Introduction to Cluster Algebras

中西　知樹　(名古屋大学)*

本稿は2015年度の表現論シンポジウムにおける講演の予稿である．講演は初学者を対象とした団代数の入門講義で, 第6章までが講演で扱う部分である．これは団代数において最も基本的な事柄をできるだけ平易にまとめたものであるが, 最近の結果を除いては, すでに著者による他の団代数についての日本語の講演録 (例えば [Nak10, Nak11]) と内容がかなりの程度重複していることをあらかじめお断りしておく．一方, 本稿に若干の新奇性を与えるため, 講演では扱わないが, 第7章に最近の発展である一般団代数についての簡単な紹介 (あるいは宣伝) を加えることとした.

1. はじめに

団代数 (cluster algebra) は2000年ごろにFomin と Zelevinsky [FZ02] により導入された可換環のあるクラスである．Lie 理論における全正値性や標準基底の問題に現れる代数的・組合せ論的構造を「Laurent 性」という性質に着目して一般化し, それによってこれらの問題の包括的な理解を得ることが彼らの当初の動機であった．その後, 彼らは引き続き Berenstein とともに [FZ03, BFZ05, FZ07] ([FZ02] と合わせこれら四部作はCA1–4と呼ばれる) によって団代数の基礎理論を与えた.

一方これと並行して, 団代数における代数的・組合せ論的構造は, 実はLie 理論のみならず, 数学の諸分野において現れることが次第に認識されていった．その例は多岐に渡るが, ここでは代数, 幾何, 解析におけるそれぞれの顕著な例として, 多元環（あるいは箙）の表現論 [BMR$^+$06], リーマン面のモジュライ理論 [FG07, FST08, FT12], 完全WKB解析 [IN14a, IN14b] を挙げるにとどめておこう.

現在においては, 団代数は分野を超えた数学全体にわたる基盤的な (underlying) 代数的・組合せ論的構造と認識されている．そのような役割はやはり代数的・組合せ論的構造であるルート系を想起させる．実際, 団代数はルート系の理論と密接に関連し, ルート系の理論の (一般化というよりはむしろ) ある種の拡張と捉えると良いのではないかと筆者は現在のところ考えている.

2. 主要概念:種子と変異

はじめに, 団代数において最も主要な概念である「種子」とその「変異」について, 詳細は後回しにして, その概略を述べておこう.

はじめに, 自然数 n を一つ固定する．(これはのちに団代数のランクと呼ばれる.) n 次正方 (整数）行列 B が**反対称化可能** (skew-symmetrizable) であるとは, 対角成分が正の n 次対角行列 D に対して DB が反対称行列であることとする．そして, n 次種子反対称化可能行列 B と n 変数の組 $x=(x_i)_{i=1}^n$ およびもう一つの n 変数の組 $y=(y_i)_{i=1}^n$ からなる三つ組 (B,x,y) を**種子** (seed) という.

種子 (B,x,y) と $k=1,\dots,n$ に対して, 新しい種子 $(B',x',y')=\mu_k(B,x,y)$ を与えるある方法を種子 (B,x,y) の k における**変異** (mutation) という．具体的な変異の定義はのち

2015年表現論シンポジウム (2015年11月伊豆) 概説講演予稿集原稿
* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: nakanisi@math.natoya-u.ac.jp

ほど与えることとして, 変異は以下の性質を持つ.

(i) 変異の規則は B と k のみから定まる.

(ii) 変異は対合的である. すなわち, $\mu_k^2(B,x,y)=(B,x,y)$.

(i) より, 行列 B は種子の変異を定める言わば「DNA」の役割を果たすことがわかる. しかも, 変異において「DNA」自身も新しい「DNA」B' に置き換えられる. この状況を, Fomin と Zelevinsky は植物の「進化」にたとえて「種子」とその「変異」と呼んだのである. 一方, (ii) の対合性は Coxeter 群における鏡映の類似と見なすことができるであろう.

すべての頂点からちょうど n 本の辺が出ている木グラフを n 正則木グラフと呼び, $\mathbb{T}_n$ と表す. また, $\mathbb{T}_n$ の頂点の集合も同じ記号 $\mathbb{T}_n$ で表すことする. $\mathbb{T}_n$ の各頂点から出ている n 本の辺に対して, 1 から n までのラベルが割り当てられているとする.

