団代数ことはじめ

(数理科学 Vol.53-3 (2015)，pp.7–14，サイエンス社，著者最終稿)

中 西　知 樹

本稿は，団代数 (cluster algebra) を初めて学ぶ方を対象とした団代数の入門編です．

1. はじめの一歩！

何はともあれ，とりあえず以下のような計算をしてみましょう．(鉛筆を持って，ご一緒に！)

$x_1(0)$，$x_2(0)$ という二つの変数から始めます，0 というのは時刻 $t=0$ における変数という意味です．時間は離散的に進むものとして，時刻 $t=1$ における変数 $x_1(1)$，$x_2(1)$ の発展規則を，関係式

$$\begin{aligned} x_1(1) &= (x_2(0)+1)/x_1(0), \\ x_2(1) &= x_2(0) \end{aligned} \tag{1}$$

で定めます．以下では簡単のため，「初期変数」$x_1(0)$，$x_2(0)$ を x_1，x_2 と書くことにしましょう．

つぎに，時刻 $t=2$ における変数 $x_1(2)$, $x_2(2)$ の発展規則を，二つの変数の役割を入れ替えて，

$$\begin{aligned} x_1(2) &= x_1(1), \\ x_2(2) &= (x_1(1)+1)/x_2(1) \end{aligned} \tag{2}$$

と定めます．ここで，$x_1(2)$, $x_2(2)$ を初期変数 x_1, x_2 で表すと，(ご一緒に！)

$$\begin{aligned} x_1(2) &= x_1(1) = (x_2+1)/x_1, \\ x_2(2) &= (x_1(1)+1)/x_2(1) \\ &= ((x_2+1)/x_1+1)/x_2 \\ &= (x_1+x_2+1)/x_1x_2 \end{aligned}$$

となります．

以下，変数発展規則 (1)，(2) を交互に繰り返すことにします．そして，順次得られる変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を初期変数 x_1, x_2 の有理式で表してみます．例えば，(ここからの計算が肝心！)

$$\begin{aligned} x_1(3) &= (x_2(2)+1)/x_1(2) \\ &= \frac{(x_1+x_2+1)/x_1x_2+1}{(x_2+1)/x_1} \\ &= \frac{(x_1x_2+x_1+x_2+1)/x_1x_2}{(x_2+1)/x_1} \\ &= (x_1+1)/x_2. \end{aligned}$$

ここで，最後の等式で，分子の因数分解 $(x_1x_2+x_1+x_2+1)=(x_1+1)(x_2+1)$ の結果，因子 x_2+1 がキャンセルして，随分簡単な結果になったことに注意します．一方，

$$x_2(3) = x_2(2) = (x_1+x_2+1)/x_1x_2$$

となります．

さらに続けて，(あと少し！)

$$\begin{aligned} x_1(4) &= x_1(3) = (x_1+1)/x_2, \\ x_2(4) &= (x_1(3)+1)/x_2(3) \\ &= \frac{(x_1+1)/x_2+1}{(x_1+x_2+1)/x_1x_2} \\ &= \frac{(x_1+x_2+1)/x_2}{(x_1+x_2+1)/x_1x_2} = x_1. \end{aligned}$$

ここでも，分母と分子のキャンセルによって，結果が簡単になりました．最後にもう一度時間発展

させると，再び分母と分子のキャンセルが起こり，

$$\begin{aligned} x_1(5) &= (x_2(4)+1)/x_1(4) \\ &= \frac{x_1+1}{(x_1+1)/x_2} = x_2, \\ x_2(5) &= x_2(4) = x_1, \end{aligned}$$

