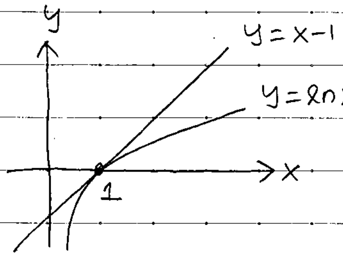
§2.4 テイラーの定理

ex. $\ln 1.2 \approx ?$　　だいたい $0\ (= \ln 1)$ だろうな、とは
わかるが…。



$f(x) = \ln x$

$x=1$ での接線：$y = x-1$

☆ $x \approx 1$ ならば ☆

$\ln x \approx x-1$

$\ln 1.2 \approx 1.2 - 1 = 0.2$

$\shortparallel$

$0.18232155\cdots$

$f(x) = \ln x$ vs. $g(x) = x-1$

① $f(1) = g(1)$

② $f'(1) = g'(1)$

$f''(1) \neq g''(1)$

もし

① $f(1) = h(1)$

② $f'(1) = h'(1)$

③ $f''(1) = h''(1)$

のような h があれば、g よりも もっとよい f の近似ができるのでは？

Recall：<u>平均値の定理（MVT）</u>

$\begin{cases} f\text{は}[a,b]\text{で連続} \\ f\text{は}(a,b)\text{で微分可能} \end{cases}$　（もっというと f は $[a,b]$ を含む区間で C^1 級）

ならば、

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

（つまり、
$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$）

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する。

THM テイラーの定理

$[a,b] \in I$.

$f \in C^n(I)$ （n回連続微分可能）

ならば、

$$(☆)\quad f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

注

R_n（剰余項）

を満たす $c \in (a,b)$ が存在する。

ex. $f(x) = \ln x$ （$\to I = (0,\infty)$ で C^∞ 級）.

$[1,x]$

$n=1$ として ☆ の式をかくと

$$f(x) = f(1) + f'(c)(x-1)$$

$$\ln x = 0 + \frac{1}{c}(x-1)$$

を満たす $c \in (1,x)$ が存在する。

たとえば $\ln 1.2 = \frac{0.2}{c}$, ただし $1 < c < 1.2$.

$$\to\ 0.166\cdots < \frac{0.2}{c} < 0.2.$$

$\Rightarrow\ 0.166\cdots < \ln 1.2 < 0.2.$ さっき（接線を使った時）より よくなった！

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad 0.18232155\cdots$

$n=2$ として ★ の式をかくと…?

$\exists\, c \in (1, x)$ s.t.

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2.$$
$$\ln x = 0 + 1\cdot(x-1) - \frac{1}{2c^2}(x-1)^2.$$

$$\ln 1.2 = 0.2 - \frac{0.2^2}{2c^2}$$ ただし $1 < c < 1.2$.

$\to$ $0.013889 < R_2 < 0.02$

$\Rightarrow$ $0.18 < \ln 1.2 < 0.18611\cdots$

f の a における n 次テイラー展開とは

$$f(x) = \underset{T_n(x)}{\left(\text{(n-1)次多項式}\right)} + \underset{R_n(x)}{\left(\text{剰余項(誤差)}\right)}$$

★ $x \approx a$ ならば★

$f(x) \approx T_n(x)$ で, 誤差も $R_n(x)$ で計算できる。

$a=0$ のときは特別にマクローリン展開とも言われる。

ところで, さっきの例では

$\ln 1.2 \approx ?$

$f(x) = \ln x$ とおいて, $a=1$ で f をテイラー展開した。 区間: $[1, x]$.

$x<1$ の時は? (たとえば $\ln 0.85 \approx ?$)

c は a と x の間に存在する $\Leftrightarrow$ $c = a + \theta(x-a)$ を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。

よって、テイラーの定理を書きなおすと、

$$\begin{cases} 開区間 I, \quad x, a \in I \\ f \in C^n(I) \end{cases}$$

ならば、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する。

ex. $f(x) = \cos x$ の 6次マクローリン展開 $(a=0, n=6)$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(\theta x)}{6!}x^6$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{\cos(\theta x)}{6!}x^6,$$ ただし $0<\theta<1$.

→ $x \approx 0$ では $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ で、
誤差は R_6 ではかれる。

たとえば、

$$\cos 0.3 = \underbrace{1 - \frac{1}{2}(0.3)^2 + \frac{1}{24}(0.3)^4}_{0.9553375} - \frac{\cos(0.3\theta)}{6!}(0.3)^6 \quad (0<\theta<1)$$

$-1 \le \cos(0.3\theta) \le 1$ より.

$$\cos 0.3 = 0.9553375 \pm \underbrace{0.000001012}_{誤差}$$

$\cos 0.3 = 0.95533648\cdots$

Q. $\cos 3$ を近似するためには？