

### 3 相因子分析の適用上の諸問題\*

村上 隆 後藤 宗理 辻本 英夫<sup>1)</sup>

心理学研究においては、semantic differential 法によるデータのような3相データが出現することがしばしばある\*\*従って、3つの相(mode)を同時に取り扱うことのできる因子分析的手法への要請は決して少なくない。3相因子分析(Tucker, 1964, 1966)は、そのような要請に答えるための一つの方法である。しかしながら、モデルの提唱以来10年以上を経過した今日まで、この方法の適用例は極めて少ない。分析手法の有効性の検討には、その数理的構造自体の研究もさることながら、それを実際のデータに適用し、データが含む興味ある情報を導出することが出来るか否かを調べてみる必要がある。実際のデータへの適用によって、単なる数理的構造からは知ることの出来なかつたモデルのクセのようなものが明らかになり、次の適用への指針となる。そのような経験が蓄積されることによってはじめて、分析手法の適正な利用が可能になってくるのである。長い歴史を持つ因子分析や回帰分析においては、確かにこの積み重ねがあるし、比較的近年発達した多次元尺度解析法にも、適用例や、方法比較の論文が多数発表されている。しかし、3相因子分析については、そのようなものがほとんど見当たらない。

モデルの構造を見る限り、3相因子分析法は、3相データに適用される他の方法よりも、実際場面で頻りに利用される可能性が大きいように思われる。本研究は、3種のデータをこのモデルを用いて分析し、その結果を例示しながらその際生ずる幾つかの問題点を論ずる。基本的な問題意識は、「3相因子分析が、通常の(2相)因子分析に対して持つmeritは何か」ということにある。すなわち、データを通常の因子分析によって分析した場合を念頭に置きつつ、3相因子分析がそれ以上に付け加えたものは何か、あるいは失なわれたものは何かという観点から検討がなされる。3相因子分析の現状を見るとき、このことが現在最も必要であると考えからである。本研究は、新しいモデルの開発を試みようとするもので

はない。以下に示すモデルは、通常の因子分析法の結果との比較を容易にするために、パラメータの単位を多少変更したこと、及び若干の統計量を追加したことを除けば、ほぼTuckerのモデルそのままである。

われわれは、3相因子分析を通常の因子分析の発展として捉える。そこでまず通常の因子分析を略述することから始めよう。

#### 1. 因子分析の基本モデル

いわゆる外的基準のない多次元解析の方法の対象となるデータは、(被験者)×(変数)という2相の形をとるものである。このデータの要素を $x_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, N_i$ ;  $j=1, 2, \dots, N_j$ )と書く。ここで添字 $i$ は被験者を、添字 $j$ は変数を示す。また $N_i$ は被験者の数、 $N_j$ は変数の数であり、普通は $N_i > N_j$ ある。このデータは通常標準得点化される。すなわち

$$\frac{1}{N_i} \sum_i x_{ij} = 0 \quad \frac{1}{N_j} \sum_j x_{ij}^2 = 1 \quad (1)$$

以下 $x_{ij}$ は標準得点であるものとして取り扱う。因子分析は、このデータを

$$x_{ij} \cong \hat{x}_{ij} = \sum_m (j_m f_{im}) \quad (2)$$

という形に縮約して表現しようとするものである。ここで $(j_m)$ は因子負荷、 $f_{im}$ は因子得点と呼ばれる。添字 $m$ は因子をあらわし、 $M$ は因子数であって、 $N_i, N_j$ よりかなり小さい数となることが期待される。 $\hat{x}_{ij}$ はモデルから再現される $x_{ij}$ の近似値であり、以下に述べるやり方に従えば最小自乗法の意味での近似値になる。(記号 $\cong$ はその意味で用いる。)

ところで通常因子分析と呼ばれるモデルでは、 $(j_m, f_{im})$ 以外に独自性という要素が考慮される。 $(j_m, f_{im})$ によって説明される分散は共通性と呼ばれ、その大きさ

\*\* Semantic differential 法のデータは、(被験者)×(尺度)×(概念)という3-wayの形であらわさざるを得ない。このようなデータを3相データと呼ぶ。これは3次元データと呼ばれることもあるが、因子空間の次元の数と混同されやすいので、この名が生じた。通常の2-wayのデータを2相データと呼ぶ。

\* 本研究のデータ分析のための計算は、名古屋大学大型計算機センターのFACOM 230-75によった。  
1) 名古屋大学大学院教育学研究科博士課程(前期課程)教育心理学専攻

の推定が計算過程における最大の問題点となる。しかしながら、ここでは3相因子分析となるべく平行な説明を行なうために、 $x_{ij}$ の全分散を共通性として取り扱うこととする。(3相因子分析において共通性推定の問題は十分な展開を見ていない。)このためここでいう因子分析法は $(j_m, f_{im})$ の単位の問題及び因子回転を除けば、成分分析に等しい。

因子負荷 $(j_m)$ は、次の $s_{jj'}$ を要素とする変数間積和行列の( $M$ 番目までの最大固有値に対応する)固有ベクトルに比例する。

$$s_{jj'} = \sum_i^{N_i} x_{ij} x_{ij'} \quad (3)$$

ただし通常は計算の出発点として次の相関係数を要素とする相関行列がとられることが多い。

$$r_{jj'} = \frac{1}{N_i} s_{jj'} \quad (4)$$

この相関行列の $m$ 番目の固有値 $\lambda_m$ を第 $m$ 因子の因子寄与と呼び、これをデータの全分散( $= N_i$ )で除したものを寄与率と呼ぶ。更に、第1因子から順に寄与率を総和したものを累積寄与率という。これは、データ $x_{ij}$ の分散のうち、(1)のモデルによって説明される部分 $\hat{x}_{ij}$ の分散が占める割合を示す。ところで、2乗和が1となるように基準化された固有ベクトル $(j_m^*)$ を成分分析では重みと呼び、次の一次結合 $f_{im}^*$

$$f_{im}^* = \sum_j^{N_j} (j_m^* x_{ij} \quad (\sum_j (j_m^{*2} = 1)) \quad (5)$$

を成分得点と呼ぶ。因子得点 $f_{im}$ はこれに比例したものとなる。

因子分析モデルでは、因子負荷と因子得点は、

$$(j_m = \sqrt{\lambda_m} (j_m^* \quad (6)$$

$$f_{im} = f_{im}^* / \sqrt{\lambda_m} \quad (7)$$

のように基準化される。これによって因子負荷 $(j_m)$ は、データ $x_{ij}$ と因子得点 $f_{im}$ の相関係数という意味を持つようになる。また因子得点については、

$$\frac{1}{N_i} \sum_i^{N_i} f_{im} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{N_i} \sum_i^{N_i} f_{im}^2 = 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{N_i} \sum_i^{N_i} f_{im} f_{im'} = 0 \quad (m \neq m') \quad (10)$$

が成立する。すなわち、因子得点は平均0、分散1の標準得点であり、異なる因子に対応する因子得点は互いに直交する。

ところで、成分得点 $f_{im}^*$ の分散は対応する固有値に等しい。

$$\frac{1}{N_i} \sum_i^{N_i} f_{im}^{*2} = \lambda_m \quad (11)$$

他方、因子分析モデルでは

$$\begin{aligned} \sum_j^{N_j} \left( \frac{1}{N_i} \sum_i^{N_i} \hat{x}_{ij}^2 \right) &= \sum_j^{N_j} \left\{ \frac{1}{N_i} \sum_i^{N_i} \left( \sum_m^M (j_m f_{im})^2 \right) \right\} \\ &= \sum_m^M \sum_j^{N_j} (j_m^2) = \sum_m^M \lambda_m \end{aligned} \quad (12)$$

が成立する。(計算過程で、(6)、(9)、(10)を用いた。)そこで次の注目すべき関係が成立する。

$$\sum_m^M \sum_i^{N_i} f_{im}^{*2} = \sum_j^{N_j} \sum_i^{N_i} \hat{x}_{ij}^2 \quad (13)$$

これを $x_{ij}^2$ の総和で除したものは、第 $M$ 因子までの累積寄与率に等しく、またそれは、 $x_{ij}$ と $\hat{x}_{ij}$ の相関係数の2乗とも一致する。以下これを $R_{\hat{x}x}^2$ として引用する。

$$R_{\hat{x}x}^2 = \frac{\sum_m^M \sum_i^{N_i} f_{im}^{*2}}{\sum_i^{N_i} \sum_j^{N_j} x_{ij}^2} = \frac{\sum_m^M \sum_j^{N_j} \hat{x}_{ij}^2 / \sum_i^{N_i} \sum_j^{N_j} x_{ij}^2}{\sum_i^{N_i} \sum_j^{N_j} x_{ij}^2} \quad (14)$$

最後に、因子負荷の解釈を容易にするための回転が行なわれるのが普通である。回転行列の要素を $t_{mm'}$ ( $m, m' = 1, \dots, M$ )とすると

$$\widehat{(j_m)}' = \sum_m^M (j_m t_{mm'}) \quad (15)$$

$$\widehat{f_{im}}' = \sum_m^M f_{im} t_{mm'}^{(-1)} \quad (16)$$

ここで、 $\widehat{(j_m)}'$ 、 $\widehat{f_{im}}'$ は回転後の因子負荷及び因子得点であり、 $t_{mm'}^{(-1)}$ は、回転行列の逆行列である。

$$\begin{cases} \sum_m^M t_{mm'} t_{mm''}^{(-1)} = 1 & (m' = m'') \\ = 0 & (m' \neq m'') \end{cases} \quad (17)$$

の関係があるから、 $\widehat{(j_m)}'$ 、 $\widehat{f_{im}}'$ についても(2)の関係は成立する。そこで、これらを改めて $(j_m, f_{im})$ と置くことにする。なお、(10)を保存するような回転を直交回転、保存しない回転を斜交回転と呼ぶが、ここでは直交回転のみを考える。回転に際しては、因子負荷の単純構造が目指されることが多い。varimax回転は比較的良好な単純構造を与えることが知られている方法であり、本研究でも専らこれを用いる。

## 2. 3相データと因子分析

まず心理学研究において出現する3相データの例を示そう。

〔例1〕時系列型データ 同一のテスト又は質問紙を同一の被験者に繰り返し実施して得られる。テスト自体幾つかの項目からなっているから、1回の実施で通常の(被験者)×(変数)型の2相データが得られ、それが複数積み重なる。これを縦断的データとも呼ぶ。

〔例2〕SD型データ Osgood等による semantic differential 法(SD法)では、幾つかの対象(概念

と呼ばれる)を、形容詞対を用いた複数の尺度上で評定させる。1名の被験者から、(概念)×(尺度)の2相データが得られ、それが被験者の数だけ存在することになる。

3相データの要素は、 $x_{ijk}$  ( $i=1, 2, \dots, N_i, j=1, 2, \dots, N_j, k=1, 2, \dots, N_k$ ) のように3つの添字を持つ。以後添字  $i$  は被験者、 $j$  は尺度、 $k$  は時系列型データでは時点、SD型データでは概念をあらわすものとする。そして、それぞれを被験者相、尺度相、時点相または概念相と呼ぶ。2相データには、このうちのいずれか2つの相のみが存在するわけである。

さて、3相データを通常因子分析によって処理しようとする、どうしても何らかの方式によって、2相データとして取り扱わなければならない。通常は、次の2つのうちどちらかが採用される。

[方式A] 時点(または概念)と尺度のすべての組み合わせを尺度相の一つの要素とみなす。データの基準化は

$$\frac{1}{N_i} \sum_i x_{ijk} = 0 \quad (j=1, \dots, N_j, k=1, \dots, N_k) \quad (18)$$

$$\frac{1}{N_i} \sum_i x_{ijk}^2 = 1 \quad (j=1, \dots, N_j, k=1, \dots, N_k) \quad (19)$$

のようになされ、

$$r_{jjkk'} = \frac{1}{N_i} \sum_i x_{ijk} x_{ijk'} \quad (20)$$

を要素とする、 $N_j N_k \times N_j N_k$  の(一般に大きな)相関行列が分析の出発点となる(図1)。データ  $x_{ijk}$  は、

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_m (jkm) f_{im} \quad (21)$$

という形で近似され、因子負荷は、時点(または概念)と尺度の組み合わせごとに独立に得られる。

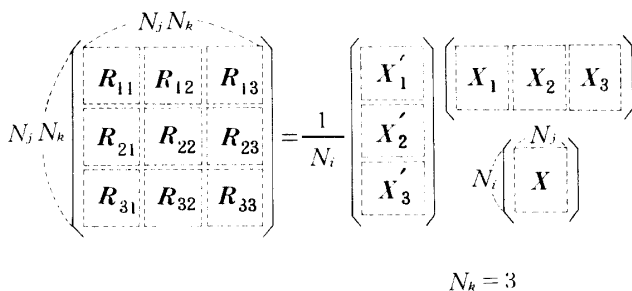


図1 方式Aの相関行列 ( $X'$ は  $X$ の転置を示す)

[方式B] 各被験者の各時点(または概念)のデータ(ベクトル)を、それぞれ被験者相の一つの要素とみなす。すなわちデータを、

$$\frac{1}{N_i N_k} \sum_i \sum_k x_{ijk} = 0 \quad (j=1, \dots, N_j) \quad (22)$$

$$\frac{1}{N_i N_k} \sum_i \sum_k x_{ijk}^2 = 1 \quad (j=1, \dots, N_j) \quad (23)$$

