も含めて Theorem 5.1 の統一的方法による証明を与えた.

なお, 同様の団代数の手法により, Tateo [Tat95] による sine-Gordon 模型に付随する Y-system の周期性予想の一部が証明されている [NT10]．また, (5.1) は A 型については Volkov [Vol07] と Henriquez [Hen07] による団代数を用いない (解の explicit な表示による) 証明もある.

6. 応用 2. 古典および量子 dilogarithm 恒等式

ここでは団代数の第二の応用として, 団代数およびその量子化（非可換化）である量子団代数の周期に付随する dilogarithm 恒等式およびその量子化が得られることを説明する.

6.1. pentagon 関係式

はじめに, dilogarithm 関係式のひな形であり最も重要な例である pentagon 関係式とその量子化について述べる.

$\mathrm{Li}_2(x)$ および $L(x)$ をそれぞれ以下で定まる Euler dilogarithm および Rogers dilogarithm とする [Lew81, Kir95, Zag07].

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} \right\} dy \quad (x \le 1), \tag{6.1}$$

$$L(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} + \frac{\log y}{1-y} \right\} dy \quad (0 \le x \le 1). \tag{6.2}$$

二つの関数は以下のように関係している.

$$L(x) = \mathrm{Li}_2(x) + \frac{1}{2} \log x \log(1-x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{6.3}$$

$$-L\left(\frac{x}{1+x}\right) = \mathrm{Li}_2(-x) + \frac{1}{2} \log x \log(1+x) \quad (0 \le x). \tag{6.4}$$

この関数の最も重要な性質は pentagon 関係式である. たとえば $L(x)$ に関しては以下のような形をしている.

$$L(x) + L(y) = L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) + L(xy) + L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right) \quad (0 \le x, y \le 1). \tag{6.5}$$

一方, 量子 dilogarithm 関数は近年さまざまな分野に現れ注目を集めている. 例えば離散量子系, 双曲幾何と Teichmüller 理論, 量子トポロジー, Donaldson-Thomas 不変量, 弦理論, 多元環の表現論, などがあげられる.

[FV93, FK94] にしたがい, 量子 dilogarithm $\mathbf{\Psi}_q(x)$ ($|q| < 1$ and $x \in \mathbb{C}$) を以下で定める.

$$\mathbf{\Psi}_q(x) := \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k+1} x)^{-1}. \tag{6.6}$$

この関数の「量子指数関数」としての研究は [Sch53] に遡るが, 「量子 dilogarithm」としての認識は最近のもの [FV93, FK94] である. これを dilogarithm の量子類似と考える理由は以下の二つの性質にある [FV93, FK94, Kas04].

(a). 漸近挙動: 極限 $q \to 1^-$ において,

$$\mathbf{\Psi}_q(x) \sim \exp\left(-\frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{2 \log q}\right). \tag{6.7}$$

(b). Pentagon 関係式: $UV = q^2 VU$ をみたす変数 U, V に対して,

$$\mathbf{\Psi}_q(U)\mathbf{\Psi}_q(V) = \mathbf{\Psi}_q(V)\mathbf{\Psi}_q(q^{-1}UV)\mathbf{\Psi}_q(U). \tag{6.8}$$

さらに, 極限 $q \to 1^-$ において, 関係式 (6.8) は関係式 (6.5) に退化する.

(6.7) に現れるのは Euler dilogarithm にも関わらず (6.8) の極限として (6.5) には Rogers dilogarithm が現れることに注意したい. すなわち (6.8) の極限は項別極限のような自明なものではなく, U, V の非可換性が「手品のように」$\mathrm{Li}_2(x)$ を $L(x)$ に変えるのである. 後でみるように, 団代数は（はるかに広汎な状況において）この現象がどのようにおこるかの明解な説明を与えてくれる.

Remark 6.1 Faddeev [Fad96, Fad95] は量子 dilogarithm の変種として以下のような関数を導入した.

$$\mathbf{\Phi}_b(z) = \exp\left(-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2zx\sqrt{-1}}}{\sinh(xb)\sinh(x/b)}\frac{dx}{x}\right), \tag{6.9}$$

ただし, b は実部が 0 でない複素パラメーターである. これを Faddeev 量子 dilogarithm と呼ぶ. (非コンパクト量子 dilogarithm とも呼ばれる.) 関数 $\mathbf{\Phi}_b(z)$ に対しても (6.7), (6.8) および次節における結果とパラレルな結果が成立することが知られている [Fad96, Fad95, Wor00, FKV01, KN11]. 関数 $\mathbf{\Phi}_b(z)$ は, 絡み目不変量や 3 次元の双曲体積などへ重要な応用を持つ [Kas97].