さて, $\mathbb{T}_n$ の各頂点 t に対して, それぞれ種子 $\Sigma^t=(B^t,x^t,y^t)$ が割当てられ, ラベル k の辺で結ばれる任意の頂点のペア t と t' に対して, 対応する種子が変異の関係 $\Sigma^{t'}=\mu_k(\Sigma^t)$ をみたすとき, $\mathcal{S}=\{\Sigma^t\}_{t\in\mathbb{T}_n}$ を**団パターン** (cluster pattern) という. また, $\Sigma^t=\Sigma^{t'}$ となる頂点 t, t' を同一視することによって得られる $\mathbb{T}_n$ の商グラフを $\mathcal{S}$ の**交換グラフ** (exchange graph) という. これらが, 団代数の代数的・組合せ論的構造の主要部分である. 団パターン $\mathcal{S}$ は, $\mathbb{T}_n$ の頂点 t_0 (これを $\mathbb{T}_n$ の初期点という) を任意に一つ与えたとき, t_0 における種子 Σ^{t_0} (これを $\mathcal{S}$ の初期種子という) により「芋づる式に」定まることに注意する.

3. 半体

団代数を定義するにあたっては, 半体という通常はあまり馴染みのない代数構造が用いられるので始めにこれついて述べておこう.

Definition 3.1 乗法的アーベル群 $\mathbb{P}$ に対して, 可換で結合的な演算 $\oplus$ が与えられ, 積に関して分配的, すなわち $a(b\oplus c)=ab\oplus ac$ であるとき, $\mathbb{P}$ を**半体** (semifield) という.

$\oplus$ に対する単位元 0 や「引き算」は定められていないことに注意する.

団代数においては以下の三つの半体が重要である.

(i) 自明半体.

自明な乗法的アーベル群 $\mathbf{1}=\{1\}$ に対して, $1\oplus 1=1$ と定めると半体となる. これを**自明半体** (trivial semifield) という.

(ii) 普遍半体.

形式的な変数の組 $u=(u_1,\dots,u_n)$ に対して, u の 0 でない整数係数多項式であって負の係数を持たないもの全体の集合を $\mathbb{Z}_+[u]$ と表そう. このとき, u の $\mathbb{Q}$ 係数有理関数 $f(u)$ が $f(u)=p(u)/q(u)$ $(p(u),q(u)\in\mathbb{Z}_+[u])$ と表せるとき, 右辺を $f(u)$ の**非負表示** (subtraction-free expression) という. たとえば, $f(u)=u_1^2-u_1u_2+u_2^2$ は,

$$f(u)=\frac{u_1^3+u_2^3}{u_1+u_2} \tag{3.1}$$

という非負表示を持つ. 非負表示を持つ u の $\mathbb{Q}$ 係数有理関数全体の集合を $\mathbb{Q}_+(u)$ と表す. このとき, $\mathbb{Q}_+(u)$ に対して, 積 $\times$ と和 $\oplus$ を, 有理関数に対する通常の積と和で定めると $\mathbb{Q}_+(u)$ は半体となる. これを u の**普遍半体** (universal semifield) という.

(iii) トロピカル半体.

形式的な変数の組 $u = (u_1, \dots, u_n)$ に対して，u の係数 1 の Laurent 単項式全体の集合 $\{\prod_{i=1}^n u_i^{a_i} \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$ を $\mathrm{Trop}(u)$ と表す．このとき，$\mathrm{Trop}(u)$ に対して，積 $\times$ を通常の Laurent 単項式の積で，また和 $\oplus$ を

$$\prod_{i=1}^{n} u_i^{a_i} \oplus \prod_{i=1}^{n} u_i^{b_i} = \prod_{i=1}^{n} u_i^{\min(a_i,b_i)} \tag{3.2}$$

と定めると $\mathrm{Trop}(u)$ は半体となる．これを u の**トロピカル半体** (tropical semifield) という．また，和 $\oplus$ をトロピカル和という．