となります．すなわち

$$x_1(5) = x_2(0), \quad x_2(5) = x_1(0) \tag{3}$$

となり，変数は順序を変えて初期変数に戻りました．すなわち，この時間発展の規則は半周期 5 を持つことがわかりました．

実は，この計算は最も簡単で非自明な団代数である A_2 **型団代数**の団変数の変異の計算に他なりません．そして，この初等的ですがミステリアスな計算には，団代数のエッセンスが詰まっています．それを説明するためにいくつか団代数の用語を導入します．各時刻 t における変数の組 $(x_1(t), x_2(t))$ を**団** (cluster)，それぞれの変数 $x_1(t)$，$x_2(t)$ を**団変数** (cluster variable) と呼び，特に，時刻 $t=0$ における団変数 x_1，x_2 を**初期団変数** (initial cluster variable) と呼びます．また，団の時間発展 $(x_1(t), x_2(t)) \mapsto (x_1(t+1), x_2(t+1))$ を団の**変異** (mutation) と呼びます．

そこで，上の計算を振り返ってみましょう．

(i) 変異の対合性． 上の計算では，団の変異として二種類の変換 (1)，(2) を交互に行いましたが，例えば同じ変換 (1) を続けと行うと，

$$\begin{aligned} x_1(2) &= (x_2(1)+1)/x_1(1) \\ &= \frac{x_2+1}{(x_2+1)/x_1} = x_1, \\ x_2(2) &= x_2(1) = x_2, \end{aligned}$$

すなわち，変換 (1) を二度続けて行うと恒等写像となります．これを変異の**対合性** (involutiveness) と呼びます．

(ii) Laurent 性． 一般に，多変数の簡約された有理式において，その分母が単項式となるものを Laurent 多項式といいます．例えば，

$$\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}$$

は x_1，x_2 の Laurent 単項式です．さて，変換 (1)，(2) は有理変換（有理式で定められる変換）ですから，任意の t に対して，$x_1(t)$，$x_2(t)$ が初期団変数 x_1，x_2 の有理式となるのは明らかです．しかし，実際には分母分子の非自明なキャンセルが常にうまく起こり，$x_1(t)$，$x_2(t)$ は x_1，x_2 の Laurent 多項式となりました．これを団変数の **Laurent 性**（Laurent property）と呼びます．

(iii) 分母ベクトルとルートの関係． 良く観察をすると，初期団変数 x_1，x_2 を除いて，団変数は以下のちょうど三つの Laurent 多項式

$$\frac{x_2+1}{x_1}, \quad \frac{x_1+1}{x_2}, \quad \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \tag{4}$$

しかないことがわかります．これらの Laurent 多項式の分母に現れる単項式 x_1，x_2，x_1x_2 のベキをベクトル α_1，α_2，$\alpha_1+\alpha_2$ と同一視して，これを**分母ベクトル**（denominator vector）と呼びます．これらの分母ベクトルは A_2 型のルート系の正ルートと一対一に対応しています．

(iv) 正値性． 初期団変数を除く団変数に現れる三つの Laurent 多項式 (4) の分子は正係数の多項式となっています．この事実を団変数の**正値性**（positivity）といいます．変換 (1)，(2) 自身は正係数の有理式ですが，これは非自明な結果です．なぜなら，正係数の有理式の分母分子のキャンセルをして得られる簡約された有理式は必ずしも正係数とは限らないからです．例えば，

$$\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2} = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

となります．

(v) 有限性． 団変数の周期性 (3) も特筆すべき結果です．この周期性は，五角形と関係していて**ペンタゴン恒等式**と呼ばれることがあります．この周期性より，この後時間発展を延々と繰り返しても，有限個の団変数しか現れないという有限性が得られます．

これらの結果は，それだけでは，必然なのか，あるいは偶然の集積なのかは定かではありません．

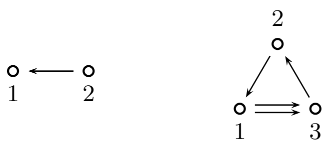
図 1　ループと 2 サイクル

しかし，Fomin と Zelevinsky は，このような結果の背後にある種の代数的・組合せ論的構造が存在することを見抜き，それを団代数として定式化したのでした．参考のため，Fomin，Zelevinsky，および Berenstein による団代数に関する一連の基礎的な論文のリスト[1, 2, 4〜7] を文末に，挙げておきます．また，団代数についての文献を含めたさまざまな情報は Fomin 自身が編集しているウエブサイト「Cluster Algebras Portal[3]」で得ることができます．