と基準化し、

$$r_{jj'} = \frac{1}{N_i N_k} \sum_i \sum_k x_{ijk} x_{ij'k} \quad (24)$$

を要素とする尺度間相関行列を分析の出発点とする(図2)。このやり方では、データ  $x_{ijk}$  を、

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_m (ijm) f_{km} \quad (25)$$

という形で近似しようとするのである。従って、因子得点は被験者と概念のすべての組み合わせについて独立に得られることになる。

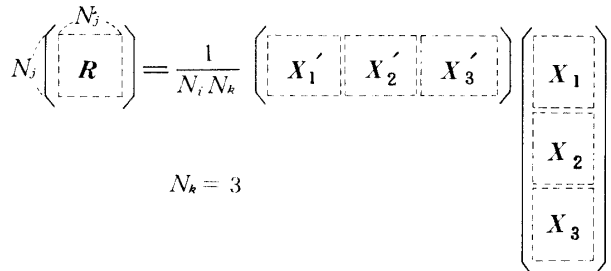


図2 方式Bの相関行列

方式Bは時系列型データにもSD型データにも用いられるが、方式AがSD型データに適用された例はほとんどないと思われる。このような方式の選択は、研究の目的によるところが大きい。すなわち、方式Bにおけるデータ変換(22)、(23)では、時点(または概念)の平均値の情報は生き残るのに対し、方式Aの変換(18)、(19)では、それらはすべて0となってしまふ。時系列的データでは、平均値の時系列的変動に興味を持たれる場合もあるが、一般には、むしろいわゆる因子構造の時系列的变化を知ることの方に重点が置かれる場合が多く、方式Aが採用される意味がある(例えば、椋野・柳井(1977)等)。他方、SD型データでは各概念の尺度上での位置の情報(これを以下profile情報という)が重要であるために方式Bが選ばれるのである。

いずれにしても、これらの方式では、組み合わせる1つの相とみなされた2つの相自体の構造及び相の間の関連がはっきりしないうらみがある。例えば、SD型データを方式Bで処理した場合、因子が主として被験者相の分散を説明するのか、profile情報を説明するのかを明らかにすることは困難である。これは、組み合わせられた2つの相に何ら構造的制約が課されないことによるのである。

なお次の2つの方式もありうる。

[方式C] 時系列型データにおいて、時点毎に全く独立に因子分析を行なう。

[方式D] SD型データにおいて、平均profileデータ((尺度)×(概念))を因子分析する。

方式Cでは、時点毎に求められた因子を対応させるこ

### 3 相因子分析の適用上の諸問題

とが困難であるし、かつ全く時系列的情報を用いていないことは問題であろう。方式Dでは、全く個人差が無視されてしまう。

そこで、3つの相のそれぞれの構造と、それらの間の連関を同時に一挙に分析できるような手法への要求が高まってくる。そのような手法の一つが3相因子分析なのである。

#### 3. 3相因子分析

3相因子分析は、3相データ  $x_{ijk}$  を

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_m \sum_p \sum_q a_{im} b_{jp} c_{kq} g_{mpq} \quad (26)$$

という形で近似することを目指す。以下(26)を基本方程式と呼ぶ。まず、このモデルについて出来るだけ Tucker (1964) の原型に忠実に述べてみよう。  $a_{im}$ ,  $b_{jp}$ ,  $c_{kq}$  は、それぞれの相に対応する因子負荷、または因子得点にあたるものであり、それぞれ次の積和行列、

$$S_{ii}' = \sum_j \sum_k x_{ijk} x_{ijk}' \quad (27)$$

$$S_{jj}' = \sum_i \sum_k x_{ijk} x_{ijk}' \quad (28)$$

$$S_{kk}' = \sum_i \sum_j x_{ijk} x_{ijk}' \quad (29)$$

の固有ベクトルに比例するものとして得られる。 $m$ ,  $p$ ,  $q$  は各相の因子を示す添字であり、 $M_m$ ,  $M_p$ ,  $M_q$  は各相の因子数である。 $M_m$ ,  $M_p$ ,  $M_q$  はお互いに等しくなくてもよい。次に  $g_{mpq}$  は核行列 (core matrix) と呼ばれるものの要素であって、(28)(29)(30)の固有ベクトルを、2乗和1に基準化したものを、 $a_{im}^*$ ,  $b_{jp}^*$ ,  $c_{kq}^*$  とするとき、次式によって算出される。

$$g_{mpq}^* = \sum_i \sum_j \sum_k a_{im}^* b_{jp}^* c_{kq}^* x_{ijk} \quad (30)$$

ただし

$$\sum_i a_{im}^{*2} = 1, \quad \sum_j b_{jp}^{*2} = 1, \quad \sum_k c_{kq}^{*2} = 1 \quad (31)$$

((26)の  $g_{mpq}$  は、この  $g_{mpq}^*$  に後で述べるような変換をほどこしたものである。)ここで、2相因子分析における(13)式とよく似た関係

$$\sum_m \sum_p \sum_q g_{mpq}^* = \sum_i \sum_j \sum_k \hat{x}_{ijk}^2 \quad (32)$$

が成立する。また累積寄与率と同じ役割を果たすのが、

$$R_{\hat{x}\hat{x}}^2 = \sum_m \sum_p \sum_q g_{mpq}^* / \sum_i \sum_j \sum_k \hat{x}_{ijk}^2 \\ = \sum_i \sum_j \sum_k \hat{x}_{ijk}^2 / \sum_i \sum_j \sum_k \hat{x}_{ijk}^2 \quad (33)$$

である。もし  $x_{ijk}$  が少くとも総和が0になるように基準化されていれば、 $R_{\hat{x}\hat{x}}^2$  は、 $x_{ijk}$  と  $\hat{x}_{ijk}$  の相関係数の2乗という意味をもつ。

データ  $x_{ijk}$  をあらかじめどのように変換しておくかということは問題である。ここでは前節の方式Aと方式Bに呼応した2種の変換を考える。以下(18)、(19)の変換を行なう場合をモデルA、(22)、(23)の変換を行なう場合をモデルBと呼ぶ。

ここで Tucker の原型を離れ、基本モデル(27)の諸パラメータの単位について考えることにする。以下のやり方によって、3相因子分析が通常の(2相)因子分析の特殊な場合に帰着することを一層明確にすることができる。さらにまた、3相因子分析の結果と通常の因子分析による結果との比較が一層容易になるであろう。

まず、モデルAについて(20)の相関係数を次のように平均したもの考える(図3)

$$\bar{r}_{jj}' = \frac{1}{N_k} \sum_k r_{jkj}' \quad (34)$$

$$\bar{r}_{kk}' = \frac{1}{N_j} \sum_j r_{jkk}' \quad (35)$$

これらは、(29)、(30)の  $s_{jj}'$ ,  $s_{kk}'$  と

$$\bar{r}_{jj}' = \frac{1}{N_i N_k} s_{jj}' \quad (36)$$

$$\bar{r}_{kk}' = \frac{1}{N_i N_j} s_{kk}' \quad (37)$$

という関係にあり、 $b_{jp}^*$ ,  $c_{kq}^*$  は、 $\bar{r}_{jj}'$ ,  $\bar{r}_{kk}'$  を要素とする平均相関行列の固有ベクトルでもある。各々の平均相関行列の  $p$  番目と  $q$  番目の固有値を、 $\lambda_p$ ,  $\lambda_q$  とするとき、(これらは、 $s_{jj}'$ ,  $s_{kk}'$  の積和行列の固有値の  $1/N_i N_k$ ,  $1/N_i N_j$  にあたる)

$$b_{jp} = \sqrt{\lambda_p} b_{jp}^* \quad (38)$$

$$c_{kq} = \sqrt{\lambda_q} c_{kq}^* \quad (39)$$

とすると、これらは平均相関行列の因子負荷に相当する。またこのとき、 $a_{im}^*$  は(210)因子得点  $f_{im}$  に比例する。そこで、

$$a_{im} = \sqrt{N_i} a_{im}^* \quad (40)$$

とすれば、この  $a_{im}$  は  $f_{im}$  と完全に一致する。核行列の要素については、(38)~(40)の変換を相殺するために、

$$g_{mpq} = g_{mpq}^* / \sqrt{N_i \lambda_p \lambda_q} \quad (41)$$

としておく。このモデルAでは、 $b_{jp}$ ,  $c_{kq}$  を尺度相と時点(または概念)相の因子負荷、 $a_{im}$  を被験者相の因子得点と呼ぶ。ここでの因子負荷は、それぞれに対応した因子得点が存在しないため、因子得点と粗データとの相関係数という意味をもちや持たない。しかしながら、通常の相関行列の因子分析における因子負荷とはほぼ同一オーダーの値をとり、比較及び解釈の面からは有利になる\*。

$$\left( \overline{R}_j \right) = \frac{1}{N_k} \left\{ \left( R_{11} \right) + \left( R_{22} \right) + \left( R_{33} \right) \right\}$$

$N_k = 3$

図3 平均相関行列 ( $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{33}$  については図1参照)

モデルBについては、(20)の  $r_{jj'}$  と(28)の  $s_{jj'}$  の間に

$$r_{jj'} = \frac{1}{N_i N_k} s_{jj'} \quad (42)$$

の関係があることから、これを要素とする尺度間相関行列の  $p$  番目の固有値を  $\lambda_p$  とし、(38)の変換をおこなう。これによって  $b_{jp}$  は、(25)の因子負荷 ( $f_{jm}$  と完全に等しいことになる。  $c_{kq}$  と  $a_{im}$  の変換については、多少問題がある。ここでは一応、 $a_{im}$  については(40)の変換を行う。これは  $f_{im}$  と異なり(9)、(10)は満足するものの、(8)を満足せず、通常の意味の因子得点ではない。(実際SD型データでは、ほとんどの場合第1固有値に対応する  $a_{im}$  はすべて正の値をとる。)しかしながら、これも被験者相の因子得点と呼ぶ。  $c_{kq}$  については、(37)の平均積和行列(これは相関行列にならないが)の固有値を用いて(39)の変換をした\*\*モデルBにおける  $c_{kq}$  は、概念相の因子得点と呼ぶ。

かくして、モデルAとモデルBは、それぞれ前節の方式Aと方式Bの発展として捉え得ることが明らかになった。まず、モデルAは(20)において、 $f_{im} = a_{im}$  と置きかえ、因子負荷を

$$(f_{jm}) \cong \sum_p \sum_q b_{jp} c_{kq} g_{mpq} \quad (43)$$

と更に分解したものと考えることが出来るし、モデルBは、(26)において ( $f_{jm} = b_{jp}$  と置きかえ、(26)の  $m$  は  $p$  と読みかえて) 因子得点を

$$(f_{ikp}) \cong \sum_m \sum_q a_{im} c_{kq} g_{mpq} \quad (44)$$

と分解したものと見ることが出来るからである。\*\*\*すなわち、方式A、Bでは独立なものが見なされていた2つの相について、(43)、(44)のような構造的制約を課したものが3相因子分析であるという見方が出来るわけである。

さて、3相因子分析は、(43)、(44)の分解により、通常の場合より更に少数のパラメータによってデータを近似しようとする。従って、因子数が一定である限り、3相因子分析は通常の場合の因子分析の説明力を越えられない。そこで、通常の場合の因子分析による  $R_{jj'}$  に対する、

3相因子分析による  $R_{jj'}$  の比  $\rho$  を考えると、これは通常の場合の因子分析に対する3相因子分析の(あるいは(43)、(44)の分解の)効率の測度として使えることがわかる。この  $\rho$  は、適切なモデルの選択や因子数の決定のために役立つであろう。

最後に、因子回転について述べる。  $b_{jp}$ ,  $c_{kq}$  については、単純構造を目指す回転が一応是認されよう。ここでは前述のように varimax 回転が行なわれる。(  $g_{mpq}$  に対して対応する逆変換がなされるのは当然である。)  $a_{im}$  に対する回転をいかなるものにするかは問題である。ここでは Tucker (1966) に従い、核行列を単純構造に近づけるような回転を行なう。すなわち

$$g'_{mpq} = \sum_m g_{mpq} t_{mm'} \quad (45)$$

なる回転行列を varimax 法によって見出し、その逆変換を  $a_{im}$  に施すわけである。

以上、因子負荷及び因子得点については、通常の場合と同様に解釈することができる。しかしながら、核行列は全く3相因子分析独自の概念である。これは、異なる相の因子の間の関連性をあらわすと考えておけばよい。通常の場合の因子分析でも核行列を導入することは可能である (Levin, 1965)。例えば(2)は

$$x_{ij} \cong \hat{x}_{ij} = \sum_m \sum_{m'} (f_{jm} f_{im} g'_{mm'}) \quad (46)$$

として、  $g'_{mm'}$  が

$$g'_{mm'} \begin{cases} = 1 & (m = m') \\ = 0 & (m \neq m') \end{cases} \quad (47)$$