6.2. 団代数と dilogarithm 恒等式

前節で述べた古典 pentagon 関係式と量子 pentagon 関係式の間の関係は団代数による広汎な一般化を持つことが最近明らかにされた [Nak11b, Kel11, KN11]. これをまとめたのが以下の図式である.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{量子団代数の周期}} \arrow[r, "\text{(III)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{(II)}"'] & \boxed{\text{量子 dilogarithm 恒等式}} \arrow[d, "\text{(IV)}"] \\
\boxed{\text{古典団代数の周期}} \arrow[r, "\text{(I)}"] & \boxed{\text{古典 dilogarithm 恒等式}}
\end{tikzcd}$$

特に A_2 型の長さ 5 の (12) 周期の場合が前節の pentagon 関係式を与える.
以下では矢印 (I), (II), (III), (IV) の意味の説明をする.

(I) 古典団代数の周期 $\Longrightarrow$ 古典 dilogarithm 恒等式

この部分は [Nak11b] による. $(k_1, \dots, k_L)$ を (B, y) の ν 周期として, x 変数を忘れた以下のような y 種子の変異の列

$$(B(1), y(1)) \overset{\mu_{k_1}}{\longleftrightarrow} (B(2), y(2)) \overset{\mu_{k_2}}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{\mu_{k_L}}{\longleftrightarrow} (B(L+1), y(L+1)). \tag{6.10}$$

を考える. ただし, $(B(1), y(1)) = (B, y)$ とする. ε_t を $[y_{k_t}(t)]$ のべきの符号 (Corollary 4.6) とする. 符号の列 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L)$ を tropical 符号列と呼ぶ. 以下の定理は共形場理論の中心荷電等式 [Kir89, KR90, BR90, Kun93] に端を発した dilogarithm 恒等式 [GT95, GT96, FS95, Cha05, Nak11a, IIK$^+$10a, IIK$^+$10b, NT10] の団代数による一般化である.

Theorem 6.2 (古典 dilogarithm 恒等式 [Nak11b])

$$\sum_{t=1}^{L} \varepsilon_t L\left(\frac{y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}{1 + y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}\right) = 0. \tag{6.11}$$

Remark 6.3 恒等式 (6.11) において, $[y_{k_t}(t)]_{\mathbf{T}}$ $(t = 1, \dots, L)$ のうちべきが負のもの全体の個数を N_- とおく. すると, Rogers dilogarithm の恒等式

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad (0 \le x \le 1) \tag{6.12}$$

により恒等式 (6.11) は次の恒等式と等価になる [Nak11b].

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{t=1}^{L} L\left(\frac{y_{k_t}(t)}{1+y_{k_t}(t)}\right) = N_-. \tag{6.13}$$

(II) 古典団代数の周期 $\Longleftrightarrow$ 量子団代数の周期

この部分は主に [FG09c] による．団代数の非可換化である量子団代数は現在のところ二つの定式化がある．第一は [BZ05] によるもので x 変数, y 変数がともに非可換であるが, y 変数が tropical 化されているものである．第二は [FG09a, FG09c] によるもので y 変数のみが非可換である．ここでは後者の量子団代数で y 変数のみの場合を考える．

反対称行列 $B=(b_{ij})_{i,j\in I}$ と非可換な形式的変数の組 $Y=(Y_i)_{i\in I}$ で

$$Y_iY_j = q^{2b_{ji}}Y_jY_i \tag{6.14}$$

をみたすとする．ペア (B,Y) を量子 y 初期種子という．これに対して, 古典 (非可換) 団代数と同様に, 変異を繰り返すことにより一般の y 種子 (B',Y') が得られる．ただし, 量子 y 変数の交換関係式は以下で与えられる．

$$Y''_i = \begin{cases} Y'^{-1}_k & i=k \\ q^{b'_{ik}[\varepsilon b'_{ki}]_+}Y'_iY'^{[\varepsilon b'_{ki}]_+}_k \displaystyle\prod_{m=1}^{|b'_{ki}|}(1+q^{-\varepsilon \mathrm{sgn}(b'_{ki})(2m-1)}Y'^{\varepsilon}_k)^{-\mathrm{sgn}(b'_{ki})} & i\neq k. \end{cases} \tag{6.15}$$