2. 箙とその変異

団代数における「いろは」として次に知っておくべきものとして,「箙（えびら）の変異」というものがあります．これを説明しましょう．

頂点の集合とそれらの間の矢の集合からなる有効グラフを**箙**（quiver，クイバー）と呼びます．箙の頂点には 1，...，n と番号が振られているものとします．例えば，以下のようなものが箙の簡単な例です．



箙において，始点と終点が同じ矢を**ループ**と呼び，また，異なる頂点 i，j に対して，i から j に向かう矢とその逆向きの矢のペアを **2 サイクル**と呼びます（図 1）．

定義． ループと 2 サイクルを持たない箙 Q と Q の頂点 k に対して，以下の操作で得られる新しいループと 2 サイクルを持たない箙 Q' を頂点 k における Q の**変異**（mutation）と呼び，$Q' = \mu_k(Q)$ と表します．

（ステップ 1）k と異なる任意の二頂点 i，j に対して，i から k への矢が p 個，k から j への矢が q 個あるとき，i から j への pq 個の矢を Q に加える．

（ステップ 2）k に出入りするすべての矢の向きを逆にする．

（ステップ 3）ステップ 1 で発生した 2 サイクルを取りうる限り取り除く．

例えば，先に挙げた例の右側の箙に対して，頂点 1 における変異は図 2 のようになります。一般に，箙の変異が対合的，すなわち，$\mu_k^2(Q) = Q$ となることが容易に確かめられます．

話が少しそれますが，団代数の圏化の理論などでも著名な Bernhard Keller 氏による，箙の変異をコンピュータで実行するための Quiver Mutation[8] というシンプルですが大変高機能なフリーのアプリケーションがあります．このプログラムは箙の変異だけでなく，団代数のさまざまな演算（多くの場合手で実行することは難しい）を行えるため，団代数の研究者必携といえるものです．

さて，ループと 2 サイクルを持たない n 個の頂点を持つ箙 Q に対して，n 次反対称 (整数) 行列 $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ を

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (\text{頂点 } i \text{ から頂点 } j \text{ への矢の数}) \\ &\quad - (\text{頂点 } j \text{ から頂点 } i \text{ への矢の数}) \end{aligned}$$

により定めることができます.（以下では，行列は常に整数行列とします.）逆に，n 次反対称行列 B に対して，n 個の頂点を考え，$b_{ij} > 0$ のとき頂点 i から頂点 j へ b_{ij} 本の矢を書くことによりループと 2 サイクルを持たない箙 Q が定まり，しかも，これが上の対応の逆対応を与えることが簡単にわかります．すなわち，ループと 2 サイクルを持たない箙と反対称行列を同一視することができます．

このとき，箙の変異 $Q' = \mu_k(Q)$ に対応して，反対称行列の変異 $B' = \mu_k(B)$ が定まりますが，それを具体的に式で表すと以下のようになります．

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \\ b_{ij} + [b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[-b_{kj}]_+ & i, j \neq k. \end{cases} \tag{5}$$