である場合と考えることができる。すなわち、通常の場合の因子分析では核行列は単位行列なのであり、因子負荷と因子得点は相互に完全に関連しているのである。もし、因子負荷と因子得点をそれぞれ独立に回転させるとすれば、  $g'_{mm'}$  は単位行列ではなくなることになる。前節の方式Dにおいては、このようなやり方がとられることもあるようである。5節において類似の例を示す。

以下の2つの節において、3相因子分析の適用例を示す。時系列型データとSD型データに分けて述べる。モデルの選択、因子数の決定等の問題は6節にまわし、代表的な結果を示して解釈を加える。

\* (前頁)  $b_{jp}$ ,  $c_{kq}$  は2乗和1に基準化されている関係上その値は、 $N_j$ ,  $N_k$  に関係することになり、ここで言う因子負荷より解釈が困難になる。

\*\* これによって  $c_{kq}$  の座標は、profile 間距離に対応するものとなる。

\*\*\* (43)、(44)式の  $\cong$  は、単に“近似的に等しい”を意味する。

4. 分析例1——時系列型データ

ここで分析に用いた時系列型データは、中学生や高校生の社会的態度がどのように形成されるかという、社会的態度の発達過程を明らかにするための縦断的調査研究（久世・速水，1974，1975；久世ほか，1977）によっている。そこでは、中学生や高校生の社会的態度は、保守的態度，革新的態度，大衆社会的態度によって表わされると考えられている。

具体的な資料は、中学1年から高校3年まで同一被調査者に年1回、計6回調査したものである。被調査者は、名古屋大学教育学部附属中学校および高校に、昭和47年から昭和52年に在籍したものである。調査は各年度のおわりに行われ、6回分のデータがすべて有効であった男子30名、女子23名、計53名の縦断的資料が分析に用いられた\*。

なお、調査に用いられた項目は表1の通りであり、実際に用いられた質問紙とは項目の配列順序が異なっていることを付け加えておく。

表1 質問項目（時系列型データ）

項目番号	
1	国の政治は政治家にすっかりまかせた方がよい
2	女が政治などに口だしすべきでない
3	結婚は家柄を重んじなければならない
4	伝統や習慣は尊重すべきである
5	世間をわたるには義理や人情が最も大切である
6	長男が家をつくのは当然だ
7	親孝行は子どもの義務である
8	目上の人にはもっと敬語を使った方がよい
9	学校で定めている校則にはどんな場合にも従うべきである
10	世の中の秩序を守るために上下関係はなくてはならない
11	日本は天皇を中心にとまとまるべきである
12	デモヤストでさわぐのは民主国家の恥である
13	家庭では父親がすべての実権をにぎるのが望ましい
14	個人の自由は尊重すべきである
15	正しいことであれば世間体など気にすべきでない

16	いくら恩義のある人でも筋道のとおらない頼みごとは断った方がよい
17	社会のために正しいことであるなら親の反対をおしきっても行動すべきである
18	いくら伝統だからといっても不合理なことはやめるべきである
19	デモヤストをするのは労働者の当然の権利である
20	先輩の意見でも、まちがっていると思えば、納得できるまで議論する
21	男女の交際は全く自由であり、まわりの人がとやかく言うべきでない
22	政治をよくするためには、もっと進歩的な人から多くの代議士を選出すべきである
23	家庭内の仕事は男女平等に分担すべきである
24	「方角が悪い」などということはまったく信用しない
25	結婚式などの儀式はなるべく簡素化するのがよい
26	家庭では子どもの意見も大人の意見と同等に尊重されるべきである
27	流行語などはよく知っていないはずかしい
28	労働者や大学生のストライキやデモ活動などは関心がない
29	みんなが見ているテレビ番組を見ていないと、とりのこされる気がする
30	国の法律が望ましいものかどうか考える必要はない
31	中・高校生の時代には政治の問題など考えるよりレジャーを楽しんだ方がよい
32	理論よりフィーリングやムードが大切である
33	誰が衆議院の選挙で当選しようとする日本の政治はかわらないと思う
34	今の世の中では平凡な家庭の中にささやかな幸福を求めた方がよい
35	共同募金や歳末助け合い運動があるとなるべくさけるようにする
36	ベトナム戦争など日常生活とかけはなれた政治問題など考えるのはめんどうだ
37	いつの世でもお金がなければ幸福にはなれない
38	皆と同じような持物や服装をしていないとひげめを感じる
39	公害問題は被害者だけの問題である

以下では、まず、一般的な2相の因子分析（方式A～C）による結果を例示し、つぎに、3相因子分析モデル（モデルA）による結果を示す。

表2 種々の方法で得られた尺度相の固有値の比較（時系列型データ）

順位	モデル		（方式）C					
	A	B	中1	中2	中3	高1	高2	高3
1	4.63	4.52	4.56	5.43	4.24	5.55	5.72	6.19
2	2.67	2.78	3.39	3.67	4.13	4.40	3.51	4.17
3	2.53	2.56	3.00	2.71	3.35	3.14	3.08	3.44
4	2.16	2.18	2.88	2.44	2.73	2.68	2.98	2.71
5	1.77	1.80	2.41	2.41	2.29	2.59	2.48	2.34
6	1.72	1.74	2.17	2.29	2.12	2.22	2.26	2.23

\* データの使用を許可していただいた名古屋大学久世敏雄教授に感謝いたします。

表3 Tucker の因子類似性係数(方式Cによる3因子の場合)(時系列型データ)

学年	因子	中 1			中 2			中 3			高 1			高 2			高 3			
学年	因子	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	
中1	I	1.00																		
	II	-0.08	1.00																	
	III	-0.13	0.12	1.00																
中2	I	0.52	-0.36	-0.59	1.00															
	II	0.56	0.05	0.30	0.20	1.00														
	III	0.25	0.44	0.08	-0.09	0.03	1.00													
中3	I	0.73	-0.55	-0.18	0.65	0.41	0.01	1.00												
	II	-0.23	-0.11	-0.15	-0.21	-0.61	0.26	-0.02	1.00											
	III	-0.30	0.00	0.04	0.00	-0.04	-0.18	-0.06	-0.04	1.00										
高1	I	0.74	-0.19	-0.32	0.57	0.21	0.19	0.67	-0.08	1.00										
	II	0.43	-0.29	0.01	0.16	0.53	-0.23	0.40	-0.33	-0.16	0.13	1.00								
	III	0.07	-0.53	-0.28	0.56	0.05	-0.45	0.39	-0.29	0.22	0.09	-0.09	1.00							
高2	I	0.72	-0.30	-0.14	0.55	0.63	-0.12	0.72	-0.42	-0.24	0.60	0.61	0.29	1.00						
	II	0.29	-0.14	0.04	-0.15	0.02	0.16	0.27	0.29	-0.38	0.22	0.40	-0.39	0.16	1.00					
	III	0.84	-0.38	-0.35	0.48	0.03	-0.12	0.50	-0.14	0.19	0.17	0.18	0.52	0.23	0.08	1.00				
高3	I	0.68	-0.38	-0.04	0.41	0.55	-0.12	0.70	-0.32	-0.25	0.48	0.71	0.21	0.82	0.51	0.41	1.00			
	II	-0.00	0.28	0.04	-0.30	-0.42	0.39	-0.15	0.59	-0.20	0.06	-0.23	-0.50	-0.38	0.46	-0.27	-0.20	1.00		
	III	-0.50	0.22	0.36	-0.50	0.04	0.04	-0.47	-0.06	0.29	-0.57	0.09	-0.30	-0.37	0.09	-0.20	-0.15	-0.00	1.00	

最初に、3つの方法によって得られた尺度相の固有値の大きさを比較しておく。表2に示したように、モデルAとモデルB(方式B)の大きさの変化は非常に似ていることがわかる。また、方式Cの中でも各学年間の固有値の大きさの変化の状態は非常に近い。以下では、いずれの方法においても、主に3因子解について検討を加えていくことにする。

まず、方式Cによって得られた各時点での尺度相の因子負荷行列の比較から検討することにしよう。時点ごとに3つつ合計18の因子負荷の類似度をみるために、

Tuckerの因子類似性係数を求めた。その結果が表3である。高校3年の第1因子を基準にして、それとの係数値が高い他の学年の因子をしらべてみると、各学年で表中にゴチック数字で示した数値をとる因子と最も類似度が高いことがわかる。なお、高校3年の他の2つの因子を軸にした場合には、明確な結果はみられない。この結果にもとづいて、6年間の該当する因子負荷行列を示したのが表4である。表4に示された各時点での因子の内容は、いわゆる大衆社会的態度を示すものと考えられるが、中学1年から高校3年までの因子負荷を比較してみると、安定した数値をとる項目はあまり多くなく、方式Cでは時点間で因子の対応をとることが難しいことを示唆している。

さらに、方式Aによる因子分析も試みた。得られた3

$$* \phi_{mm'} = \frac{\sum_j (l_{jm} l_{jm'})}{\sqrt{\sum_j (l_{jm}^2)} \sqrt{\sum_j (l_{jm'}^2)}}$$

因子解を検討してみると、これまで同様、第I因子ではかなりのまとまりがみられたが、第II因子と第III因子では負荷量の時間的変動の大きい項目が多く、解釈が困難であった。表5には第I因子の因子負荷行列を示した。表から明らかなように、いわゆる大衆社会的な内容の項目で負荷量が高く、しかも6時点での変動をみるとかなり安定した数値をとっていることがわかる。これまでにとり上げた方法によれば、いずれの場合にも、3因子解のうちの1つの因子は内容的に大衆社会的因子と考えられるものであり、6年間にわたって、かなり安定した傾向と考えることができた。しかし、他の2つの因子については、内容的にも数値的にもあまり明確な傾向を見出すことができなかった。

なお、方式Bによる因子負荷(3相因子分析モデルBの尺度相の因子負荷と同じ)は、表6のように、次の3相因子分析モデルAによるものと極めてよく似たものとなったが、方式Bによっては因子構造の時間的な変化を見出すことが出来ない。

つぎに、3相因子分析モデルAの結果について述べることにする。

まず、尺度についての因子負荷行列をみていく。ここでは、3因子解と4因子解とについて解釈してみた。表6には3因子の場合の、表7には4因子の場合の因子負荷行列を示した。表6では、第I因子は、これまで見てきた結果と同じように、大衆社会的な内容の項目で数値が高いことがわかる。一方、第II因子は、保守的および大衆社会的項目のうち、おもに政治・社会的問題からの回避に関する項目に数値が高いことから、ここでは一応

3 相因子分析の適用上の諸問題

表4 各時点の尺度相の因子負荷行列の比較(3因子解)  
(Tuckerの因子類似性係数にもとづいて  
対応のある因子の負荷行列を示す)  
(時系列型データ)

学年 項目番号	学年					
	中1	中2	中3	高1	高2	高3
1	0.37	0.51	0.49	0.24	0.56	0.55
2	-0.05	0.77	0.06	-0.23	0.50	0.56
3	-0.06	0.27	0.26	-0.17	0.55	0.23
4	-0.20	-0.18	0.03	-0.21	0.11	0.35
5	-0.16	-0.41	0.10	0.01	0.10	0.49
6	0.33	0.47	0.50	-0.07	0.65	0.59
7	-0.05	-0.31	0.10	-0.34	-0.01	-0.07
8	-0.06	0.05	-0.01	-0.19	-0.05	0.01
9	0.12	0.10	0.46	0.07	0.06	0.23
10	-0.13	-0.02	0.14	0.01	0.16	0.15
11	0.24	0.03	0.31	0.39	0.15	0.39
12	0.34	0.26	0.40	0.30	0.46	0.39
13	0.19	0.04	0.35	0.37	0.09	0.51
14	0.14	-0.35	-0.09	0.30	0.22	0.33
15	-0.41	0.02	0.16	-0.29	-0.34	-0.02
16	-0.13	-0.20	0.20	-0.49	-0.36	-0.00
17	-0.14	0.09	-0.00	0.14	-0.10	0.33
18	0.01	-0.12	0.00	0.08	0.04	-0.01
19	-0.04	-0.13	-0.30	-0.23	-0.06	0.16
20	0.15	-0.22	0.15	-0.35	-0.43	-0.19
21	0.32	0.18	0.14	0.15	0.18	0.22
22	-0.28	-0.19	0.16	-0.19	-0.02	0.06
23	0.13	-0.34	-0.03	0.23	-0.04	-0.06
24	0.16	0.45	-0.04	-0.03	-0.37	-0.08
25	-0.05	0.08	-0.49	-0.49	-0.13	0.13
26	0.31	0.09	0.16	-0.11	-0.08	0.28
27	0.61	-0.01	0.73	0.78	0.51	0.25
28	0.17	0.16	0.13	-0.22	0.33	0.51
29	0.57	0.05	0.53	0.77	0.28	0.24
30	0.48	0.35	0.63	0.57	0.66	0.43
31	0.74	0.42	0.18	0.46	0.44	0.65
32	0.48	0.30	0.61	0.75	0.50	0.50
33	0.43	0.13	0.63	0.46	0.47	0.65
34	0.15	-0.31	0.12	0.46	0.27	0.38
35	0.30	0.71	0.01	0.07	0.36	0.05
36	0.69	0.63	0.36	0.15	0.37	0.69
37	0.24	0.49	0.20	0.13	0.54	0.66
38	0.47	0.06	0.44	0.76	0.37	0.25
39	0.39	0.65	0.23	0.08	0.54	0.40