ここで $q=1$ とおけば, これは古典的な交換関係式 (2.3) に還元することに注意する．

量子 y 種子に対しても, Definition 4.4 と同様に ν 周期が定義できる．量子 y 種子の ν 周期が古典 y 種子の周期となることは先の注意から明らかであるが, その逆も成り立つ．

Proposition 6.4 ([BFZ05, FG09c, Kel11, KN11]) 古典 y 種子 (B',y') の周期は量子 y 種子 (B',Y') の周期である．

(III) 量子団代数の周期 $\Longrightarrow$ 量子 dilogarithm 恒等式

この部分は [Kel11, KN11] による．はじめに, 生成元 Y^α $(\alpha\in(\mathbb{Z}^I)$ と関係式

$$q^{\langle\alpha,\beta\rangle}\mathsf{Y}^\alpha\mathsf{Y}^\beta=\mathsf{Y}^{\alpha+\beta},\quad \langle\alpha,\beta\rangle=-\langle\beta,\alpha\rangle={}^t\alpha B\beta. \tag{6.16}$$

で定まる $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数 (量子トーラス代数) $\mathbb{T}(B,\mathsf{Y})$ を考える．単位ベクトル e_i $(i\in I)$ に対して $\mathsf{Y}_i:=\mathsf{Y}^{e_i}$ とおけば, Y_i と Y_i を同一視することにより (6.14) が得られる．

$(k_1,\dots,k_L)$ を量子 y 種子 (B,Y) の ν 周期とする．$y_i(t)$ を対応する古典 y 種子 (6.10) における古典 y 変数とし, 整数ベクトル $\alpha_t\in\mathbb{Z}^I$ $(t=1,\dots,L)$ を $[y_{k_t}(t)]=y^{\alpha_t}$ で定まるものとする．すなわち, α_t は $y_{k_t}(t)$ に対する C 行列 (4.5) の第 k_t 列に他ならない．$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_L)$ を (6.10) の tropical 符号列とする．

以下の形の量子 dilogarithm 恒等式は [Kel11, Theorem 5.6] によるものである．A 型のある特別な周期については表現論の手法を用いて得られる [Rei09]．また, Donaldson-Thomas 不変量の壁越えの観点からも同じ恒等式が得られる [Nag11, Comments (a), p.5].

Theorem 6.5 (量子 dilogarithm 恒等式の tropical 形 [Kel11])

$$\mathbf{\Psi}_q(\mathsf{Y}^{\varepsilon_1\alpha_1})^{\varepsilon_1}\cdots\mathbf{\Psi}_q(\mathsf{Y}^{\varepsilon_L\alpha_L})^{\varepsilon_L}=1. \tag{6.17}$$

ただし, $\mathsf{Y}^{\varepsilon_1\alpha_1},\dots,\mathsf{Y}^{\varepsilon_L\alpha_L}\in\mathbb{T}(B,\mathsf{Y})$.

なお, [KN11] においては, これ以外にも量子 dilogarithm $\mathbf{\Psi}_q(x)$ に関する恒等式の普遍形, 局所形, Faddeev 量子 dilogarithm $\mathbf{\Phi}_b(z)$ に関する恒等式の tropical 形, 局所形, などの, 量子 dilogarithm 恒等式の (本質的に同値な) さまざまな形が団代数を用いて系統的に得られている.

(IV) 量子 dilogarithm 恒等式 $\Longrightarrow$ 古典 dilogarithm 恒等式

この部分は [KN11] による. Faddeev-Kashaev [FK94] は, 量子 pentagon 関係式 (6.8) に対して変数 U, V が Weyl 代数 (Heisenberg 代数の指数版) をみたすことに注目して, U, V の微分作用素表示 (Heisenberg 表現) を用い, そこで量子学的な手法, 特に半古典極限における鞍点法 (saddle point mathod) を適用し, 古典 pentagon 関係式 (6.5) を導いた. しかし, 一般の場合にこの手法を踏襲するには二つの (技術的な) 問題点がある. 第一は, 一般の量子 dilogarithm 関係式 (6.17) に対する tropical 単項式 $Y^{\epsilon_t\alpha_t}$ は大変複雑になり, しかもそもそもその明示的な公式が存在しない. したがって, この作用素表示を具体的に与えることができない. 第二は, 半古典極限において Euler dilogarithm から Rogers dilogarithm を導く過程の見通しが悪い. この二つの問題は, Fock-Goncharov [FG09c, FG09b] による量子 y 変数の微分作用素表現を用いて, いったん量子 dilogarithm 関係式 (6.17) を tropical 単項式 $Y^{\epsilon_t\alpha_t}$ を含まない形（[KN11] において「局所形 (local form)」と呼ばれるもの) に書き換えることで同時に解決される. 詳細は [KN11] を見られたい.