普遍半体 $\mathbb{Q}_+(u)$ からトロピカル半体 $\mathrm{Trop}(u)$ への以下の自然な半体の準同形写像が定まる．

$$\begin{array}{rccccl} \pi_{\mathrm{trop}}: & \mathbb{Q}_+(u) & \to & \mathrm{Trop}(u) & & \\ & u_i & \mapsto & u_i & & \\ & c & \mapsto & 1 & & (\text{非負表示における } c \in \mathbb{Z}_+). \end{array} \tag{3.3}$$

これを**トロピカル化写像** (tropicalization map) という．例えば，

$$\pi_{\mathrm{trop}}: \frac{2y_1^2 + y_1y_2}{y_1 + 2y_2} \mapsto \frac{y_1^2 \oplus y_1y_2}{y_1 \oplus y_2} = \frac{y_1}{1} = y_1 \tag{3.4}$$

となる．これより，トロピカル化写像は有理関数の「主要部」を取る（「非主要部」を切り捨てる）という自然な操作であることがわかる．

さて，$\mathbb{P}$ を任意の半体とするとき，$\mathbb{P}$ は可換なアーベル群であるので，その群環 $\mathbb{ZP}$ が定まる．定義により，群環 $\mathbb{ZP}$ の積は $\mathbb{P}$ の積により定められるが，和 $+$ は $\mathbb{P}$ の和 $\oplus$ とは全く独立に新たに導入されるものであることに注意する．このとき，群環 $\mathbb{ZP}$ は零因子を持たない，すなわち整域となることが知られている [FZ02]．したがって，群環 $\mathbb{ZP}$ の分数体が定まる．この体を $\mathbb{QP}$ と表す．

団代数を考えるにおいて半体について必要なことはだいたいこれで尽きている．

4. 団代数の定義

団代数を定義するにあたってはまず始めに自然数 n と，半体 $\mathbb{P}$ を固定する．n と $\mathbb{P}$ は以下で定める団代数の**ランク**および**係数半体** (coefficient semifield) と呼ばれる．

$w = (w_1, \dots, w_n)$ を代数的に独立な変数として，w の $\mathbb{QP}$ 係数有理関数体を $\mathcal{F} = \mathbb{QP}(w)$ とおき，これを**周囲体** (ambient field) と呼ぶ．こう呼ぶのは，のちに団代数を $\mathcal{F}$ のある部分代数として定めるからである．

まず，第 2 章で述べた種子の正確な定義を与える．

Definition 4.1 以下をみたす三つ組 (B, x, y) を **($\mathbb{P}$ に係数を持つ) 種子** (seed with coefficients in $\mathbb{P}$) という．

- $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ は反対称化可能行列．
- $x = (x_i)_{i=1}^n$, $x_i \in \mathcal{F}$ であり，$x_1, \dots, x_n$ は $\mathbb{QP}$ 上代数的独立．
- $y = (y_i)_{i=1}^n$, $y_i \in \mathbb{P}$.

B を**交換行列** (exchange matrix)，x を**団変数** (cluster variables) あるいは x **変数**，y を**係数** (coefficients) あるいは y **変数**という．

つぎに, 種子の変異の正確な定義を与える. 整数 a に対して, $[a]_+ = \max(a, 0)$ と定める.

Definition 4.2 種子 (B, x, y) と $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, 以下で定まる種子 $(B', x', y') = \mu_k(B, x, y)$ を (B, x, y) **の k における変異**という.

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & \text{その他の場合}, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$y'_i = \begin{cases} y_i^{-1} & i = k \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+}(1 \oplus y_k)^{-b_{ki}} & i \neq k, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x'_i = \begin{cases} \dfrac{1}{x_i}\left(\dfrac{y_k}{y_k \oplus 1}\displaystyle\prod_{j=1}^{n} x_j^{[b_{jk}]_+} + \dfrac{1}{y_k \oplus 1}\displaystyle\prod_{j=1}^{n} x_j^{[-b_{jk}]_+}\right) & i = k \\ x_i & i \neq k. \end{cases} \tag{4.3}$$

B' が B と同じ対角行列により反対称化可能であることは容易にわかる. また, 以下の重要な事実も容易に確かめられる.

Proposition 4.3 変異は対合的である. すなわち, $\mu_k^2(B, x, y) = (B, x, y)$.