政治的無関心と呼ぶことにしておく。第Ⅲ因子は、保守的な内容の項目で負の値が大きく、革新的な内容の項目で正の値が大きいのので、保守・革新因子と考えることができる。

表7の4因子の場合には、第Ⅰ因子と第Ⅱ因子は、上述の3因子の場合と同じように、それぞれ大衆社会的態度、政治的無関心をあらわす因子であると考えることができる。第Ⅲ因子は、いわゆる革新的態度をあらわす項目での負荷量が高く、革新的態度因子といえよう。一方、第Ⅳ因子は、伝統を重んじる内容の項目での負荷量が高く、保守的態度因子と考えられるものである。ここで、

表5 方式Aによる尺度相の因子負荷行列  
(第Ⅰ因子)(時系列型データ)

項目番号	学年					
	中1	中2	中3	高1	高2	高3
1	-0.25	-0.17	-0.26	-0.44	-0.35	-0.46
2	0.08	-0.04	-0.01	-0.03	-0.18	0.01
3	-0.16	-0.25	-0.07	-0.07	-0.33	0.06
4	-0.09	0.01	-0.04	-0.08	-0.33	-0.02
5	-0.01	-0.10	-0.22	-0.15	-0.37	-0.39
6	-0.30	-0.27	-0.37	-0.22	-0.35	-0.31
7	-0.12	-0.07	-0.11	0.08	-0.10	0.01
8	0.17	-0.09	0.01	0.03	-0.04	-0.09
9	-0.19	-0.47	-0.46	-0.20	-0.23	-0.11
10	-0.03	-0.09	-0.27	-0.05	-0.17	-0.17
11	-0.30	-0.56	-0.27	-0.51	-0.35	-0.29
12	-0.17	-0.46	-0.18	-0.33	-0.43	-0.45
13	-0.15	-0.28	-0.30	-0.41	-0.25	-0.20
14	-0.13	0.08	0.11	-0.22	-0.21	-0.13
15	0.26	0.22	-0.00	0.25	0.23	0.16
16	0.08	0.18	-0.08	0.24	-0.10	0.00
17	0.15	0.24	0.01	-0.08	-0.08	0.07
18	0.11	0.21	0.07	0.05	-0.22	-0.04
19	0.06	0.31	0.05	0.09	0.07	-0.03
20	-0.18	0.13	0.00	0.01	-0.13	-0.20
21	-0.32	-0.00	-0.28	-0.20	-0.30	-0.37
22	0.19	-0.10	-0.05	0.19	-0.19	-0.04
23	-0.17	-0.05	0.04	-0.09	0.02	-0.16
24	0.15	0.13	-0.02	0.23	0.19	0.17
25	0.17	0.26	0.36	0.48	0.07	0.26
26	-0.19	0.03	-0.16	-0.09	-0.26	-0.24
27	-0.52	-0.59	-0.70	-0.65	-0.72	-0.71
28	-0.28	-0.44	-0.16	-0.06	-0.40	-0.29
29	-0.56	-0.25	-0.53	-0.64	-0.57	-0.57
30	-0.13	-0.19	-0.49	-0.61	-0.49	-0.22
31	-0.44	-0.46	-0.29	-0.56	-0.66	-0.54
32	-0.52	-0.56	-0.59	-0.59	-0.64	-0.46
33	-0.24	-0.34	-0.51	-0.33	-0.41	-0.43
34	-0.41	-0.29	-0.39	-0.42	-0.54	-0.40
35	-0.24	0.07	0.08	-0.03	-0.14	0.22
36	-0.32	-0.50	-0.34	-0.41	-0.35	-0.50
37	-0.12	-0.00	-0.18	-0.32	-0.30	-0.36
38	-0.30	-0.32	-0.48	-0.75	-0.42	-0.57
39	-0.24	-0.17	-0.11	-0.18	-0.36	-0.12

3因子の場合と4因子の場合とを比べてみると、前者における保守・革新因子が、後者では保守的態度と革新的態度を分けて考えることができる点に違いがみられる。

つぎに、時点相をとりあげる。表8には、調査時点間の相関行列を示した。表から明らかなように、いわゆる準 simplex 構造を示していることがわかる。また、6年間のうちでは後半になるほどとなり合った2時点間の相関が高くなる傾向があるが、この結果から直ちに発達の意味での安定性が増したと考えるのは早計であると思われる。なお、このような構造をあえてvarimax回転することには疑問も残るが、青年期の一般的なとらえ方とも関連して、名義的な分類のしかたをとることに意義があると考え、ここでは一応時点因子として、2因子抽



表6 モデルAとモデルBによる尺度相の因子負荷  
(3因子)(時系列型データ)

因子 モデル 項目番号	I		II		III	
	A	B	A	B	A	B
1	-0.19	-0.21	0.45	0.32	-0.16	-0.25
2	0.14	0.04	0.66	0.54	0.08	-0.06
3	-0.01	-0.02	0.35	0.28	-0.23	-0.26
4	-0.03	-0.01	0.08	0.03	-0.19	-0.19
5	-0.33	-0.26	-0.05	-0.12	0.04	-0.08
6	-0.20	-0.22	0.49	0.33	-0.14	-0.30
7	-0.09	-0.02	-0.18	-0.21	-0.31	-0.28
8	0.02	0.07	-0.06	-0.11	-0.47	-0.37
9	-0.12	-0.08	0.21	0.06	-0.49	-0.52
10	-0.14	-0.08	0.09	0.06	-0.20	-0.18
11	-0.22	-0.20	0.28	0.14	-0.28	-0.36
12	-0.30	-0.25	0.22	0.04	-0.33	-0.41
13	-0.17	-0.15	0.30	0.15	-0.32	-0.40
14	-0.31	-0.27	-0.01	0.02	0.36	0.24
15	0.14	0.09	-0.10	-0.14	0.39	0.22
16	0.01	0.02	-0.26	-0.24	0.04	0.01
17	0.03	-0.05	0.16	0.08	0.42	0.22
18	-0.08	-0.06	-0.16	-0.14	0.22	0.15
19	0.04	0.02	-0.10	0.02	0.52	0.46
20	-0.09	-0.04	-0.32	-0.33	0.00	-0.04
21	-0.32	-0.36	0.14	0.06	0.52	0.29
22	-0.01	-0.03	-0.01	-0.07	0.00	-0.06
23	-0.18	-0.11	-0.32	-0.23	0.14	0.15
24	0.09	0.03	0.01	0.02	0.35	0.25
25	0.31	0.24	0.04	0.06	0.21	0.18
26	-0.33	-0.30	-0.15	-0.18	0.41	0.23
27	-0.72	-0.66	0.07	0.03	-0.14	-0.17
28	-0.15	-0.16	0.36	0.22	-0.16	-0.26
29	-0.63	-0.54	0.05	0.02	-0.06	-0.08
30	-0.36	-0.35	0.43	0.30	-0.04	-0.16
31	-0.59	-0.63	0.33	0.26	0.26	0.08
32	-0.66	-0.61	0.15	0.04	-0.02	-0.13
33	-0.37	-0.29	0.23	0.20	0.00	-0.03
34	-0.45	-0.34	-0.09	-0.19	-0.26	-0.31
35	0.19	0.10	0.59	0.62	0.09	0.11
36	-0.30	-0.34	0.59	0.51	0.04	-0.07
37	-0.20	-0.22	0.38	0.37	0.21	0.12
38	-0.64	-0.54	-0.01	-0.01	-0.14	-0.13
39	0.00	-0.06	0.67	0.66	0.02	-0.03

表8 時点間平均相関行列(時系列型データ)

	中1	中2	中3	高1	高2	高3
中1	1.00					
中2	0.35	1.00				
中3	0.27	0.38	1.00			
高1	0.24	0.33	0.43	1.00		
高2	0.25	0.32	0.41	0.47	1.00	
高3	0.24	0.31	0.40	0.46	0.55	1.00

出することにした。表9が因子分析の結果である。第I因子は中学3年以降での負荷量が大きく、第II因子は中学1年と中学2年で負荷量が大きいことがわかる。

つぎに、核行列についてみることにする。ここには、

表7 尺度の因子負荷行列(4因子)  
(時系列型データ)

因子 項目番号	因子			
	I	II	III	IV
1	0.24	0.45	-0.11	0.08
2	-0.23	0.64	0.14	0.19
3	0.02	0.33	-0.13	0.24
4	-0.07	0.03	0.04	0.43
5	0.15	-0.11	0.35	0.39
6	0.10	0.44	0.13	0.45
7	-0.02	-0.25	0.01	0.58
8	-0.00	-0.10	-0.28	0.43
9	0.11	0.16	-0.22	0.54
10	0.11	0.06	-0.05	0.27
11	0.26	0.27	-0.14	0.24
12	0.37	0.21	-0.21	0.18
13	0.14	0.26	-0.08	0.42
14	0.17	-0.02	0.45	-0.04
15	-0.31	-0.12	0.41	-0.00
16	-0.11	-0.29	0.16	0.19
17	-0.21	0.14	0.48	0.03
18	0.02	-0.15	0.22	-0.09
19	-0.22	-0.10	0.53	-0.10
20	-0.01	-0.35	0.16	0.21
21	0.14	0.13	0.62	-0.07
22	-0.04	-0.03	0.09	0.15
23	0.27	-0.28	-0.01	-0.38
24	-0.10	0.04	0.19	-0.31
25	-0.42	0.02	0.20	0.08
26	0.16	-0.17	0.54	-0.01
27	0.77	0.07	0.03	0.04
28	0.10	0.32	0.03	0.32
29	0.67	0.06	0.05	-0.05
30	0.39	0.44	0.03	0.01
31	0.50	0.33	0.40	-0.04
32	0.59	0.12	0.24	0.19
33	0.31	0.21	0.17	0.16
34	0.41	-0.13	0.02	0.36
35	-0.12	0.62	-0.10	-0.23
36	0.28	0.59	0.13	0.06
37	0.09	0.36	0.31	0.08
38	0.68	-0.01	0.01	0.04
39	0.04	0.69	-0.04	-0.06

表9 時点の因子負荷行列  
(時系列型データ)

学年	因子	
	I	II
中1	0.08	0.86
中2	0.31	0.71
中3	0.61	0.37
高1	0.74	0.19
高2	0.79	0.15
高3	0.80	0.12

表10、表11に示したように、2種類の組み合わせについて解釈を試みる。表10では、被験者因子1から3が尺度因子IからIIIに対応していることがわかる。また、大衆

### 3 相因子分析の適用上の諸問題

社会的態度と政治的無関心については、青年期の前半からかなり一貫した傾向が認められるのに対して、保守一革新因子が後半になって分化再構成されていくことがわかる。

表10 核行列 ( $M_m = 3, M_p = 3, M_q = 2$ )  
(時系列型データ)

被験者因子	時点因子	尺度因子		
		I	II	III
1	I	1.02	0.09	-0.05
	II	0.65	-0.04	0.40
2	I	-0.25	1.02	-0.04
	II	0.11	0.53	0.30
3	I	-0.03	0.07	1.00
	II	-0.01	-0.02	0.34

表11では、被験者因子を5因子、尺度因子を4因子とっている。ここでも、被験者因子の1から4は尺度因子のIからIVに対応しており、特に大衆社会的態度はかなり早い時期から一貫した傾向として認められている。また、他の3つの尺度因子は、後半になって明確になる傾向があり、上で述べた再構成が行なわれるものと思われる。さらに、被験者因子の5と尺度因子のIIとの対応がかなり一貫してみられることから、政治的無関心には、6年間を通じて不変な部分と後半になって新たに形成される部分とがあることを示唆している。

表11 核行列 ( $M_m = 5, M_p = 4, M_q = 2$ )  
(時系列型データ)

被験者因子	時点因子	尺度因子			
		I	II	III	IV
1	I	-1.00	0.03	-0.17	-0.06
	II	-0.68	-0.03	0.19	-0.22
2	I	0.17	0.78	-0.04	0.06
	II	-0.23	0.06	0.22	-0.15
3	I	-0.00	0.19	0.98	-0.09
	II	0.00	0.07	0.38	0.14
4	I	0.05	0.16	-0.04	0.86
	II	0.05	0.23	-0.05	0.22
5	I	0.06	-0.62	-0.08	-0.12
	II	0.05	-0.66	0.05	0.42

これまでに見てきた結果から、学年毎に単純に因子分析を行なった結果や、その他の2相因子分析によって得られた結果では、わずかに大衆社会的態度因子が認められただけで、ほとんど学年間の対応が見られなかったにもかかわらず、3相因子分析では、時間的な変化も含めて、明瞭な結果を示すことができたことがわかる。この点に3相因子分析の有効性をみることができよう。

### 5. 分析例2 —— S D型データ

ここでは、2つのデータを取りあげる。いずれも通常のSD法の手続きに従ったものであり、一方は音楽を概念とするもの、他方は Rorschach 図版を概念とするものである。