6.3. 共形場理論における中心荷電等式

最後に, 団代数のさらなる応用として, Y-system の周期性 (Theorem 5.1) と古典 dilogarithm 恒等式 (特に (6.13) の形) を合わせて, 20 年来未解決であった共形場理論における中心荷電等式予想 [Kir89, KR90, BR90, Kun93] の証明が得られることを述べる [Nak11a, IIK+10a, IIK+10b].

簡単のため ADE 型の Dynkin 図 X に対する場合を考える. ℓ を 2 以上の整数とする. ペア (X,ℓ) に対して, 変数の族

$$\{Y_m^{(a)}\mid a\in I; m=1,\dots,\ell-1\} \tag{6.18}$$

に対する以下の関数方程式系をレベル ℓ の X 型定常 (constant) Y-system という.

$$(Y_m^{(a)})^2=\frac{\prod_{b\in I,b\sim a}(1+Y_m^{(b)})}{(1+Y_{m-1}^{(a)}{}^{-1})(1+Y_{m+1}^{(a)}{}^{-1})}, \tag{6.19}$$

ただし, $Y_0^{(a)-1}=Y_\ell^{(a)-1}=0$ とする. すなわち, これは Y-system (3.2) において「変数 $Y_m^{(a)}(u)$ は u に対して定常的である」という条件を加えたものである. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 6.6 ([NK09]) 方程式 (6.19) に対して, 正の実数解が一意的に存在する.

以下では$Y_m^{(a)}$たちをこの定理により一意的に定まる(6.19)の正の実数解とする．

さて, Theorem 5.1でみたようにY-systemは周期$2(h^\vee+\ell)$を持つが, これは対応する団代数の周期から得られるのであった．この団代数の周期に付随する古典dilogatihm恒等式(特に(6.13)の形)を考える, これに対してN_-を具体的に求めることが可能で, さらに, 得られた式を定常Y-systemの解へと特殊化することで以下の等式が得られる．

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{a\in I}\sum_{m=1}^{\ell-1} L\left(\frac{Y_m^{(a)}}{1+Y_m^{(a)}}\right)=\frac{(\ell-1)hn}{h+\ell}. \tag{6.20}$$

ただし, hはXのCoxeter数, また$n=|I|$, すなわちnはXの頂点の数である．(XはADEなので$h=h^\vee$である.) ここで, $\mathfrak{g}$をX型の単純Lie代数とすると, 良く知られているように$\dim\mathfrak{g}=n(h+1)$であり, これを用いて(6.20)の右辺を書き直すと以下の等式が得られる．

Theorem 6.7 ([Nak11a])

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{a\in I}\sum_{m=1}^{\ell-1} L\left(\frac{Y_m^{(a)}}{1+Y_m^{(a)}}\right)=\frac{\ell\dim\mathfrak{g}}{h+\ell}-n. \tag{6.21}$$

これが, Kirillovらによる中心荷電等式予想であった．(6.21)の右辺の第1項は, レベルℓのX型Wess-Zumono-Witten模型の中心荷電であり, 右辺全体はレベルℓのX型パラフェルミオン模型の中心荷電である．この等式を用いて, 共形場理論とその変形である可積分模型の間の定量的な関係を与えることができるのある．このことの重要性と等式の不思議さに鑑み, 90年代には多くの研究者がさまざまな方法でこの等式(とその仲間)を理解し証明することを試みたが部分的にしか成功をしなかった(例えば[Nah07]を参照). この等式の背景に「団代数」という構造があることを当時は知る由もなかったのである．