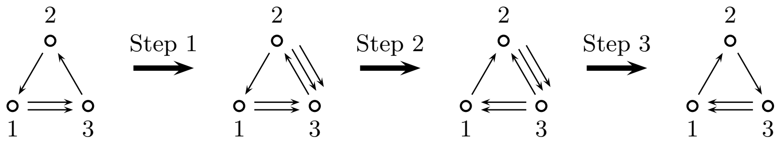


図 2　箙の変異の例

ただし，記号 $[\ ]_+$ を，$a>0$ に対しては $[a]_+=a$，$a\leq 0$ に対しては $[a]_+=0$ と定めました．

3. 種子とその変異

Fomin と Zelevinsky[4] にしたがって，団代数における中心的な概念である種子とその変異を導入します．

前節では反対称行列とその変異を導入しましたが，ここではもう少し一般に，反対称行列 B と非負対角行列 D の積 DB で表せる行列（**反対称化可能行列**という）を考え，反対称化可能行列 B に対してもその変異 $B'=\mu_k(B)$ を同じ式（5）によって定めるます．すると，B' もまた反対称化可能行列となることが簡単に確かめられます．

さて，団代数を定義するにあたって，はじめに自然数 n を固定し，n 個の代数的に独立で可換な変数の組 $w=(w_i)_{i=1}^n$ を用意し，w の生成する $\mathbb{Q}$ 上の有理関数体 $\mathbb{Q}(w)$ を考えます．そして，任意の反対称化可能行列 B および $\mathbb{Q}(w)$ の代数的に独立な n 個の元の組 $x=(x_i)_{i=1}^n$ のペアを**種子**（seed）と呼びます．また，任意の $k=1,\ \ldots,\ n$ に対して，k における**種子の変異** $(B',x')=\mu_k(B,x)$ を，B' については（5）で定まる $B'=\mu_k(B)$ によって，また $x'=(x'_i)_{i=1}^n$ については

$$x'_i=\begin{cases}\dfrac{1}{x_k}\left(\displaystyle\prod_{j=1}^n x_j^{[b_{jk}]_+}+\prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{jk}]_+}\right) & i=k\\ x_i & i\neq k\end{cases} \tag{6}$$

と定めます．ただし，積が空のときは 1 とみなします．このとき，種子の変異に対しても対合性 $\mu_k^2=\mathrm{id}$ が成り立ちます．したがって，x'_i たちも代数的に独立であり，特に，(B',x') は再び種子になります．

各種子 (B,x) に対して，B を**交換行列**（exchange matrix），x を**団**（cluster），また個々の有理式 x_i を**団変数**（cluster variable）と呼びます．また，関係式 (6) を団 x の**交換関係式**（exchange relation）と呼びます．交換行列 B が (B,x) から (B',x') への種子の変化の情報を含有しているので，言わば細胞における「DNA」の役割を担っています．そして，種子の変化の際に DNA である B 自身もまた部分的に変化をするので，Fomin と Zelevinsky はこれを生物学における種の変化に例えて「変異」と呼んだのです．

4. 団代数の定義

以上で団代数を定義する準備ができました．一つの団代数を定めるためには，まず任意に種子 (B^0,x^0) を一つ固定して，これを**初期種子**（initial seed）と呼びます．そして，初期種子 (B^0,x^0) からあらゆる変異を繰り返して得られる種子全体の集合を $\mathcal{S}(B^0,x^0)$ とおき，$\mathcal{S}(B^0,x^0)$ に属するすべての種子 (B,x) の団変数全体の集合を $\mathcal{X}(B^0,x^0)$ とおきます，一般に，$\mathcal{X}(B^0,x^0)$ は無限集合になります．そして，$\mathcal{X}(B^0,x^0)$ に属するすべての団変数で生成される $\mathbb{Q}(w)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数 $\mathcal{A}(B^0,x^0)$ を，(B^0,x^0) の定める**団代数** (cluster algebra) と呼びます．また，$\mathcal{S}(B^0,x^0)$ に属する種子 (B,x) および $\mathcal{X}(B^0,x^0)$ に属する団変数を，それぞれ，団代数 $\mathcal{A}(B^0,x^0)$ の種子および団変数と呼びます．(応用上は団代数の係数環 $\mathbb{Z}$ を適当な体に拡大することも良くあります.)