表12 Chopin の24の前奏曲

番号	調性	速度指定
1	ハ長調	<i>Agitato</i>
2	イ短調	<i>Lento</i>
3	ト長調	<i>Vivace</i>
4	ホ短調	<i>Largo</i>
5	ニ長調	<i>Allegro molto</i>
6	ロ短調	<i>Lento assai</i>
7	イ長調	<i>Andantino</i>
8	嬰ヘ短調	<i>Molto agitato</i>
9	ホ長調	<i>Largo</i>
10	嬰ハ短調	<i>Allegro Molto</i>
11	ロ長調	<i>Vivace</i>
12	嬰ト短調	<i>Presto</i>
13	嬰ヘ長調	<i>Lento</i>
14	変ホ短調	<i>Allegro</i>
15	変ニ長調	<i>Sostenuto</i>
16	変ロ短調	<i>Presto con fuoco</i>
17	変イ長調	<i>Allegretto</i>
18	ヘ短調	<i>Allegro molto</i>
19	変ホ長調	<i>Vivace</i>
20	ハ短調	<i>Largo</i>
21	変ロ長調	<i>Cantabile</i>
22	ト短調	<i>Molto agitato</i>
23	ヘ長調	<i>Moderato</i>
24	ニ短調	<i>Allegro appassionato</i>

#### 1) 音楽のSD法による評定\* (SD型データ1)

概念として、Chopinのピアノ曲「24の前奏曲作品28」を用いた。これは表12の24の曲からなり、調性からみると、24の長短調のすべてを尽している。奇数番号の曲は長調で一般的には明るい感じであり、偶数番号は短調で暗い感じを与える。テンポも、最も速いプレストから最も遅いレントまでそろっている。これらをテープに録

\* データを提供していただいた南俊弘氏に感謝します。

音したものを1曲ずつ提示し、その都度印象の評定を求めた。長さは、かなりまちまちであるが、長いものは約80秒程度のところで切つてあるため、全体の長さは約26分である。

尺度は、表15に示す20の形容詞対であり、評定段階は7である。被験者は大学生38名であった。

以下に示す結果はすべてモデルBによっている。まず因子数  $M_m = 1, M_p = 2, M_q = 2$  の場合をとりあげよう。被験者相の固有値は、最大のものから順に 7392.42, 903.55, 713.81, 661.71, 604.22 となっており、第1固有値が極めて大きい。このため、被験者因子を1つしかとっていないにもかかわらず、 $R_{ii}^2 = .358, \rho = .545$  に達している。かつ被験者相の因子得点(図5の縦軸に示したものとほぼ同じ)は、すべて正の値をとり、かつほぼ1の近辺にある(平均.97, 標準偏差.26)。このことから、この条件では個人差はあまり問題にならず、尺度と概念の全般的関係が示されていると言えよう。これは、核行列の機能を見るのに適している。図4-a, bは、尺度相の因子負荷と概念相の因子得点をそれぞれ平面上にプロットしたものである。図中に点線矢印で示したものが、核行列(表13)のその次元に対応するベクトルである。この図について少し説明しておこう。この条件で基本モデルは

$$\hat{x}_{ijk} = a_i \sum_{q=1}^2 c_{kq} \left( \sum_{p=1}^2 b_{jp} g_{pq} \right) \quad (48)$$

となっている(添字  $m$  は常に1であるので省略した。 $a_i$  は単なる scale factor である)。(48)のカッコ内の  $\sum b_{jp} g_{pq}$  は、図4-aの個々の点を原点からの位置ベクトル  $b = (b_{j1}, b_{j2})$  とみなしたとき、それとベクトル  $g_1 = (g_{11}, g_{12})$  または  $g_2 = (g_{21}, g_{22})$  との内積

である。これは、幾何的には点  $(b_{j1}, b_{j2})$  のベクトル  $g_1$ 、または  $g_2$  への写影として認識できる。図4-aに書きこまれた  $g_1, g_2$  は、長さを  $|g_1|, |g_2|$  に等しく、位置は中心が原点にくるようにしてある。これは、概念相の軸が尺度相でどのような方向にあるかを示すものであり、2つの相の軸の関連の仕方をあらわすものである。また、 $|g|$  は2つの相の関連の強さを示すと考えられる。通常因子分析における因子負荷と因子得点の関係では、 $g_1 = (1, 0), g_2 = (0, 1)$  となっていると考えればよい。この場合2つの相の軸は互いに完全に重なっているわけである。なお、(48)は

$$\hat{x}_{ijk} = a_i \sum_{p=1}^2 b_{jp} \left( \sum_{q=1}^2 c_{kq} g_{pq} \right) \quad (49)$$

と書くこともできるから、概念相の点に対する尺度相の軸の関係も同様にあらわすことができるわけである。

尺度相の第1軸は「激しい」「力強い」「劇的な」「厳しい」等の形容詞によって特徴づけられており、第2軸は「朗らかな」「明るい」「軽やかな」「華やかな」等の形容詞で特徴づけられる。第1軸はOsgoodの言う活動性因子と勢力因子の混合である力動性因子と考えられ、第2軸はおおむね評価因子に相当するが、ここではむしろ明暗因子と呼んでおく。概念相の2つの軸は図中に示された核行列のベクトルから知られるように、おおよそ尺度相の2つの軸と同一の意味をもっている。このことは、第2象限(激しく、暗い)にだいたい短調の曲が集中し、第4象限(穏やかで、明るい)に長調の曲が集まっていることからもうなずける。なお、概念相の第1象限から第3象限への約45°の軸を考えると、それへの写影が曲のテンポを表現する。これは尺度相の形容詞対「速い-遅い」に対応している。

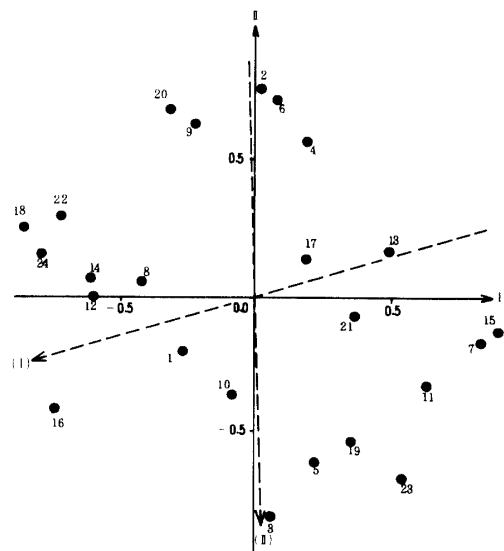
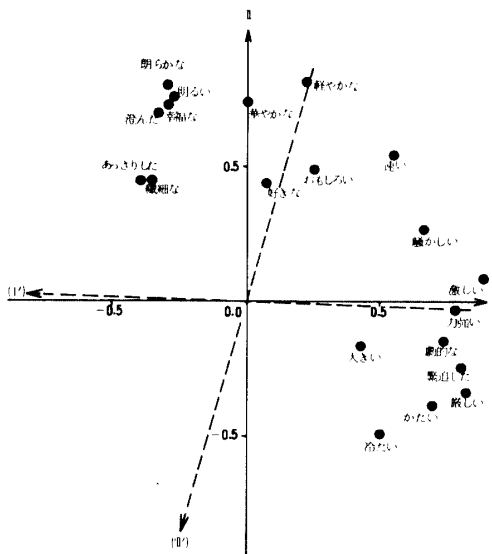


図4-a 尺度相の因子負荷(2因子)(SD型データ1)

図4-b 概念相の因子得点(2因子)(SD型データ1)

3 相因子分析の適用上の諸問題

表 13 核行列 ( $M_m=1, M_p=2, M_q=2$ )  
(S D型データ 1)

概念因子 \ 尺度因子	I	II
	I	-1.67
II	-0.49	-1.72

次に、 $M_m=2, M_p=3, M_q=3$  の場合を見る。 $R_{xx}^2 = .398, \rho = .697$  にそれぞれ上昇する。図 6-a, b に、尺度相と概念相の因子負荷、因子得点を図示した。尺度相については、「好きな」「おもしろい」の負荷が低下していることを除き、先の場合とほとんど同一である。本来評価因子という名称は、「好きな-嫌いな」に由来するものであるから、第 II 軸を明暗因子と呼ぶことは適切であろう。概念相の因子得点については、多少の変化が見られるが、基本的な位置関係は保持している。核行列(表 14)を見ると、この向軸に関連が高いのは、被験者の第 1 因子である。この因子の因子得点は、先の  $M_m=1$  の場合と同様すべて正である(平均 0.97, 標準偏差 0.25)。これと各被験者の全データの分散の関係を図示したものが図 5 であるが、この間の相関係数は 0.84 に達している。このように、被験者相第 1 因子の因子得点の個人差は、主として被験者の反応の極端さの程度に由来するものである。これが概念とは独立な単なる反応傾向を示すものか、概念に対する感受性の程度を表現するものであるかは、このデータからは明らかでないが、いずれにしても、この因子得点は  $\hat{x}_{ijk}$  の単位に影響するにすぎない。図 6-a, b に示された尺度と概念の 2 つの因子は、本質的にはこのデ

ータの個人差を含まない部分 (profile 情報) に由来するものと見られる。次に、被験者相第 2 因子の核行列から、これらが主としてかかっている部分である尺度相の第 II, 第 III 因子及び、概念相の第 I, 第 III 因子をプロットしたものが図 7-a, b である。尺度相の第 III 因子は、「好きな」「おもしろい」によって特徴づけられる。これは、主観的好みに対応する本来の意味での評価因子と見られる。概念相の第 III 因子は、図から明らかなように概念相の第 I 因子と高い連関を持つ。この図に(III)として示された点線矢印が、被験者相第 2 因子の核行列のベクトルであり、尺度相第 III 因子の方向をあらわす。す

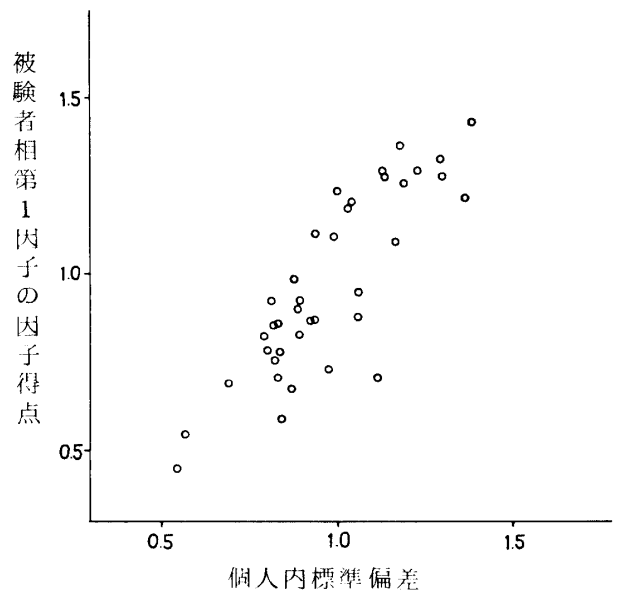


図 5 個人内標準偏差と被験者相第 1 因子の因子得点の関係 (3 因子) (S D型データ 1)

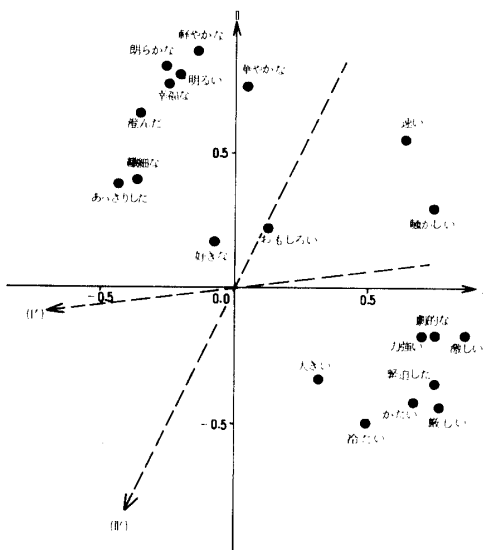


図 6-a 尺度相の因子負荷 (第 1 因子と第 II 因子) (3 因子) (S D型データ 1)

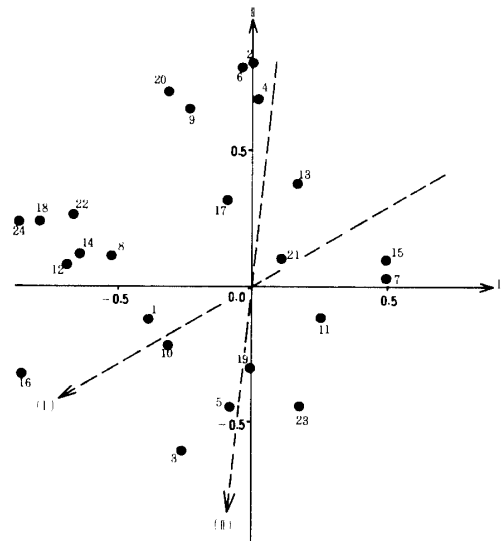


図 6-b 概念相の因子得点 (第 1 因子と第 II 因子) (3 因子) (S D型データ 1)