7. おわりに

本稿では, 団代数と可積分系のかかわりとして, とくに, Y-systemの周期性と付随する古典および量子dilogarithm恒等式への応用を述べた．これは, この問題に対して団代数の関与が不可欠であったという点において特筆すべき応用だと考える．しながら, これは団代数と可積分系の関連のある側面にすぎず, 今後研究すべき重要な課題は多々あるであろう．その一つとして, ここではソリトン方程式の離散化であるような方程式の団代数の定式化による研究をあげておこう．そのような研究はすでにA型の離散Toda方程式[GSV11]や離散Lotka-Voltera方程式[IN10]で始められている．団代数の定式化によるメリットは少なくとも二つある．第一は, 団代数にはPoisson構造が自動的に組み込まれていることである[GSV03, GSV10, FG09a]. 第二は, たとえばA型の離散Toda方程式はA型特有の双線形性を利用してすでに多くの結果が知られているが, 団代数の観点からは双線形性は必ずしも重要な条件ではない．したがって, 団代数による定式化は双線形性を持たないより広汎な離散方程式の可積分性に対して知見を与えることが期待できる．

最後に個人的な見方ではあるが, Y-systemの周期性予想およびdilogarithm恒等式予想が解決された当初においては, それらに対して団代数の定式化が強力な道具として寄与をしたという印象をもっていた．しかし, その後dilogarithm恒等式がより一般の団代数の周期に付随するという理解を得たことにより, むしろ, これらの予想が団代数の周期現象の重要性の認識とその非自明な例の発見を与えることに寄与をした, という逆の見方のウエイトが高まった．この観点を指摘して本稿の結語としたい．

参考文献

[Ami09] C. Amiot, *Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential*, Annales de l'Institut Fourier **104** (2009), 2525–2590; arXiv:0805.1035 [math.RT].

[BFZ05] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52; arXiv:math/035434 [math.RT].

[BMR$^+$06] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. in Math. **204** (2006), 572–618; arXiv:math/0402054 [math.RT].

[BR90] V. V. Bazhanov and N. Yu. Reshetikhin, *Restricted solid-on-solid models connected with simply laced algebras and conformal field theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 1477–1492.

[BZ05] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. in Math. **195** (2005), 405–455; arXiv:math.QA/0404446.

[Cha05] F. Chapoton, *Functional identities for the Rogers dilogarithm associated to cluster Y-systems*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 755–760.

[DK09] P. Di Francesco and R. Kedem, *Q-systems as cluster algebras II: Cartan matrix of finite type and the polynomial property*, Lett. Math. Phys. **89** (2009), 183–216; arXiv:0803.0362 [math.RT].

[DWZ08] H. Derksen, J. Weyman, and A. Zelevinsky, *Quivers with potentials and their representations I: Mutations*, Selecta Math. **14** (2008), 59–119; arXiv:0704.0649 [math.RA].

[DWZ10] ———, *Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 749–790; arXiv:0904.0676 [math.RA].

[Fad95] L. D. Faddeev, *Discrete Hisenberg-Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys. **34** (1995), 249–254; arXiv:hep–th/9504111.

[Fad96] ———, *Current-like variables in massive and massless integrable models*, Quantum groups and their applications in physics (Amsterdam) (L. Castellani and J. Wess, eds.), IOS Press, 1996, pp. 117–135; arXiv:hep–th/9408041.

[FG07] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichüller theory, Vol. I, Eur. Math. Soc., 2007, pp. 647–684, arXiv:math/0510312 [math.DG].

[FG09a] ———, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Annales Sci. de l'École Norm. Sup. **42** (2009), 865–930; arXiv:math/0311245 [math.AG].

[FG09b] ———, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm II: The intertwiner*, Prog. Math. **269** (2009), 655–673; arXiv:math.0702398.

[FG09c] ———, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **172** (2009), 223–286; arXiv:math/0702397 [math.QA].

[FK94] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A9** (94), 427–434; arXiv:hep–th/9310070.

[FKV01] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, and A. Yu. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality*, Commun. Math. Phys. **219** (2001), 199–219, arXiv:hep–th/0006156.

[FR99] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras*, Contemp. Math. **248** (1999), 168–205; arXiv:math/9810055 [math.QA].

[FS95] E. Frenkel and A. Szenes, *Thermodynamic Bethe ansatz and dilogarithm identities. I*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 677–693; arXiv:hep–th/9506215.

[FV93] L. D. Faddeev and A. Yu. Volkov, *Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice*, Phys. Lett. **315** (1993), 311–318; arXiv:hep–th/9307048.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].

[FZ03a] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].