特に, $x'_1, \ldots, x'_n$ も代数的独立であることがわかり, 以上より (B', x', y') は確かに種子となることも確かめられた.

最後に団代数を定義しよう. 第 2 章で述べたように, $\mathbb{T}_n$ を n 正則木グラフとして, $\mathcal{S} = \{\Sigma^t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ を ($\mathbb{P}$ に係数を持つ) 種子のなす団パターン (cluster pattern) とする. t_0 を $\mathbb{T}_n$ の初期点として, Σ^{t_0} を $\mathcal{S}$ の初期種子とすると, $\mathcal{S}$ は Σ^{t_0} により一意的に定まるのであった. 初期種子 Σ^{t_0} の定める団パターン $\mathcal{S}$ に対して, $\mathcal{S}$ に属するすべての x 変数のなす集合を $\mathcal{X}(\Sigma^{t_0})$ と表す.

Definition 4.4 初期種子 Σ^{t_0} に対して, $\mathcal{X}(\Sigma^{t_0})$ の生成する $\mathcal{F}$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数 $\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ を**初期種子 Σ^{t_0} を持つ団代数** (cluster algebra with initial seed Σ^{t_0}) という.

5. 最も簡単な例: A_2 型団代数

種子の変異の定義 (4.1)–(4.3) は大変複雑であるが, 実に良いものであることを最も簡単な例で見ることにする. ただし, $n = 1$ のときは簡単すぎて団代数の特質が顕著には現れないのでここでは省略し, $n = 2$ の場合を考える. 2 正則木グラフ $\mathbb{T}_2$ の頂点は自然に整数の集合 $\mathbb{Z}$ でパラメトライズされる. 以下では記号を見やすくするため, $\mathbb{T}_2$ の団パターン $\mathcal{S}$ に対して, $\mathbb{T}_2$ の頂点 $t \in \mathbb{Z}$ に割り当てられた種子 Σ^t を $\Sigma(t) = (B(t), x(t), y(t))$ と書くことにする. すると, 団パターンは一般性を失わず以下のような変異の列とみなすことができる.

$$\cdots \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} \Sigma(-1) \overset{\mu_2}{\longleftrightarrow} \Sigma(0) \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} \Sigma(1) \overset{\mu_2}{\longleftrightarrow} \Sigma(2) \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} \cdots. \tag{5.1}$$

以下では, $\Sigma(0) = (B(0), x(0), y(0))$ を初期種子とみなし, その交換行列 $B(0)$ として $n = 2$ の最も簡単な反対称化可能行列

$$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

を考える．また, 係数半体$\mathbb{P}$は自明半体$\mathbf{1}$とする．したがって, y変数は以下では無視をする．このとき, まず(4.1)より

$$B(t)=\begin{cases}B(0) & t\text{:偶数}\\ -B(0) & t\text{:奇数}\end{cases} \tag{5.3}$$

となることが容易にわかる．これを(4.3)に代入して, 以下のx変数の変異を得る．

tが偶数のとき,

$$\begin{aligned} x_1(t+1)&=\frac{x_2(t)+1}{x_1(t)}\\ x_2(t+1)&=x_2(t), \end{aligned} \tag{5.4}$$

tが奇数のとき,

$$\begin{aligned} x_1(t+1)&=x_1(t)\\ x_2(t+1)&=\frac{x_1(t)+1}{x_2(t)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

これらの変異を繰り返すことにより, tにおけるx変数$x_i(t)$を初期x変数$x(0)$の有理関数として表すことができる．記号を簡単にするため$x_i(0)=x_i$とおいて, $t=1,\dots,5$に対してこれを実行すると以下のような結果が得られる．(ぜひご自分で計算されたい!)