以上をまとめると，団代数とは「変異によって特徴付けられる特殊な関係式をみたす生成元を有する可換代数」と言うことができます．

なお，はじめに用意する変数の組 w と初期変数 x^0 を同じものとしても（団代数の同型のもとでは）一般性を失いませんので，通常は始めから $w=x^0$ としても構いません.（ここでもそうします.）

簡単な例を見てみましょう.

例 1 (A_1 型団代数)**.** 最も簡単な場合として $n=1$ の場合を考えます.（n を団代数のランクと呼びます.）次数 1 の対称化可能行列はゼロ行列 (0) のみで，これはただ一つの頂点からなる箙

$$\underset{1}{\circ}$$

に対応します．この箙は A_1 型の Dynkin 図とも見なせることに注意します．このとき，初期種子 $(B^0, x^0) = ((0), (x_1^0))$ の変異は $(B', x') = \mu_1(B^0, x^0)$ の一通りで，

$$B' = (0), \quad x_1' = 2/x_1^0$$

となります．さらに $\mu_1^2 = \mathrm{id}$ でしたから，変異を繰り返してもこれ以上新しい種子は得られません．したがって，

$$\mathcal{X}(B^0, x^0) = \{x_1^0, 2/x_1^0\},$$
$$\mathcal{A}(B^0, x^0) = \mathbb{Z}[x_1^0, 2/x_1^0] \subset \mathbb{Q}(x_1^0),$$

すなわち，$\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の元は初期団変数 x_1^0 の $\mathbb{Z}$ 上の Laurent 多項式で負ベキの係数が偶数のものとなります．これを A_1 **型団代数**と呼びます．(例えば係数を $\mathbb{Q}$ に拡大すると，ただの x_1^0 の $\mathbb{Q}$ 上の Laurent 多項式環になります．)

例 2 (A_2 型団代数)**.** 次に $n=2$ として，以下の初期交換行列

$$B^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合を考えます．これは以下の箙

$$\underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ}$$

に対応します．この箙の台グラフ（矢印の向きを忘れたグラフ）は A_2 型の Dynkin 図となります．初期種子 (B^0, x^0) を $(B(0), x(0))$ と表し，以下のような変異の列を考えます.

$$\cdots \overset{\mu_1}{\leftrightarrow} (B(-1), x(-1)) \overset{\mu_2}{\leftrightarrow} (B(0), x(0)) \overset{\mu_1}{\leftrightarrow}$$
$$(B(1), x(1)) \overset{\mu_2}{\leftrightarrow} (B(2), x(2)) \overset{\mu_1}{\leftrightarrow} \cdots$$

すると，(5) より，(あるいは箙の変異より)

$$B(t) = \begin{cases} B(0) & t\text{: 偶数} \\ -B(0) & t\text{: 奇数} \end{cases}$$

となります，さらに，これと（6）より，t が偶数の時は,

$$x_1(t+1) = (x_2(t)+1)/x_1(t),$$
$$x_2(t+1) = x_2(t),$$

また，t が奇数の時は,

$$x_1(t+1) = x_1(t),$$
$$x_2(t+1) = (x_1(t)+1)/x_2(t)$$

となります．ところで，これは第 1 節で考えた発展規則（1）,（2）に他なりません．したがって，第 1 節の結果（3）により，上の種子の変異の列は半周期 5

$$x_1(t+5) = x_2(t), \quad x_2(t+5) = x_1(t)$$

を持つことがわかります．特に，$\mathcal{S}(B^0, x^0)$ に属する種子は有限個（10 個）であり，$\mathcal{X}(B^0, x^0)$ に属する団変数は,

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \frac{x_2^0+1}{x_1^0},\ \frac{x_1^0+1}{x_2^0},\ \frac{x_1^0+x_2^0+1}{x_1^0 x_2^0}$$

の 5 個となります．これらで生成される団代数 $\mathcal{A}(B^0, x^0)$ を A_2 **型団代数**と呼びます.

