

特集 / 団代数をめぐる

団代数とは何か

(数理科学 Vol.53-3 (2015), pp.5-6, サイエンス社, 著者最終稿)

中西 知樹

本特集の主題である団代数 (cluster algebra) とは, Fomin と Zelevinsky が 2000 年頃に導入したある種の可換代数のクラスである. 団代数には団変数と呼ばれるある特別な生成元が存在し, それらが「変異 (mutation)」と呼ばれる関係式 (あるいは漸化式) で互いに結びついている, という際立った特徴がある. このような概念は Lie 理論においてさまざまな文脈で現れる代数的・組み合わせ論的構造 (例えば, Grassmannian の Plücker 座標や Lie 群の座標環における関係式) を「Laurent 性」という共通の性質に着目して統合化・一般化したものであり, これにより Lie 群や量子群における組み合わせ論的構造や現象のより包括的な理解を得ようというのが団代数の導入のもともとの動機であったものと思われる.

団代数に最初に注目したのは多元環の表現論の研究者たちであった. かれらは団代数における変異と, 多元環の Auslander-Reiten 理論に現れる変異との顕著な類似性に注目し, その結果, Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov たちは, ADE 型と呼ばれる団代数に対して多元環の表現による圏化を与えるに至った. これは 2004 年ごろのことである. これを契機に, その後多元環の表現論と団代数は互いに関連しながら飛躍的な進展を遂げ, 現在でも蜜月の関係が続いている.

一方, やはり 00 年代前半に, Gekhtman, Shapiro,

Vainshtein たちは離散力学系の Poisson 構造の立場から, また, Fock と Goncharov は Teichmüller 理論の立場から, それぞれ Fomin と Zelevinsky の仕事の影響を受けつつも, 本質的には独立に団代数の変異の概念に到達したことは意義深い.

ところで, 日本においては, 少なくとも 00 年代の終わり頃までは (多元環論の一部の研究者を除いては) このような潮流の影響をほとんど受けなかったように思われる. 例えば, 私自身が団代数を初めて認識したのは 08 年 3 月に参加したパークレーの数理科学研究所 (MSRI) における Lie 理論の研究集会のことであった. ここでは, 「cluster algebra」をタイトルに含む講演が五つほどあり, 当初プログラムを見て「cluster algebra とは何ぞや」と思ったものであった. しかしながら, 研究集会冒頭の Fomin による基調講演を聞くや否や, それが私が 90 年代から研究を続けていた可積分系における T 系や Y 系といった代数関係式と本質的に同じものであることを認識した. そして, それをきっかけに, 現在まで団代数とその応用の研究を続けるに至っている.

実は, このような団代数の研究を始めるいきさつはどうか私だけの特別なものではないようで, 08 年 12 月にメキシコで私自身としては初めて団代数をテーマにした研究集会に参加したとき, 当時すでに団代数について多くの論文を書いていた

Jan Schröer 氏に「I am a newcomer in cluster algebras」と自己紹介して上の経緯を話したところ「Oh, I had exactly the same experience.」と言われ、さらに「Everyone is a newcomer!」と言われてずいぶんと気が楽になったことを良く覚えている。つまり（少なくとも当時は）はじめから団代数の専門家という人はなく、皆それぞれの分野において「このようなことは私は見た事がある」あるいは「私は昔から良く知っている」という人たちが団代数に集まってきたのであった。

このように書くと、Fomin と Zelevinsky の業績は皆がすでに知っているある種の代数的・組み合わせ論的構造に名前をつけただけのように誤解を与えたかもしれないが、もちろんそうではない。かれらがそれを団代数という特別な共通構造として認識して、それに関する理論と道具を整えてくれたことによって、それまでは個別には太刀打ちできなかったことが解決されたり、あるいは新しい認識へと進展できるようになったのであった。

閑話休題。そろそろ、この文章のタイトルにある本題「団代数とは何か」について筆を進めなければならない。もちろん、数学におけるこの種の「～とは何か?」という問いは通常はさまざまな観点による重層的な答を持つものであり、一つの閉じた答というものはないものである。しかし、そうであっても、自分が専門と自認している対象について「それは何か」と問われれば、自身の立場からは一応はなんらかの答は述べるべきものであろう。そこで、以下は私見に過ぎないと強く断りを入れた上で、私の現時点での考えを述べよう。

団代数も導入後 15 年近くが経ち、多様な分野との関わりが多数明らかになり、現在では、団代数が数学の諸分野に偏在的に現れる一つの基礎的な (underlying) 代数的・組み合わせ論的構造である、という認識に異論はないであろう。しかし、これは団代数とは何かという問いに対する答としてはいささか抽象的である。ところで（話の展開としてはやや強引ではあるが！）このような団代数の遍在性 (ubiquity) は、同じく代数的・組み合わせ論的構造であるところの「ルート系（あるいは

Coxeter 群）」を想起させる。そして、実のところ、私（および私の周辺のある人たち）は、団代数の理論とは、ルート系の理論の一つの拡張である、と認識している。例えば、団代数における中心概念である変異は対合的であるが、これはルート系における鏡映線形変換の有理変換版であり、また、変異のトロピカル版は鏡映線形変換の区分線形版と見なすことができる。残念なことに、このような観点はいまだ未成熟であり、具体的に団代数理論をルート系の拡張理論として定式化する、という段階には至っていない。しかし、いわゆる第ゼロ近似として「団代数理論はルート系の拡張理論である」と思って眺めることは、少なくとも現時点においては良い立脚点であると考えている。

最後に「cluster」という語はもともとは通常の英単語であるが、日本では「クラスター（クラスタ）分析」など技術用語としての意味が先行して、本来の意味が必ずしも定着しているとは思われないのでそれについて触れておく。この単語について Oxford 英語辞典を引くと、「1. a group of things of the same type that grow or appear close together, 2. a group of people, animals or things close together」とある。つまり、「同種のもの・人が近接している状態」を意味し、ものの種類や規模に応じて「群れ」、「集まり」、「集団」などと訳される。例えば、a cluster of spectators（観客の群れ）、a cluster of buildings（建物の集まり）、a cluster of tourists（旅行者の集団）などである。2008 年春に、私と伊山修さんで行きつけの中華料理屋で cluster algebra の訳語を考え、「群」と「集まり」はすでに他の意味があるので「団代数」が適当ではないかということになった。本特集のタイトルでもこの訳語を用いたが、各記事においては訳語の選択は執筆者に委ねたことをお断りする。ちなみに、google で「クラスター」を検索すると「環境ナノクラスター、食クラスター、健康・医療クラスター」などの意味不明語が続出するが、これらは中央官庁の傘下団体の事業名である。

()