$$\begin{cases} x_1(0)=x_1\\ x_2(0)=x_2, \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} x_1(1)=\dfrac{x_2(0)+1}{x_1(0)}=\dfrac{x_2+1}{x_1}\\ x_2(1)=x_2(0)=x_2, \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} x_1(2)=x_1(1)=\dfrac{x_2+1}{x_1}\\ x_2(2)=\dfrac{x_1(1)+1}{x_2(1)}=\dfrac{1}{x_2}\left(\dfrac{x_2+1}{x_1}+1\right)=\dfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \end{cases} \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} x_1(3)=\dfrac{x_2(2)+1}{x_1(2)}=\dfrac{x_1}{x_2+1}\left(\dfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}+1\right)\overset{!}{=}\dfrac{x_1+1}{x_2}\\ x_2(3)=x_2(2)=\dfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\begin{cases} x_1(4)=x_1(3)=\dfrac{x_1+1}{x_2}\\ x_2(4)=\dfrac{x_1(3)+1}{x_2(3)}=\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2+1}\left(\dfrac{x_1+1}{x_2}+1\right)\overset{!}{=}x_1, \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\begin{cases} x_1(5)=\dfrac{x_2(4)+1}{x_1(4)}=\dfrac{x_2}{x_1+1}(x_1+1)\overset{!}{=}x_2\\ x_2(5)=x_2(4)=x_1. \end{cases} \tag{5.11}$$

ここで, 三カ所ある$\overset{!}{=}$は, 因数分解や分母分子のキャンセルなどの非自明な簡約が起こったことを表す．これらの非自明な簡約が「システマティック」に起こった結果, x変数に半周期5の周期性が生じたのである．

さらに詳しく見ると以下のような現象も観察される．

(i) (Laurent 現象) x 変数は先見的には初期変数の有理関数であるが, 非自明な簡約の結果, すべて Laurent 多項式となる.

(ii) (正値性) 上の Laurent 多項式の分子は正係数の多項式となる.

(iii) (分母ベクトルとルート系) 上の初期変数以外の Laurent 多項式の分母 x_1, x_1x_2, x_2 は A_2 型の正ルート α_1, $\alpha_1+\alpha_2$, α_2 と自然に対応する.

(iv) (有限性) 団パターン (5.1) の種子は周期 10 を持ち, 特に種子の数は有限個である.

次章では, (i) と (ii) はすべての団代数に対して成り立ち, また, (iii) と (iv) は特に有限型団代数と呼ばれるものに対して成り立つ性質であることを説明する.

6. 団代数の基本性質

この章では, 団代数について最も基本的な性質をいくつか紹介する.

$\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ を初期種子 Σ^{t_0} を持つ団代数とする. 記号の簡単のため, 初期 x 変数 x^{t_0} を x と表すことにする. x 変数の変異 (4.3) は $\mathbb{QP}$ を係数とする有理変換であるので, 先見的には x_i^t は x の $\mathbb{QP}$ 係数の有理関数であるが, より強く以下の事実が成り立つ.

Theorem 6.1 (Laurent 現象 [FZ02]) 任意の x 変数 x_i^t は x の $\mathbb{ZP}$ 係数の Laurent 多項式である.

実際, [FZ02] において, 変異の一連の定義 (4.1)–(4.3) は対合性とこの Laurent 現象に導かれて自然に見出されたものである.

Theorem 6.1 にしたがって x 変数 x_i^t を

$$x_i^t = \frac{P_i^t(x)}{\prod_{j=1}^n (x_j)^{d_{ji}^t}}, \quad P_i^t(x) \in \mathbb{ZP}[x],\ d_{ji}^t \in \mathbb{Z} \tag{6.1}$$

と表示する. ただし, 分母分子で共通因子は簡約化されているものとする.

Definition 6.2 $\mathbb{ZP}$ 係数の多項式 $P(x) \in \mathbb{ZP}[x]$ が正係数であるとは, $P(x)$ は 0 でなく, $P(x)$ の任意の (0 でない) 係数は $\mathbb{P}$ の元の (群環 $\mathbb{ZP}$ の和+に関する) 正整数係数の線形結合であることをいう.

以下の性質は [FZ02] で予想され, いろいろな手法で一部のクラスの団代数については証明されていたが, 一般的に証明されたのは最近である.

Theorem 6.3 (正値性 [GHKK14]) 多項式 $P_i^t(x)$ は正係数である.

次に, [FZ03] の主結果である有限型団代数の分類について述べる. そのためにいくつか定義を導入する.

Definition 6.4 団代数 $\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ が**有限型** (of finite type) であるとは, 初期種子 Σ^{t_0} の定める団パターン $\mathcal{S}$ の種子が有限個であることである.

前章の例は有限型団代数の例である.