5. 団代数の基本性質

第 1 節で見た性質，すなわち A_2 型団代数における変異の性質が，一般の団代数においてどのように成り立つかについて概観します.

(i) 変異の対合性. これは種子の変異の定義のところで述べたように，常に成り立ちます.

(ii) Laurent 性[4]. これも常に成り立ちます．すなわち，任意の団変数 x_i を，初期団変数 x^0 の有

理式で表したとき，その有理式は Laurent 多項式に簡約されます．実際，Fomin と Zelevinsky は，この性質を手がかりに種子の変異の定義に到達したと思われます．

(iii) 分母ベクトルとルートの関係[5)]**．** 反対称化可能行列 B に対して，B **に付随する Cartan 行列** $C(B) = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ を

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -|b_{ij}| & i \neq j \end{cases}$$

と定めます．$C(B)$ は Kac-Moody 代数における対称化可能（一般）Cartan 行列となります．例えば，前節の二つの例では，$C(B)$ は，

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となり，それぞれ，A_1 型，A_2 型の（有限型）Cartan 行列となります．一般に，$C(B^0)$ が有限型 Cartan 行列のとき，$\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の（初期団変数を除く）任意の団変数の初期団変数に関する分母ベクトルは $C(B^0)$ に対応するルート系の正ルートとなり，さらに，分母ベクトルと正ルートは一対一に対応することが知られています．これは，団代数とルート系あるいは Lie 理論との強い親和性を示すものです．一方で，これは $C(B^0)$ が有限型のときの特殊な性質であることも知られていて，一般の場合には分母ベクトルの挙動はまだよくわかっていません．

(iv) 正値性． 「任意の団変数の初期団変数に関する Laurent 多項式表示の分子は正係数となる」という予想は正値性予想と呼ばれ，団代数の基礎理論における当初からの懸案問題となっています．最近，Lee と Schiffler によって B^0 が反対称行列の場合については予想が正しいことが示され一歩前進をしました．

(v) 有限性[5)]**．** 反対称化可能行列 B と B' が互いに有限回の変異で移り合うとき，B と B' は**変異同値**（mutation equivalent）であるといいます．$\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の種子が有限個であるための必要十分条件は，ある反対称化可能行列 B が存在し，B は B^0 と変異同値で，かつ Cartan 行列 $C(B)$ が有限型になることです．変異同値な反対称化可能行列の定める団代数は（団代数の意味で）同型となるので，結局，有限型団代数の同型類の分類は良く知られた有限型ルート系の分類と一致する，という著しい結果が得られます．

6. 背景と他分野との関わり

団代数は，もともと Lie 理論においていろいろな文脈で現れる代数的・組合せ論的構造を動機として導入されました．Fomin と Zelevinsky は，その第一論文[4)] で団代数の導入の背景として具体的に（互いに関係する）以下の事柄を挙げています．

- SL_n やその商群の座標環の標準基底，あるいは量子群の双対標準基底
- Grassmann 多様体 $Gr_{2,n+3}$ の Plücker 座標
- 半単純群の二重 Burhat 胞体の全正値基底 (Lusztig の全正値性と関連)

そして，これらの事象を半単純群に付随するさまざまな代数多様体へと一般化することを大きな目標として掲げました．

その後，団代数（あるいは関連する代数的・組合せ論的構造）は，もともとの想定を超えて，さまざまな数学の分野と関わることが明らかになってきました．以下に，関連する分野のキーワードの一部を内容的重複をいとわずランダムに箇条書きします．（分野の分類は，団代数の出現が多岐にわたることを示すための便宜的なものに過ぎません．）

— 代数的分野

- 箙あるいは道代数の表現論と圏化，Auslander-Reiten 理論，2 次元 Calabi-Yau 圏
- 前射影代数の表現論，極大ベキ単部分群, Kac-Moody 群
- 量子群の表現論，箙多様体上の偏屈層
- Ginzburg 次数付き微分代数，3 次元 Calabi-Yau 圏，安定性条件，Donaldson-Thomas 不変量