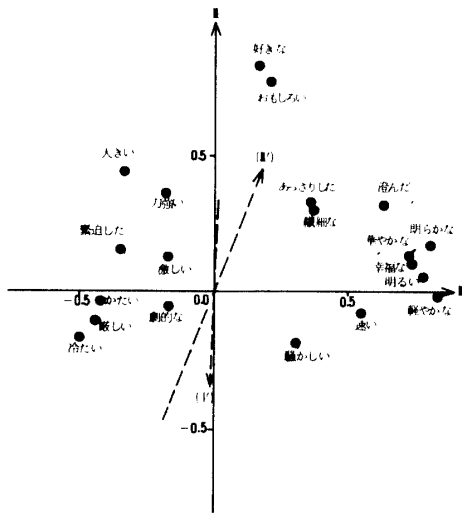


図7-a 尺度相の因子負荷(第II因子と第III因子)  
(3因子)(SD型データ1)

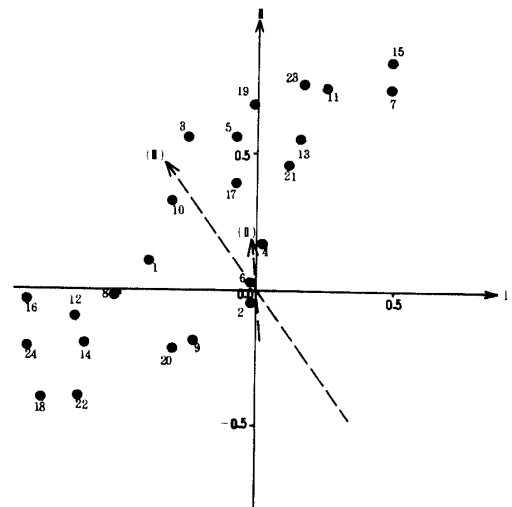


図7-b 概念相の因子得点(第I因子と第III因子)  
(3因子)(SD型データ1)

表14 核行列 ( $M_m=2, M_p=3, M_q=3$ )  
(SD型データ1)

被験者 因子	尺度 概念 因子	尺度因子		
		I	II	III
1	I	-1.43	-0.17	-0.04
	II	-0.83	-1.67	0.15
	III	-0.77	0.74	0.01
2	I	0.19	-0.03	-0.69
	II	-0.02	0.26	0.20
	III	-0.20	0.38	0.94

なわち、この軸への写影が被験者の好みを示しているのであるが、注目すべきことに、その値はほとんど0以上となる。このことから、(III)軸上での値が比較的大きい3, 5, 16, 19のような曲は、値が0に近い2, 6, 9, 20に比べて好みの個人差が大きいと考えられる。なお、被験者相第2因子の因子得点は、ほとんど平均0分散1である。

最後に、以上2つの場合に対して、尺度毎に  $x_{ij}$  と  $\hat{x}_{ij}$  の相関係数を算出したものが表15である。この中では、「おもしろい」と「好きな」における相関が著しく低いのが目立つ。それは  $M_m=1$  の場合において特に著しい。図4-aにおいて一見他の評価因子に負荷の高い項目と同質に見えるこの2つの尺度は、実際には全く異質なものであることがこれによってもわかる。 $M_m=2$  の場合にも、相変らずこれらの尺度の相関は低いが、 $M_m=1$  の場合よりはっきりと上昇している。他方、他の多くの尺度

では上昇はほとんど見られない。結局、このデータにおいては、個人差の大きい尺度と小さい尺度がはっきり分かれていることが裏づけられる。このようにSD型データにおいて、profile情報と個人差をうまく分離でき、かつ質的に異なる尺度を区別できた点で、この場合も3相因子分析は有効であったと考えられる。

表15 因子数の増加に伴う尺度毎の  
 $x$  と  $\hat{x}$  の相関の変化(SD型データ1)

尺 度		$\alpha^*$	$\beta^{**}$
1. 明るい	-暗い	0.68	0.68
2. 遅い	-速い	0.79	0.80
3. おもしろい	-つまらない	0.18	0.27
4. 激しい	-やさしい	0.75	0.76
5. 軽やかな	-重々しい	0.78	0.79
6. 澄んだ	-濁った	0.60	0.66
7. 力強い	-弱々しい	0.61	0.63
8. 暖かい	-冷たい	0.51	0.54
9. 緊迫した	-のどかな	0.68	0.68
10. 小さい	-大きい	0.41	0.47
11. 渋い	-華やかな	0.58	0.60
12. かたい	-やわらかい	0.65	0.67
13. 幸福な	-悲しい	0.62	0.62
14. 激しい	-おたやかな	0.75	0.74
15. 繊細な	-粗野な	0.41	0.54
16. あつさりした	-くどい	0.46	0.54
17. 騒がしい	-落ち着いた	0.68	0.70
18. 朗らかな	-陰気な	0.68	0.69
19. 抒情的な	-劇的な	0.64	0.67
20. 好きな	-嫌いな	0.12	0.33

\*  $M_m=1, M_p=2, M_q=2$

\*\*  $M_m=2, M_p=3, M_q=3$

3 相因子分析の適用上の諸問題

2) Rorschach 図版の S D法による評定 (SD型データ2)

分析に用いたデータは、10枚のRorschach原図版を呈示刺激(概念)として、SD法によって得られたデータである。用いた尺度は表16に掲げた20対であり、これらは過去の諸研究において抽出された因子に高い負荷を示すものの中から選ばれ、7段階尺度として構成されている。被験者は大学生51名である。

このデータについては、以下モデルAとモデルBの比較を中心にして結果を述べる。因子数はともに  $M_m=2$ ,  $M_p=3$ ,  $M_q=3$  としている。R<sup>2</sup> はモデルAで .155, モデルBで .310 であり、基本モデルの説明力は後者が2倍であることを示している。しかし、この差は先の音楽のデータ程ではない。この点については6節で改めて述べる。 $\rho$  は、モデルAが .789, モデルBが .495でありこちらはモデルAが上回る。

表16 モデルAとモデルBによる尺度の因子負荷 (SD型データ2)

尺度	因子		I		II		III	
	モデル		A	B	A	B	A	B
1. 気持の悪い - 気持の良い	-0.76	-0.77	-0.04	-0.01	0.07	0.20		
2. 厚い - 薄い	0.32	-0.07	-0.00	0.01	0.74	0.79		
3. こわい - やさしい	-0.76	-0.78	-0.09	-0.02	0.20	0.38		
4. 悲しい - うれしい	-0.73	-0.76	0.19	0.26	0.02	0.09		
5. 重い - 軽い	-0.21	-0.30	0.12	0.16	0.72	0.76		
6. にぎやかな - さびしい	0.44	0.49	-0.50	-0.61	0.16	-0.02		
7. 細い - 太い	-0.09	0.05	0.11	-0.08	-0.72	-0.82		
8. 不活発な - 活発な	-0.38	-0.40	0.63	0.70	-0.05	0.14		
9. 冷たい - 熱い	-0.57	-0.57	0.36	0.47	-0.08	-0.01		
10. 好きな - 嫌いな	0.82	0.85	-0.01	-0.01	-0.03	-0.10		
11. きたない - きれいな	-0.77	-0.80	0.01	0.03	0.07	0.14		
12. 男性的 - 女性的	-0.23	-0.33	-0.06	0.10	0.53	0.68		
13. かわいい - にくらしい	0.73	0.77	0.01	-0.20	-0.20	-0.29		
14. 愉快な - 不愉快な	0.81	0.84	-0.10	-0.11	-0.06	-0.16		
15. 固い - 柔かい	-0.43	-0.46	-0.11	-0.10	0.25	0.39		
16. おたやかな - 激しい	0.35	0.38	0.63	0.65	-0.26	-0.30		
17. 遅い - 速い	0.01	-0.02	0.67	0.65	0.08	0.26		
18. 服従的 - 支配的	0.08	0.15	0.19	0.12	-0.44	-0.62		
19. 悪い - 良い	-0.81	-0.83	-0.11	-0.07	0.09	0.19		
20. うるさい - 静かな	-0.12	-0.13	-0.76	-0.79	0.11	0.13		

表16は、モデルAとモデルBの尺度相の因子負荷を示している。両者を比較してみると、ほぼ同一の結果が得られている。モデルA・Bとも、第I因子は「好きな-嫌いな」「悪い-良い」に代表される評価因子であり、第II因子は「遅い-速い」「うるさい-静かな」に代表される活動性因子、第III因子は「厚い-薄い」「細い-太い」に代表される勢力因子であることは明らかである。内容的には、音楽評定のデータと異なり、典型的にOsgood流の3因子が見出されたわけである。両モデルにこのような一致が見られることから、尺度因子に関しては、データの基準化にほとんど影響されないことがわかる。

表17にはモデルAとモデルBにおける概念相の因子負荷(モデルA)、因子得点(モデルB)を示す。モデル

Aでは、10枚の図版が3つのグループに分けられることがわかる。すなわち、第I因子に目立った負荷量を有する図版III, VII, VIII, (IX), X, 第II因子に目立った負荷量をもつ図版I, II, IV, IX, そして、第III因子に目立った負荷を示す図版V, VIの3グループである。

モデルBの場合も図版は3つのグループに分けられる。第1のグループは図版I, III, IV, VII, 第2のグループは図版II, VIII, IX, X, 第3のグループは図版V, VIである。この相では、第III因子を除き2つのモデルの結果にはかなりの相違がある。

表17 概念の因子負荷(モデルA)と因子得点(モデルB)(SD型データ2)

概念 (図版)	モデル		A			B		
	因子		I	II	III	I	II	III
I	-0.07	0.64	-0.00			0.65	0.15	0.14
II	0.30	0.47	0.30			0.17	0.47	0.19
III	0.52	-0.11	0.01			-0.46	0.25	0.03
IV	-0.28	0.67	0.22			1.11	0.18	0.17
V	0.13	0.05	0.70			-0.06	0.01	0.62
VI	0.03	0.10	0.80			0.11	0.01	0.80
VII	0.56	0.14	0.09			-0.75	0.22	0.26
VIII	0.61	-0.07	0.10			-0.30	0.46	0.13
IX	0.48	0.50	-0.25			0.08	0.63	-0.15
X	0.69	-0.04	0.07			-0.43	0.70	-0.11

次に、被験者相を考える。この相の内積行列(27)の固有値を両モデルでも比較すると注目すべき相違がみられる。モデルAの固有値は、1060.59, 944.43, 596.70, 557.18, 506.16 とほぼ同程度に大きな2つの固有値が見出されるのに対し、モデルBでは、3032.93, 789.23, 522.50, 442.01, 392.61 と最大固有値が圧倒的に大となっている。このことは、このデータに含まれるprofile情報の大きさを物語る。またモデルBにおける被験者相の因子得点はすべて正で、平均0.91, 標準偏差0.42であり、個人の全データの標準偏差との相関が.73となっており、先の音楽のデータと同様、被験者の反応の極端さの反映とみられる。

表18 モデルAにおける核行列 (SD型データ2)

被験者因子	尺度因子		I	II	III
	概念因子				
1	I		1.05	-0.53	-0.27
	II		-0.03	-0.48	0.55
	III		0.06	0.30	-0.36
2	I		-0.02	0.02	0.26
	II		0.82	0.00	-0.37
	III		0.75	-0.14	-0.04

表19 モデルBにおける核行列  
(SD型データ2)

被験者因子	尺度因子			
	概念因子	I	II	III
1	I	0.84	-0.30	-1.24
	II	-0.23	0.91	-0.38
	III	0.22	-0.99	0.58
2	I	0.08	0.03	-0.08
	II	0.88	-0.09	0.18
	III	0.68	-0.13	0.07

核行列については、まずモデルB(表19)からみていこう。被験者第1因子に対応する部分は、profile情報の表現とみられるが、図版I, IVに「悪い」「強い」感じ、図版III, VII, Xには「良い」「弱い」感じが対応すること、図版II, VIII, Xには「活発な」、図版V, VIには「不活発な」評定が与えられることを示している。被験者第2因子に対応する部分は、個人差の表現であり、図版II, V, VI, VIII, Xに「評価」の差があらわれやすいことを意味している。この結果は、先の音楽の評定の場合とよく似た構造を表わしているわけである。

モデルA(表18)では、核行列はすべて個人差の表現と解釈される。いずれも尺度相の第1因子(評価)に関連した部分の値が大きい。被験者相第1因子に対応する部分は、主として概念相第1因子に負荷の高い図版III, VII, VIII, Xへの「評価」の差を、被験者相第2因子に対応する部分は、その他の図版に対する「評価」の差を示すものである。

このモデルAの結果はモデルBの結果と必ずしもうまく対応していない。しかしながら、被験者相においてほぼ拮抗する2つの因子を得たこと、及び $\rho$ の値からみて方式Aによる通常の因子分析のほぼ5分の4の説明力を持つことから見て、モデルAもSD型データの個人差研究の方法として有望なものであることが示されたと言えよう。

### 6. 適用上の諸問題と分析のまとめ

前2節の結果の記述においては、モデルAとモデルBのどちらを選択するか、及び因子数をどのように決めるかという問題が省略されていた。ここでは、まずこれらの問題をまとめて論ずることにしよう。