Definition 6.5 反対称化可能行列 B, B' に対して, B' が B に変異を有限回 (0 回でも良い) 繰り返して得られる時, B' は B と**変異同値** (mutation-equivalent) という.

Definition 6.6 反対称化可能行列 B に対して, 以下で定まる行列 $C = C(B)$ を B **に対応するカルタン行列** (Cartan counterpart of B) という.

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -|a_{ij}| & i \neq j. \end{cases} \tag{6.2}$$

行列 $C(B)$ は Kac の意味での対称化可能 (一般)Cartan 行列であることに注意する. (このようなところに, 団代数とルート系の関連の基盤がある.)

よく知られているように有限型の（対応する Lie 代数が有限次元になる, あるいは対応する Coxeter 群が有限群になる) 対称化可能 Cartan 行列は, A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8 と呼ばれる型 (あるいは Dynkin 図形) により分類される. Fomin-Zelevinsky [FZ03] は, 団代数もまた同じ型により分類されることを示した.

Theorem 6.7 (有限型団代数の分類 [FZ03]) 団代数 $\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ が有限型であるための必要十分条件は, 初期交換行列 B^{t_0} と変異同値なある交換行列 B' に対して対応する Cartan 行列 $C(B')$ が有限型になることである.

有限型団代数に対して, 上の定理の Cartan 行列 $C(B')$ の型をその団代数の型という. たとえば, 前章の例は A_2 型団代数の例である. ちなみに, 係数半体 $\mathbb{P}$ や初期 y 変数を変えることにより, 同じ型のいろいろな団代数が得られるが, これらは一括りのものと考えることができる.

つぎに, 有限型団代数に特有の性質について述べる.

x 変数 x_i^t の表示 (6.1) によって定まる整数ベクトル $d_i^t = (d_{ji}^t)_{j=1}^n$ を x_i^t を**分母ベクトル** (denominator vector), あるいは d **ベクトル** (d-vector) という. ただし, 「分母」というのは式 (6.1) の見かけであって, たとえば初期変数 x_i に対しては負ベクトルになる. 初期変数以外では本当に正ベクトル (0 でなく非負成分を持たない) と予想されるが, これは一般にはまだ証明されていない. しかし, 団代数 $\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ が有限型であり, さらに初期交換行列 B^{t_0} に対応する Cartan 行列自身が有限型になるときには, 初期変数以外の d ベクトルは正ベクトルであるだけではなく以下の顕著な事実がなりたつ.

Theorem 6.8 (d ベクトルとルート系の関係 [FZ03]) B^{t_0} に対応する Cartan 行列 $C(B^{t_0})$ が有限型とし, $\Delta(C(B^{t_0}))$ を $C(B^{t_0})$ の定める有限型ルート系とする. このとき, 団代数 $\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ の初期 x 変数以外の d ベクトル全体の集合は $\Delta(C(B^{t_0}))$ の正ルートの集合と一致する. さらにこの対応は団代数 $\mathcal{A}(\Sigma^{t_0})$ の初期 x 変数以外の x 変数と $\Delta(C(B^{t_0}))$ の正ルートの集合との一対一対応を与える.

以上, 主に x 変数に関する性質を述べたが, 最後に y 変数に関する重要な事実を二, 三紹介する.

以下では, 係数半体 $\mathbb{P}$ を初期 y 変数 $y = y^{t_0}$ 自身の普遍半体 $\mathbb{Q}_+(y)$ に選ぶ. このとき, y 変数 y_i^t に対して, (3.3) で導入したトロピカル化写像を以下のように適用することにより得られる整数ベクトル $c_i^t = (c_{ji}^t)_{j=1}^n$ が得られる.