— 幾何的分野

- Stasheff ポリトープ，Bott-Taubes ポリトープ

- Poisson 幾何学，Poisson-Lie 構造，Coxeter-Toda 格子
- 2 次元双曲幾何: Riemann 面の三角形分割，ラムダ長，複比，Ptolemy の定理，Teichmüller 理論とその高次化，Weil-Peterson 形式
- 3 次元双曲幾何: 双曲体積
- 結び目理論: 組紐関係式，スケイン関係式

— 解析的分野

- ダイログ関数と量子ダイログ関数
- KP 階層のソリトングラフ
- 完全 WKB 解析，Stokes 現象

— 組合せ論，数理物理

- Gale-Robinson 数列，六面体数列，八面体数列，Somos 数列などの数論的・組合せ論的数列
- ダイマー模型
- 共形場理論: Y 系，T 系，Q 系，熱力学的 Bethe 仮説
- 弦理論: BPS 状態の数え上げ，Hitchin 系

7. 係数（y 変数）

最後に，団代数の理論および応用において団変数と並んで重要な係数（y 変数）について簡単に紹介してこの短い入門編を終えたいと思います.

初期団変数 $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^n$ とは独立に，あらたに n 個の可換な変数の組 $y^0 = (y_i^0)_{i=1}^n$ を導入します．そして，種子 (B, x) とパラレルに，n 次反対称化可能行列 B および n 個の変数の組 $y = (y_i)_{i=1}^n$，$y_i \in \mathbb{Q}(y^0)$ のペア (B, y) を考え，これを Y **種子**（Y-seed）と呼びます．任意の $k = 1, \ldots, n$ に対して，Y 種子 (B, y) の k における変異 $(B', y') = \mu_k(B, y)$ を，B' については（5）によって定め，y' については

$$y'_i = \begin{cases} {y_k}^{-1} & i = k \\ y_k \dfrac{(1 + y_k)^{[-b_{ki}]_+}}{(1 + {y_k}^{-1})^{[b_{ki}]_+}} & i \neq k \end{cases} \tag{7}$$

と定めます．Y 種子の変数 y_i を**係数**（coefficient）あるいは y **変数**と呼びます.（正確には，係数と言うときには，団変数 x_i の変異（6）の式に y 変数も「係数」として絡んでくるのですが，ここでは，その詳細は省略します.）後は，団変数の場合と同様に，初期 Y 種子 (B^0, y^0) から出発し，上の変異を繰り返して得られる y 変数を考えます.

y 変数はもともとは団変数（x 変数）に対する「係数」という補助的な位置づけとして導入されましたが，その後，x 変数と y 変数の間の双対性の認識が深まり，x 変数と対等な位置づけを得るとともに，応用においてもむしろ主役となることがあるなど，その重要性は増しています.

最後になりますが，x 変数に対して，$\hat{y}$ **変数** $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i=1}^n$ を

$$\hat{y}_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{ji}} \tag{8}$$

と定めると，$\hat{y}$ は y と同じ変異規則（7）に従います．これは x 変数と y 変数の間のある種の双対性を示すものです．この事実は（5）と（6）のみから示せますので，復習を兼ねてぜひ確かめてみてください.

参考文献

1) A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52; arXiv:math/035434 [math.RT].
2) A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. in Math. **195** (2005), 405–455; arXiv:math.QA/0404446.
3) S. Fomin, *Cluster Algebras Portal*, http://www.math.lsa.umich.edu/ fomin/cluster.html.
4) S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].
5) ———, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].
6) ———, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. **158** (2003), 977–1018; arXiv:hep–th/0111053.
7) ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].
8) B. Keller, *Quiver mutation in Java*, http://people.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation/.

（なかにし・ともき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）