最初に、モデルの選択について考える。これはデータ変換の方式の選択であり、2節において述べたように研究目的に大いに依存する。すなわち、因子構造の変化に

主たる関心をもつ時系列型データにおいてはモデルAを、profile情報が重要な役割を果たすSD型データではモデルBを選択するのが普通であろう。しかしながら、時系列型データにおいても、時間の経過に伴う平均値の変化を追うことにも関心をもつ場合があるし、SD型データでもあいまいな概念を利用して、専ら評定の個人差の記述を目指すような方向もありうる(前節におけるRorschach図版の評定の目的はこれである)。この場合は、今述べたのと逆の選択もありうる。もちろん、時系列型データでモデルAを用いてある程度一貫した因子構造を確かめてから、平均値の変化を改めて追うやり方も考えられる。尺度が一定期間を通じておよそ同一の意味をもち続けるのであれば平均を比較する意義はないからである。また、能力検査のように、著しい平均値の変化が大半の尺度において起こるような場合にモデルBによると、尺度間相関が高くなり過ぎて1因子構造しか認められないという問題もある。一方、前節で見たように、SD型データにおいてモデルBを用いたとき、profile情報と個人差とをかなり明確に分離できる場合もあることから、個人差記述に主たる目的がある場合でもモデルBが適当な場合もあろう。

このように、モデルの選択は研究目的から論理的に行ない得る部分もある一方、経験的になされねばならぬ面もあるように思われる。

モデルの経験的選択の一助となると考えられるのが、 $R^2_{\hat{X}}$ と $\rho$ である。上で分析した3種のデータについて、幾つかの因子数の場合におけるAB両モデルの $R^2_{\hat{X}}$ と $\rho$ を算出したのが表20である。まず、時系列型データでは2つのモデルの $R^2_{\hat{X}}$ には大差がないが、どの条件でもわずかにモデルAが上回っている。

表20 種々の因子数における $R^2_{\hat{X}}$ と $\rho$   
(モデルA, Bの比較)

データ	因子数\指標			$R^2_{\hat{X}}$		$\rho$	
	Mm	Mp	Mq	A	B	A	B
時系列型	3	3	2	.163	.148	.728	.586
	4	3	2	.165	.155	.618	.611
	5	3	2	.169	.161	.542	.627
	3	4	2	.166	.159	.741	.514
	4	4	2	.179	.172	.665	.557
	5	4	2	.188	.184	.603	.594
SD型1	6	4	2	.196	.193	.558	.624
	2	3	1	.059	.260	.855	.455
	1	3	2	.058	.370	.610	.648
	2	3	2	.097	.372	.584	.651
	3	3	2	.101	.375	.451	.657
	2	3	3	.107	.398	.645	.697
SD型2	3	3	3	.118	.402	.527	.704
	2	3	1	.077	.216	.892	.844
	1	3	2	.077	.218	.748	.848
	2	3	2	.143	.273	.727	.485
	3	3	2	.149	.285	.584	.455
	2	3	3	.155	.310	.789	.495
	3	3	3	.172	.347	.674	.553

3 相因子分析の適用上の諸問題

4節で時系列型データの分析にモデルAを採用した理由は、 $R^2$ の値によるというよりは、平均値の情報を消したモデルAの方が、因子構造の変化だけに視点を絞ることが出来、核行列の解釈が容易になると考えられたからである。時点因子において平均相関行列から出発できる点も結果の理解を容易にする。ただし、どの相についても結果そのものは、どちらのモデルでもほとんど違いがない。他方、SD型データでは2種のデータともモデルBの方が明白に値が大きい。このことはSD型データの中にprofile情報の占める割合が大きいことを物語っている。更に、その違いはRorschach図版のデータよりも、音楽のデータの方が大きい。前者では、BはAの約2倍であるのに対し、後者では4倍以上に達することがある。モデルAにおける $R^2$ の値自身も前者の方が大きい。これは、Rorschach図版のデータの方が、基本モデルによって説明できるような個人差をより多く含んでいることを示している。この結果から、概念としてRorschach図版の方がChopinの音楽よりもあいまいさを多く含んでいると考えられるかもしれない。しかし、それよりもむしろ尺度と概念との交互作用を考慮すべきであろう。音楽のデータで用いられた尺度の多くは、音楽の表現語として一般的によく用いられるものであり、比較的各個人に共通の印象が記述され得たものではなからうか。

いずれにせよRorschach図版のデータでは、モデルA、Bとも5節に示したように一応解釈可能な結果を得ることができた。しかしながら、モデルAによる音楽評定の結果は、特に核行列に関してほとんど解釈不可能であった。

SD型データの結果として共通している点は、尺度相の因子負荷が両モデルでほとんど同一であることである(表6, 16, 21)。profile情報の有無にかかわらず、ほぼ同一の結果を生ずるのは興味深い。ただし、表22に見られるように、固有値は両モデルでいくらか異なり、モデルBの方が最大固有値が大きく、少数の因子によって多くの分散を説明しうる。

しかしながら、概念相については2つのモデルの結果がかなり異なる。モデルAにおいて概念間相関係数にはほとんど負の値が生じないことは特徴的であるが、この原因については、更に検討の必要がある。

次に $\rho$ の値についてみる。時系列的データでは、どちらのモデルの $\rho$ の値が高いかは、因子数によって異なっており一貫していない。被験者相の因子数 $M_m$ を増加すると、モデルAの $\rho$ が低下し、モデルBの $\rho$ が上昇するのは、それぞれが比較の対象としている2相因子分析が方式Aと方式Bであることから当然の結果である。

表21 モデルAとモデルBの尺度の因子負荷 (SD型データ1)

因子 尺度	I		II		III	
	A	B	A	B	A	B
1	-0.05	-0.21	0.74	0.80	0.01	0.03
2	-0.48	-0.63	-0.31	-0.56	-0.04	0.07
3	0.01	0.13	0.21	0.22	0.74	0.79
4	0.58	0.77	-0.43	-0.44	0.31	0.12
5	-0.07	-0.13	0.70	0.87	-0.01	-0.02
6	-0.29	-0.34	0.47	0.64	0.41	0.33
7	0.42	0.70	-0.06	-0.18	0.54	0.36
8	-0.40	-0.50	0.50	0.50	0.09	0.18
9	0.56	0.75	-0.32	-0.35	0.37	0.15
10	-0.14	-0.33	0.09	0.34	-0.49	-0.44
11	0.01	-0.05	-0.55	-0.74	-0.14	-0.11
12	0.60	0.67	-0.27	-0.42	0.04	-0.05
13	-0.09	-0.24	0.73	0.75	0.01	0.08
14	0.65	0.87	-0.29	-0.18	0.37	0.14
15	-0.34	-0.36	0.23	0.39	0.33	0.30
16	-0.42	-0.43	0.19	0.37	0.36	0.32
17	0.66	0.76	0.14	0.31	-0.12	-0.20
18	-0.17	-0.25	0.76	0.82	0.09	0.12
19	-0.59	-0.74	0.14	0.18	0.05	0.06
20	-0.18	-0.07	0.17	0.18	0.79	0.85

表22 SD型データの尺度相の固有値 (モデルA, Bの比較)

データ 順位	1		2	
	A	B	A	B
1	4.95	7.57	6.12	7.72
2	2.79	3.34	2.79	2.72
3	1.71	1.90	1.68	2.10
4	1.43	1.20	1.20	1.06
5	1.03	0.73	0.88	0.73
6	0.83	0.66	0.81	0.64
7	0.79	0.54	0.73	0.54
8	0.74	0.50	0.66	0.52
9	0.65	0.46	0.61	0.48
10	0.62	0.39	0.57	0.43
11	0.56	0.37	0.55	0.41
12	0.55	0.34	0.53	0.40
13	0.54	0.33	0.49	0.36
14	0.48	0.30	0.42	0.35
15	0.45	0.28	0.40	0.31
16	0.44	0.24	0.36	0.29
17	0.42	0.23	0.34	0.27
18	0.37	0.22	0.32	0.25
19	0.36	0.21	0.28	0.22
20	0.30	0.19	0.27	0.21

2つのSD型データの結果は全く対照的であり、音楽のデータではモデルBが、Rorschach図版のデータではモデルAが優位にある。 $\rho$ は(13), (14)の分解によって減少したパラメータの数の関数でもあるので $\rho$ をデータ間で比較することは無理もあるが、これも両データの構造の



違いを示唆するもののように思われる。

言うまでもなく、 $R_{ii}$ や $\rho$ の値だけをモデル選択の基準とすべきではなく、研究目的、結果の解釈等種々の条件を考慮したうえで選択がなされるべきであろう。

次に因子数の決定法について論ずる。3相因子分析では、3つの相における因子数 $M_m$ 、 $M_l$ 、 $M_o$ を独立に変化させることが出来るため、因子数の決定は、通常の因子分析の場合よりもかなり複雑である。しばしば勧められるやり方は、固有値を最大のものから順に並べ、それが急激に減少する直前で切るものである(Levin, 1965)。しかしながら、そのような固有値の明確な低下が見出されることは比較的稀である。われわれの分析したデータでも、この基準によって因子数を確定出来たのは、音楽のデータ、モデルBにおける概念相( $\bar{r}_{kk'}$ の固有値が7.32, 3.87, 2.52, 0.95, 0.92, 0.84で3因子とする)及び、先にあげたRorschach図版のデータ、モデルAの被験者相くらいのものである。

次に、通常の因子分析では、相関行列の1以上の固有値の数を因子数とするやり方もしばしば行なわれる。これは相関行列に対してのみ適用される基準であり、モデルAの各相とモデルBの尺度相が対象となるが、このやり方では因子数は過大になることが多いようである。例えば、4節の時系列型データのモデルAにこの基準を機械的に適用すると、 $M_m=19^*$ 、 $M_l=13$ 、 $M_o=1$ となる。これは、相互相関が全般に低い相関行列を分析する場合しばしば起こる現象であり、varimax回転の結果はほとんど解釈不能になる。ただし、Rorschach図版のデータの概念相の因子数は、他に適切な根拠もないため、この基準で決定された。

このように上記の2つの方法は、あまり実際的ではない。そこで本研究では、暫定的に次のようにした。まず、3つの相のうちで、個々の変数の意味がとりやすく、構造に関する事前の仮定を援用することができる尺度相の因子数を定める。先にあげた時系列的データでは、もともと3因子構造が仮定されていたし、SD型データでは、Osgoodの言う3因子構造が参考になる。また、モデルA、Bの比較を行なう場合にも、両モデルではほぼ同一の結果が得られるこの相の因子数から決めるのは適当であろう。次に、他の2つの相について、因子数を種々組み合わせさせて計算を行ない、 $R_{ii}$ と $\rho$ の値や、核行列の解釈しやすさを考慮して試行錯誤的に最終的な因子数を決定する。この際、各相の因子数はなるべく低く押えた方が

解釈は容易になるようである。

表20では、尺度相の因子数をSD型データでは3に固定し、時系列型データでは3と4の2つの場合を考えている。(時系列型データでは時点相の因子数を2に固定している。)  $R_{ii}$ は因子数の増加に伴って上昇するが、上昇の程度は、どの相の因子数を増加させるかによって異なっている。例えば、音楽のデータのモデルBの場合、概念相の因子数を1だけ増加させる方が、被験者相の因子数を1増やす場合よりも  $R_{ii}$ の上昇は大きい。表20の範囲内では、5節で示した  $M_m=2$ 、 $M_o=3$ が適当な選択と言えるであろう。時系列的データでは、 $R_{ii}$ にもとづいた決定を行ない得るような傾向はないように思われる。この場合、 $M_l=3$ では、 $\rho$ の大きい  $M_m=3$ が選ばれた。 $M_l=4$ については、核行列にもとづく決定がなされている。表23に示したのは、 $M_m=6$ とした場合の核行列であるが、被験者相第6因子に対応する部分には、特に目立った傾向が示されていない。このためその直前の  $M_m=5$ が選ばれたのである。

表23 核行列 ( $M_m=6$ ,  $M_l=4$ ,  $M_o=2$ )  
(時系列型データ)

被験者相 因子	時点相 因子	尺度相 因子			
		I	II	III	IV
1	I	-0.99	0.03	-0.16	-0.04
	II	-0.70	-0.02	0.21	-0.22
2	I	0.11	0.96	-0.00	0.07
	II	-0.15	0.24	0.10	-0.26
3	I	0.04	0.13	1.00	-0.03
	II	-0.07	0.06	0.48	0.17
4	I	0.10	0.09	-0.04	0.89
	II	0.00	0.21	0.02	0.25
5	I	0.08	-0.40	-0.09	-0.13
	II	-0.01	-0.63	0.08	0.36
6	I	0.16	0.04	-0.16	0.01
	II	-0.21	-0.04	0.21	-0.06

このように、ここでは数値計算によって自動的に行なえるような因子数決定のため何らかの基準は示し得なかった。むしろ著しく解釈次元に傾いた方法を提起するとどまった。この問題については継続的な検討が必要である。

適用場面で生ずるもう一つの問題として、基本モデルの諸パラメータの解釈、特に核行列の解釈の問題がある。先に述べたように、核行列は3相因子分析独自の概念であり、異なる相の因子の間の関連を示すものである。しかし、解釈にあたっては、種々の点を考慮する必要があ