[FZ03b] ———, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. **158** (2003), 977–1018; arXiv:hep–th/0111053.

[FZ07] ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].

[Gin06] V. Ginzburg, *Calabi-Yau algebras*, 2006, arXiv:math/0612139 [math.AG].

[GSV03] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*, Moskov Math. J. **3** (2003), 899–934; arXiv:math0208033 [math.QA].

[GSV10] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, no. 167, American Mathematical Society, 2010.

[GSV11] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A Vainshtein, *Generalized Bäcklund-Darboux transformations for Coxeter-Toda flows from a cluster algebra perspective*, Acta Math. **206** (2011), 245–310; arXiv:0906.1364 [math.QA].

[GT95] F. Gliozzi and R. Tateo, *ADE functional dilogarithm identities and integrable models*, Phys. Lett. **B348** (1995), 677–693; arXiv:hep–th/9411203.

[GT96] F. Gliozzi and R. Tateo, *Thermodynamic Bethe ansatz and three-fold triangulations*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996), 4051–4064; arXiv:hep–th/9505102.

[Hen07] A. Henriques, *A periodicity theorem for the octahedron recurrence*, J. Alg. Combin. **26** (2007), 1–26; arXiv:math/0604289 [math.CO].

[Her06] D. Hernandez, *The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems*, J. Reine Angew. Math. (2006), 63–87; arXiv:math/0501202 [math.QA].

[Her07] ———, *Drinfeld coproduct, quantum fusion tensor category and applications*, Proc. London Math. Soc. **95** (2007), 567–608; arXiv:math/0504269 [math.QA].

[HL10] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), 265–341, arXiv:0903.1452 [math.QA].

[IIK+10a] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, and T. Nakanishi, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r*, 2010, arXiv:1001.1880 [math.QA], to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[IIK+10b] ———, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types C_r, F_4, and G_2*, 2010, arXiv:1001.1881 [math.QA], to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[IIK+10c] R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki, *Periodicities of T and Y-systems*, Nagoya Math. J. **197** (2010), 59–174; arXiv:0812.0667 [math.QA].

[IN10] R Inoue and T. Nakanishi, *Difference equations and cluster algebras I: Poisson bracket for integrable difference equations*, 2010, arXiv:1012.5574 [math.QA], to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.

[IY08] O. Iyama and Y. Yoshino, *Mutation in triangulated categories and rigid cohen-macaulay modules*, Invent. Math. **172** (2008), 117–168; arXiv:math/0607736 [math.RT].

[Kas97] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** (1997), 269–275; arXiv:q–alg/9601025.

[Kas04] ———, *The q-binomial formula and the Rogers dilogarithm identity*, 2004, arXiv:math.040708 [math.QA].

[Kel10a] B. Keller, *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories*, Triangulated categories (T. Holm, P. Jørgensen, and R. Rouquier, eds.), Lecture Note Series, vol. 375, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2010, pp. 76–160; arXiv:0807.1960 [math.RT].

[Kel10b] ———, *The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams*, 2010, arXiv:1001.1531 [math.RT].

[Kel11] B. Keller, *On cluster theory and quantum dilogarithm identities*, Representations of algebras and related topics (A. Skowroński and K. Yamagata, eds.), EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society, 2011, pp. 85–116; arXiv:1102.4148 [math.RT].

[Kir89] A. N. Kirillov, *Identities for the Rogers dilogarithm function connected with simple Lie algebras*, J. Sov. Math. **47** (1989), 2450–2458.

[Kir95] ———, *Dilogarithm identities*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 61–142; arXiv:hep–th/9408113.

[KN92] A. Kuniba and T. Nakanishi, *Spectra in conformal field theories from the Rogers dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992), 3487–3494; arXiv:hep–th/9206034.

[KN11] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, SIGMA **7** (2011), 102, 29 pages, arXiv:1104.4630 [math.QA].

[KNS94] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki, *Functional relations in solvable lattice models: I. Functional relations and representation theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994), 5215–5266; arXiv:hep–th/9309137.

[KNS09] ———, *T-systems and Y-systems for quantum affinizations of quantum Kac-Moody algebras*, SIGMA **5** (2009), 108, 23 pages; arXiv:0909.4618 [math.QA].

[KR86] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Exact solution of the Heisenberg XXZ model of spin s*, J. Sov. Math. **35** (1986), 2627–2643.