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\mathrm{trop}}: & \mathbb{Q}_+(y) & \to & \mathrm{Trop}(y) \\ & y_i^t & \mapsto & \prod_{j=1}^n (y_j)^{c_{ji}^t}. \end{array} \tag{6.3}$$

このベクトル c_i^t を y_i^t の c **ベクトル** (c-vector) という．作り方より，c ベクトルは「トロピカル y 変数」というべきものであることがわかる．

Definition 6.9 整数ベクトル $v = (v_i)_{i=1}^n$ が，0 ベクトルでなく，かつ「非負成分を持たないかまたは非正成分を持たない」とき，v は**符号同一** (sign-coherent) であるという．

以下の定理は [FZ07] で予想されたが，これも一般的に証明されたのは最近である．

Theorem 6.10 (c **ベクトルの符号同一性** [GHKK14]) 任意の c ベクトルは符号同一である．

符号同一性はルート系との関連を示唆するが，特別な場合には実際それが成り立つ．

Theorem 6.11 (c **ベクトルとルート系の関係** [NC13]) 初期交換行列 B^{t_0} は反対称行列であるとする．このとき，任意の c ベクトルは，$C(B^{t_0})$ の定めるルート系 $\Delta(C(B^{t_0}))$ のルートである．

最後に，個人的には団代数の中で応用上最も重要と考える定理を述べる．n 正則木グラフ $\mathbb{T}_n$ の頂点 t における c ベクトルたちを縦に並べた行列 $C^t = (c_{ji}^t)_{j,i=1}^n$ を**種子** Σ^t **の** C **行列** (C-matrix) という．

Theorem 6.12 (C **行列は種子を定める** [Pla11]) 初期交換行列 B^{t_0} は反対称行列であるとする．このとき，任意の頂点 $t, t' \in \mathbb{T}_n$ に対して，

$$\Sigma^t = \Sigma^{t'} \quad \Longleftrightarrow \quad C^t = C^{t'}. \tag{6.4}$$

$\Longrightarrow$ は自明であるが，$\Longleftarrow$ が全く非自明である．C 行列は y 変数のトロピカル化，すなわち主要項のみのデータであるが，定理はそれらのデータが逆に種子を一意的に定めることを主張しているのである．

なお，Theorem 6.11 と Theorem 6.12 ともに一般の反対称可能行列 B^{t_0} でも成り立つことが予想されている．一方，これらの証明は多元環の表現論と圏化を用いており，そこでは初期交換行列 B^{t_0} が反対称行列であるという仮定が本質的である．一般の場合の新しい着想による解決が待たれる次第である．

7. 一般団代数

最近 Chekhov と Chapiro [CS14] によって導入された一般団代数について簡単に紹介して本稿を終えよう．

はじめに，x 変数の変異 (4.3) は以下のように書き直せることに注意する．

$$x_i' = \begin{cases} x_i^{-1} \left(\displaystyle\prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{jk}]_+} \right) \dfrac{1+\hat{y}_k}{1 \oplus y_k} & i = k \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \qquad \hat{y}_k := y_k \prod_{j=1}^n x_j^{b_{jk}}. \tag{7.1}$$

ここで，変数 $\hat{y}_k$ は $\hat{y}$ 変数と呼ばれ団代数の理論において重要なのであるが，ここではその詳細には触れない．x 変数の変異をこのように表すと，y 変数の変異 (4.2) との類似性が見えて来る．特に，単項式以外の部分に y 変数あるいは $\hat{y}$ 変数の 1 次式 $1 \oplus y_k$, $1 + \hat{y}_k$ が共通して現れる．Chehkhov と Shapiro はこの一次式を一般の多項式 P_k にしても，Laurent 現

象が保たれることに気づき, そのような一般化された変異で得られる代数として一般団代数を導入した.

[CS14] では y 変数の代わりに p 変数という形式で係数が与えられているので, ここでは, y 変数形式で一般団代数を定式化した [Nak15] にしたがって一般団代数の変異を与える.

まず, 今までと同様に, 自然数 n と係数半体 $\mathbb{P}$ を固定し, 一般団代数の種子を団代数の種子と全く同じものとして定義する. 次に種子の変異を一般化するため, **変異データ** (mutation data) と呼ばれるペア $(\mathbf{d},\mathbf{z})$ を一つ固定する. ここで, $\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_n)$, $d_i\in\mathbb{N}$ であり, d_k は k における変異を定める多項式 P_k の次数を与える. また, $\mathbf{z}=(z_{i,s})_{i=1,\dots,n;s=1,\dots,d_i-1}$, $z_{i,s}\in\mathbb{P}$ は多項式 P_k の係数を与える. ここで, 係数の自己相反性 (reciprocity) $z_{i,s}=z_{i,d_i-s}$ を仮定する. また, $z_{i,0}=z_{i,d_i}=1$ とおく. これは, 多項式 P_k の定数項と最高次の係数は常に 1 とおくことという仮定である. 特に, $\mathbf{d}=(1,\dots,1)$ とすると, $\mathbf{z}$ は空であり, 通常の団代数の場合に対応する.