\* 被験者相の固有値は、2相因子分析方式Aにおける相関行列(234×234)の固有値と等しくなるように単位を調整して考える。

### 3 相因子分析の適用上の諸問題

る。まず考えるべき点は、その核行列に対応する因子得点の性質である。対応する被験者相の因子得点がほぼ一定値をとっていた図4-a, b, 図6-a, bの場合には、核行列は2つの相の軸の間の意味的な関連と考えるとよい。このような例は、モデルBをS-D型データに適用した場合において、被験者相第1因子に対応する核行列を解釈するに際してしばしば生ずるのであろう。これは結局、平均 profile の縮約された記述を与えるものである。それに対して、対応する被験者相の因子得点の平均が0、分散が1となっているような場合には、核行列の要素の値をむしろ重みとして考え、2つの相の因子の組み合わせによって説明される分散の大きさを示すと解釈する方がよい。モデルAを時系列データに適用した表10, 11等の場合には、そのような見方が最も適切なのである。

核行列が、2つ以上の因子の組み合わせに対して高い負荷を示す場合にも注意が必要である。例えば、表14の被験者相第2因子に対する核行列において、評価因子である尺度相第II因子は、概念相の第I, 第III因子にともに高い値を示している。このようなときには、図7-bのような図的表現によるか、あるいは内積  $\sum_q C_{kq} G_{mpq}$  を改めて計算するかすべきである。これによって概念の評価軸上での順位を知ることができる。

換言すれば、核行列は相の間のかかなり多様な association を表現することができるのであり、多面的な解釈を試る価値のある部分であるということにもなる。

最後に、分析例とこの節での考察をふまえて、3相因子分析の評価と、その適切な利用方法について考えてこの節のまとめとしよう。

第1に、3相因子分析はS-D型データを個人差を含めて分析するための手法として有用であるように思われる。我々が検討した2種のデータのいずれにおいても、profile情報を記述する部分と個人差を表現する部分とはかなり明確に分離され、それぞれ解釈可能な結果が得られた。

第2に、3相因子分析は、時点毎に行なわれた因子分析では発見できなかった時間的に一貫した因子構造を明らかに出来る点で、時系列型データに対しても有用である。この場合、尺度相に対して単一の因子構造を仮定することはいささか強引とも見えるが、同一条件における通常の2相因子分析の60~70%の効率を有する点からしても無理なものではない。また因子構造の時間的変化も核行列によってある程度表現することができる。

以上は3相因子分析の長所と考えられる。一方、短所としては、モデルが余りにも flexible であり過ぎることがあげられよう。例えば、3つの相について独立に因子数を変化させることが出来ることは便利である反面、因子数の決定が恣意的になりがちである。因子回転につ

いても、本研究におけるもの以外にもさまざまなやり方がありそうである。更に、モデルが4つのパラメータの積和の形をとるため粗データとの間に距離が生じ、パラメータから粗データのイメージを構成しにくいことも問題になる。このため、3相因子分析の結果のみから、データ構造を推論することがいささかためらわれることになる。

またある場合には、モデルがデータを縮約しすぎて、通常の因子分析によれば見出されるような面白い情報を消してしまうこともある。例えば、時系列型データを方式Aで分析した表5を詳細に見ると、因子負荷が時間的に興味ある挙動を示す項目が幾つか見出される。一例をあげれば、項目30は中学3年から高校1年にかけてこの大衆社会的因子に対する負荷が上昇し再び下降するが、このような動きを3相因子分析の結果から復元することはできない。

このように考えていくと、3相因子分析の適切な利用法も自と明らかになってくる。3相因子分析は、データを記述する唯一のモデルとして用いられるべきではない。この方法だけでは、データにもとづいて最終的な結論を下すための決め手にはなり難い。むしろデータの大体の輪郭をつかみ、次の段階への指針とするような使い方が適切であろう。外的基準のない多次元解析の手法については、多かれ少なかれ同様のことが言えるのであるが、3相因子分析は特にこの感が深い。興味ある仮説発見の手法として考えるならば、モデルの flexibility を逆に長所として生かすことができるであろう。

### 7. 他の方法との比較及び今後の問題

3相因子分析が、3相のデータの解析手法として有望なものであることは既に明らかになったと思われる。しかしながら、3相因子分析が、3相データを解析するための唯一の方法であるわけではない。もちろん2節で述べたような2相データに還元する方法も、それなりの意義を持ち得るであろう。また3つの相を同時に取り扱う他の方法も幾つか提唱されている。ここでは、それらの中で、代表的なものと思われる2つのモデルをとりあげ、3相因子分析と比較してみよう。ただし、われわれは、これらの方法の適用経験に乏しいため、比較はモデルの数理的構造を中心としたものになる。

第1にとりあげるのは、Carroll & Chang (1970) の多次元尺度構成法(しばしばINDSCALと呼ばれる)である。この方法は、一般的な類似性データを空間表現するためのかなり一般的なモデルであるが、次のような形で時系列型データに適用することができる。 $r_{ij}^t$  を  $t$  時点における尺度間相関係数とすると、INDSCAL

のアルゴリズムによれば

$$r_{jj}^{(k)'} \cong \sum_m^M w_{km} (j_m / j'_m) \quad (50)$$

となるような重み  $w_{km}$  と、因子負荷  $(j_m)$  が求められる。(50)には、時点間の関連の情報は全く用いられていないから、尺度相さえ共通なら必ずしも時系列的でない複数の相関行列の因子構造の比較にも用いられよう。これは方式Cにおいて因子負荷が共通になるような制約を課した場合に相当すると言えよう。このモデルでは  $M$  を決めれば、 $w_{km}$ 、 $(j_m)$  は一義的に定まり、軸の回転は出来ない。この方法の難点は多分この点にあり、 $(j_m)$  の解釈に困難をきたすことがありそうである。またこの解法では、個人に関する情報が全く得られないことも問題である。更に、(50)の計算は正準分解 (canonical decomposition) という方法で行なわれるが、このアルゴリズムにはいわゆる極小 (local minimum) の問題を回避出来るという保障がなく、その点でも不安が残る。ただモデル自体は3相因子分析よりも単純であり、結果は理解しやすいものになる場合もある。

正準分解を直接データに適用して

$$x_{ijk} \cong \sum_m^M a_{im} b_{jm} c_{km} \quad (51)$$

というモデルも可能である。これは3相因子分析から、核行列を除いたようなモデルである。そのため各相の因子数は共通にせねばならない。ただし、この形で使われた例をわれわれは知らないが、試みる価値はある。

次に、Corballis (1973) による縦断的因子分析 (Longitudinal factor analysis) をとりあげよう。これは専ら時系列的データへの適用を前提としている。このモデルでは、時点毎に因子分析の基本モデル(2)を考える点では方式Cそのものなのであるが、異なる時点間の因子得点に直交性を仮定することによって、因子負荷及び、因子得点の関連をつけようとするものである。ただし因子得点に課せられた制約により因子回転は許されず、因子数は各時点で共通にとらねばならない。アルゴリズム的には方式Aの発展であり、非線形最適化手法を必要とする。Corballis は、これによって時系列的变化が、因子負荷の変化であるか因子得点の変化であるかという間に答え得るという。3相因子分析は、因子負荷、因子得点とも各時点共通であり、この間には答えられない。

かくして、縦断的因子分析の持ち味は、3相因子分析とはかなり異なるものとなるであろう。3相因子分析が探索的であるのに対し、縦断的因子分析は、かなり構造が明確になっているデータの記述を目標としているように思われる。われわれの乏しい経験からしても、この方法による因子負荷がそのまま単純構造をなしていること

はまずなく、因子回転が認められないことは、特に探索的な段階では問題になる。またこの方法では因子構造は、ほぼ一貫していることが前提となっており、分化、収れんといった様相を記述することは無理である。

3相因子分析は、これらの方法に比して著しく flexible であることと、アルゴリズムが完全に線型計算の範囲で行なわれ得ることが特徴であると考えられよう。今後は、これらのモデルによる分析結果とも比較検討がなされる必要がある。

更に今後検討すべき点として、通常の因子分析との比較をより徹底して行なうことがある。特に、S D型データについて、本研究では十分なされなかった方式Bにおける因子得点の検討、時系列型データでは、方式Aの因子負荷を、なるべく時系列的に一貫した形に近づけるような回転法等の探究が重点的になされる必要がある。

3相因子分析法そのものについては、本研究では比較的被験者数の少ないデータしか取り扱われていなかったが、大量データの場合に対する適用もなされなければならない。この場合、3節で述べたアルゴリズムはそのまま利用できないが、Tucker (1966) は、近似的な解釈を既に提唱している。また、本研究でのモデルの機械的適用にとどまることなく内容領域に即した修正を行なう必要も生ずるであろう。時系列的データにおける時点相の扱いについては本文中にも触れたが、multitrait-multimethod matrix に対する適用法等も今後考える必要がある。

## 8. 要 約

この研究の主たる目的は、3相因子分析法の実際のデータへの適用例を示すとともに、適用場面で生ずる幾つかの問題を論ずることである。それによって3相因子分析の実用的意義が明らかにされることが期待された。本研究において、3相因子分析は、通常の因子分析に制約条件を付与した特殊な場合とみなされた。このため、通常の因子分析の結果との比較を行ない易いように、Tucker (1964) の基本モデルのパラメータの単位のとりに変更が加えられ、通常の因子分析に対する3相因子分析の効率を示す  $\rho$  が導入された。また、粗データの基準化の方式について、2種の選択 (モデルAとモデルB) が導入された。

分析されたデータは、中高校生の社会的態度の縦断的研究のデータ (時系列型データ)、音楽及びRorschach図版を概念とするS D法によるデータ (S D型データ) の3種であった。得られた結果は以下の通りである。

(1)時系列型データの分析において3相因子分析は、通常の因子分析によっては明らかにし得なかった時間的

### 3 相因子分析の適用上の諸問題

に一貫した因子構造を導出することが出来た。また因子構造の時系列的变化についての情報も提供することが見出された。

(2) 3 相因子分析法は、SD型データを、個人差を含めて取り扱うために有効であることも判明した。われわれの取り扱った2種のデータのいずれにおいても、

profile 情報と、個人差とをかなり明確に分離するような結果が示された。分析の対象となったすべてのデータにおいて、3 相因子分析は適切な条件下では、通常の因子分析の60%以上の効率を示した。

(3) モデル A, B の選択, 因子数の決定法, 核行列の解釈に関する議論の結果, 3 相因子分析は, データの大体の構造を把握し, 興味ある仮説を発見するための, 探索的手法として有効なものであると考えられた。

### 文 献

- Carroll, J. D. & Chang, J. J. 1970 Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika*, **35**, 283-319.
- Corballis, M. C. 1973 A factor model for analysing change. *The British Journal of Mathematical & Statistical Psychology*, **26**, 90-97.
- 久世敏雄・速水敏彦 1974 中学生・高校生の社会的態度に関する研究(1) 名古屋大学教育学部紀要(教育心理学科), **21**, 1-11.
- 久世敏雄・速水敏彦 1975 中学生・高校生の社会的態度に関する研究(2) 名古屋大学教育学部紀要(教育心理学科), **22**, 13-24.
- 久世敏雄・後藤宗理・宮沢秀次・二宮克美・池田博和・伊藤義美・石黒敬子 1977 中学生・高校生の社会的態度に関する研究(Ⅲ) 名古屋大学教育学部紀要(教育心理学科), **24**, 67-83.
- Levin, J. 1965 Three-mode factor analysis. *Psychological Bulletin*, **64**, 442-452.
- 椋野 要・柳井晴夫 1977 青年期における興味発達の縦断的研究 教育心理学研究, **25**, 145-156.
- Tucker, L. R. 1964 The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. In N. Frederiksen and H. Gulliksen (Eds.) *Contribution to mathematical Psychology*. New York: Holt, Rinehart and Winston. Pp. 109-127.
- Tucker, L. R. 1966 Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, **31**, 279-311.

(1978年7月31日受稿)

## SOME PROBLEMS IN THE APPLICATION OF THREE-MODE FACTOR ANALYSIS

Takashi MURAKAMI, Motomichi GOTO and Hideo TSUJIMOTO

The main purpose of this study is to investigate the effectiveness of three-mode factor analysis in practical use. Some illustrative examples of the application of this method to real data are presented and some problems in the application processes are considered.

In this study, three-mode factor analysis is interpreted as a special case of ordinary two-mode factor analysis, that is, as a factoring method with additional constraints on either the factor loadings or the factor scores. Concretely, Tucker's model is modified slightly in order to interpret the results of three-mode factor analysis, and an index  $\rho$  is introduced for estimating the efficiency of the three-mode method compared with the two-mode method.

The data used as examples are classified into two types; the time series type and semantic differential (SD) type. The former set comes from the longitudinal study of social attitudes of secondary school students, and latter sets consist of the ratings of Chopin's music and Rorschach cards on 20 scales respectively.

The main results are as follows:

- (1) In the analysis of time series data, three-mode factor analysis can reveal the factor structures consistent in time while the ordinary method can not find out these structures. Furthermore, three-mode factor analysis can provide the information about the changes of factor structures as a function of time.
- (2) Three-mode factor analysis is a useful method to treat the SD type data. This method considers the individual differences and it can distinguish between the mean profiles and the individual differences.
- (3) Under the appropriate conditions, the efficiency of this method reaches 60% or more. Core matrix shows a meaningful pattern in any case.

In general, three-mode factor analysis is considered to be useful as an exploratory method to understand the global structures of the data and to find the interesting hypotheses.