[KR90] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras,*, J. Sov. Math. **52** (1990), 3156–3164.

[KS08] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Stability structures, Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, 2008, arXiv:0811.2435 [math.AG].

[Kun93] A. Kuniba, *Thermodynamics of the $U_q(X_r^{(1)})$ Bethe ansatz system with q a root of unity*, Nucl. Phys. **B389** (1993), 209–244.

[Lew81] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[Nag10] K. Nagao, *Donaldson-Thomas theory and cluster algebras*, 2010, arXiv:1002.4884 [math.AG].

[Nag11] ———, *Wall-crossing of the motivic Donaldson-thomas invariants*, 2011, arXiv:1103.2922 [math.AG].

[Nah07] W. Nahm, *Conformal field theory and torsion elements of the Bloch group*, Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 3–65, arXiv:hep–th/0404120.

[Nak03] H. Nakajima, *t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7** (2003), 259–274; arXiv:math/0204185 [math.QA].

[Nak09] H. Nakajima, *Quiver varieties and cluster algebras*, 2009, arXiv:0905.0002.

[Nak10a] T. Nakanishi, *T-systems and Y-systems, and cluster algebras: Tamely laced case*, Proceedings of the Infinite Analysis 09, New Trends in Quantum Integrable Systems (Singapore) (et al. Feigin, B. L., ed.), World Scientific, 2010, pp. 325–355; arXiv:1003.1180 [math.QA].

[Nak10b] Tomoki Nakanishi, *Dilogarithm identities and cluster algebras*, 2010, 第 55 回代数学シンポジウム報告集 (in Japanese), http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/100809/pdf/nakanishi.pdf.

[Nak10c] ———, *Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras*, RIMS Kokyuroku **1714** (2010), 26–31, (in Japanese).

[Nak11a] T. Nakanishi, *Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: Simply laced case*, Nagoya Math. J. **202** (2011), 23–43; arXiv:math.0909.5480 [math.QA].

[Nak11b] ———, *Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities*, Representations of algebras and related topics (A. Skowroński and K. Yamagata, eds.), EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society, 2011, pp. 407–444; arXiv:1006.0632 [math.QA].

[NK09] W. Nahm and S. Keegan, *Integrable deformations of CFTs and the discrete Hirota equations*, 2009, arXiv:0905.3776 [hep-th].

[NT10] T. Nakanishi and R. Tateo, *Dilogarithm identities for sine-Gordon and reduced sine-Gordon Y-systems*, SIGMA **6** (2010), 085, 34 pages; arXiv:1005.4199 [math.QA].

[NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226, arXiv:1101.3736 [math.RA].

[Pla11a] P. Plamondon, *Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, Compos. Math. **147** (2011), 1921–1954, arXiv:1004.0830 [math.RT].

[Pla11b] ———, *Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, Adv. in Math. **227** (2011), 1–39; arXiv:1002.4956 [math.RT].

[Rei09] M. Reineke, *Poisson automorphisms and quiver moduli*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2009), 653–667, arXiv:0804.3214 [math.RT].

[RTV93] R. Ravanini, R. Tateo, and A. Valleriani, *Dynkin TBA's*, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993), 1707–1727; arXiv:hep–th/9207040.

[Sch53] M. P. Schützenberger, *Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle $F(x+y) = F(x)F(y)$*, C. R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 352–353.

[Sze09] A. Szenes, *Periodicity of Y-systems and flat connections*, Lett. Math. Phys. **89** (2009), 217–230; arXiv:math/0606377 [math.RT].

[Tat95] R. Tateo, *New functional dilogarithm identities and sine-Gordon Y-systems*, Phys. Lett. **B355** (1995), 157–164; arXiv:hep–th/9505022.

[Vol07] A. Y. Volkov, *On the periodicity conjecture for Y-systems*, Commun. Math. Phys. **276** (2007), 509–517; arXiv:hep–th/0606094.

[Wor00] S. L. Woronowicz, *Quantum exponential function*, Rev. Math. Phys. **12** (2000), 873–920.

[Zag07] D. Zagier, *The dilogarithm function*, Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 3–65.

[Zam90] Al.B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models. scaling 3-state Potts and Lee-Yang models*, Nucl. Phys. **B342** (1990), 695–720.

[Zam91] Al. B. Zamolodchikov, *On the thermodynamic Bethe ansatz equations for reflectionless ADE scattering theories*, Phys. Lett. **B253** (1991), 391–394.