以上の準備のもとに, $k=1,\dots,n$ に対して, 種子 (B,x,y) の k における $(\mathbf{d},\mathbf{z})$ **変異** $(B',x',y')=\mu_k(B,x,y)$ を以下で定める.

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij} & i=k\text{ または }j=k\\ b_{ij}+[-b_{ik}]_+d_kb_{kj}+b_{ik}d_k[b_{kj}]_+ & \text{その他の場合,}\end{cases}\tag{7.2}$$

$$y'_i=\begin{cases}y_i^{-1} & i=k\\ y_i\left(y_k^{[b_{ki}]_+}\right)^{d_k}\left(\bigoplus_{s=0}^{d_k}z_{k,s}y_k^s\right)^{-b_{ki}} & i\neq k,\end{cases}\tag{7.3}$$

$$x'_i=\begin{cases}x_i^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n}x_j^{[-b_{jk}]_+}\right)^{d_k}\dfrac{\sum_{s=0}^{d_k}z_{k,s}\hat{y}_k^s}{\bigoplus_{s=0}^{d_k}z_{k,s}y_k^s} & i=k\\ x_i & i\neq k\end{cases}\qquad \hat{y}_k:=y_k\prod_{j=1}^{n}x_j^{b_{jk}}.\tag{7.4}$$

後は通常の団代数と全く同様にして定義される代数が一般団代数である.

一般団代数に対しても, Laurent 性を始め, 団代数において重要な性質がほとんどそのまま成り立つか, あるいは成り立つことが予想される. (詳しくは, [CS14, Nak15] を参照のこと.) したがって, 一般団代数は団代数の一般化というよりも, 本来は始めから団代数のメンバーに加えられて然るべきものであった, というのが著者の個人的な意見である.

参考文献

[BFZ05] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52; arXiv:math/035434 [math.RT].

[BMR+06] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. in Math. **204** (2006), 572–618; arXiv:math/0402054 [math.RT].

[CS14] L. Chekhov and M. Shapiro, *Teichmüller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables*, Int. Math. Res. Notices **2014** (2014), 2746–2772; arXiv:1111.3963 [math–ph].

[FG07] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichüller theory, Vol. I, Eur. Math. Soc., 2007, pp. 647–684, arXiv:math/0510312 [math.DG].

[FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146; arXiv:math/0608367 [math.RA].

[FT12] S. Fomin and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part II: Lambda lengths*, 2012, arXiv:1210.5569.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].

[FZ03] ———, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].

[FZ07] ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].

[GHKK14] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, 2014, arXiv:1411.1394 [math.AG].

[IN14a] K. Iwaki and T. Nakanishi, *Exact WKB analysis and cluster algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014), 474009; arXiv:1401.7094 [math.CA].

[IN14b] ———, *Exact WKB analysis and cluster algebras II: simple poles, orbifold points, and generalized cluster algebras*, 2014, arXiv:1409.4641 [math.CA].

[Nak10] Tomoki Nakanishi, *Dilogarithm identities and cluster algebras*, 2010, in Japanese, 第55回代数学シンポジウム報告集, http://hdl.handle.net/2237/16356.

[Nak11] T. Nakanishi, **団代数とその応用**, 2011, in Japanese, 2011年度日本数学会秋季総合分科会無限可積分系セッション予稿集, http://hdl.handle.net/2237/23027.

[Nak15] ———, *Structure of seeds in generalized cluster algebras*, Pacific J. Math. **277** (2015), 201–218, arXiv:1409.5967 [math.RA].

[NC13] A. Nájera Chávez, *On the c-vectors of an acyclic cluster algebra*, Int. Math. Res. Notices (2013), doi: 10.1093/imrn/rnt264;arXiv:1203.1415 [math.RA].

[Pla11] P. Plamondon, *Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, Compos. Math. **147** (2011), 1921–1954; arXiv:1004.0830 [math.RT].