

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※ 甲 第 号
------	---------

氏 名 劉 裕

論 文 題 目

COTORSION PAIRS ON TRIANGULATED AND EXACT
CATEGORIES

(三角圏と完全圏上の余ねじれ対)

論文審査担当者

主 査	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士 中西 知 樹
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学) 伊 山 修
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学) 古 庄 英 和
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学) 高 橋 亮

論文審査の結果の要旨

導来圏はホモロジー代数学において基本的であり、Beilinson-Bernstein-Deligne によって導入された三角圏 \mathcal{T} の t 構造 (t -structure) $(\mathcal{T}^{\leq 0}, \mathcal{T}^{\geq 0})$ は、導来圏を調べる上で基本的である。 t 構造に対して、ハート (heart) と呼ばれる部分圏 $\mathcal{H} = \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 0}$ が定まるが、これはいつでもアーベル圏をなす。例えばアーベル圏 \mathcal{A} の導来圏 $D(\mathcal{A})$ は標準的な t 構造 $(D^{\leq 0}(\mathcal{A}), D^{\geq 0}(\mathcal{A}))$ を持つが、そのハートとして \mathcal{A} 自身が回復される。このように \mathcal{A} の導来圏同値を考察するうえで、 t 構造は基本的な道具を与える。

最近、三角圏とその部分圏 (の対) からアーベル圏を構成する別の手法が、団理論において発見された。三角圏 \mathcal{T} の団傾部分圏 (cluster tilting subcategory) \mathcal{M} に対して、商圏 $\mathcal{T}/[\mathcal{M}]$ がアーベル圏となることが、Keller-Reiten, König-Zhu らによって示された。この事実は、団圏を用いた団代数の圏化においても重要な役割を果たしている。

三角圏の t 構造と団傾部分圏は全く異なる概念だが、ともに自然な方法によってアーベル圏が構成される。中岡宏行氏は、これらがいずれも余ねじれ対 (cotorsion pair) の特別な場合であることに着目して、三角圏の一般の余ねじれ対に対してハートを導入し、それがアーベル圏をなすことをはじめとする基本的な諸性質を与えてきた。

Liu 氏の学位論文の主目的は、三角圏に対する中岡氏の理論を、完全圏 (exact category) に対して展開することにある。完全圏とは、アーベル圏の拡大で閉じた部分圏を抽象化したものであり、環の表現論におけるさまざまな重要な例を包括する枠組みを与えるものである。Liu 氏の学位論文の主要部分は第 2 章、第 3 章、第 4 章であり、それぞれ 3 つの副論文に対応している。

Liu 氏は第 2 章において、完全圏 \mathcal{E} の余ねじれ対 (U, V) に対して、ハートと呼ばれる加法圏 \mathcal{H} を構成し、それがアーベル圏をなすことを証明した。より一般に Liu 氏は、完全圏 \mathcal{E} の余ねじれ対のペア (S, T) および (U, V) で $S \subset U$ を満たすものを双子余ねじれ対 (twin cotorsion pair) と呼び、双子余ねじれ対に対してハートを構成し、それがアーベル圏を拡張したクラスである準アーベル圏 (semi-abelian category) をなすことを証明した。

三角圏 \mathcal{T} の t 構造が与えられたとき、そのハート \mathcal{H} へのコホモロジー的関手 $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}$ が構成されるが、これは三角圏を研究するうえでの基本的な道具を与える。この事実の類似として、Liu 氏は第 3 章において、完全圏 \mathcal{E} の余ねじれ対 (U, V) とそのハート \mathcal{H} に対して、半完全関手 $H: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ を構成した。さらにその応用として、 \mathcal{E} の二つの余ねじれ対が与えられたときに、それらのハートが同値となるための十分条件を与えた。一つの完全圏はさまざまな余ねじれ対を持つが、それらのハートの間の関係を調べるうえで、Liu 氏のこの結果は有効である。

三角圏の中でも代数的三角圏と呼ばれるクラスが重要だが、それらはフロベニウス圏と呼ばれる特別な完全圏から安定圏として得られるものである。一般に完全圏は、フロベニウス圏からほど遠いものが通常であり、非常に広範な圏のクラスである。この意味で、以上で述べた完全圏に対する Liu 氏の結果は、三角圏に対する中岡氏の結果を大幅に拡張するものだといえる。

アーベル圏の中でも基本的なものとして、圏 \mathcal{C} 上の関手圏 $\text{mod } \mathcal{C}$ が挙げられる。これは十分に多くの射影対象を持つことをはじめとして、扱い易い性質を持つアーベル圏である。任意のアーベル圏はある三角圏の t 構造のハートとして現れるが、一方、三角圏の団傾部分圏 \mathcal{M} のハートは、関手圏 $\text{mod } \mathcal{M}$ と同値になる。Liu 氏は第 4 章で、三角圏および完全圏の余ねじれ対 (U, V) を扱い、それぞれの場合に余ハート (coheart) と呼ばれる部分圏 \mathcal{C} を導入した。Liu 氏は、ある条件のもとハート \mathcal{H} は余ハート上の

論文審査の結果の要旨

関手圏 $\text{mod } C$ と同値であることを証明した。この結果はハートを研究する上で、たいへん有効であると思われる。

以上のように、Liu 氏の学位論文は完全圏・三角圏の研究で重要な余ねじれ対に対する新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。第2章の成果は副論文として既に *Journal of Algebra* 誌から出版されている。

2015年7月24日に学位審査セミナーを行ったが、Liu 氏の結果や意義が非専門家にもよく伝わるように工夫されたものであり、質問に対する応答も的確なものであった。以上によって、学位審査委員会は学位を授与するべきであるものと判断する。