因子変化の記述と準3相因子分析*

村　上　　隆

3相因子分析（three-mode factor analysis, Tucker, 1964, 1966）は，心理学研究においてしばしばあらわれる3－wayのデータを因子分析的に取扱うための一般的なモデルとして知られている。村上・後藤・辻本（1978）は，この方法を縦断的なデータとSD（semantic diffevential）型のデータとに適用して，その有効性と問題点について検討した。本研究はこれに引続き，3相因子分析の実際的な適用のための諸問題について考察する。前記論文では，Tuckerのモデルを，パラメータの単位のとり方に関するわずかな変更を除き，原型のままなるべく多様なデータに適用して，その結果から問題点を探る方針をとったが，本論文では適用の対象となるデータの型を限定した，やや特殊な3相因子分析モデル（準3相因子分析）について論じる。

1.　3相データと因子変化

因子分析は，通常N人の被験者について，n個の変数に対する測定値が存在するという，$N \times n$次のデータ行列を分析することを目的とする。しかし研究の目的によっては，この形のデータ行列が，複数個得られる場合がある。例えば，

1）同一の被験者群に対して，同一の変数群に関する測定が，複数の機会（occasion）においてなされる場合。いわゆる縦断的データ。

2）同一の被験者群に対して，同一の特性群に関する測定が，複数の異なった方法によってなされる場合。このようなデータから得られる相関行列は，multitrait-multimethod matrix と呼ばれる（Campbell & Fiske, 1959）。

3）必ずしも同一の特性の測定を意図しない，2種以上の測定が，同一の項目群を用いてなされる場合（例えば，理想自己と現実自己）。この場合，異なる条件における因子構造の変化と，特性間の関連に興味がある。

このようなデータを x_{ijk} であらわす。ここで添字iは被験者，添字jは尺度または特性，kは機会または方法に対応するものとする。すなわち1つのデータは3つの側面から分類されるわけである。この側面を相（mode）と呼ぶ。この場合，iは被験者相，jは尺度相，kは機会相というわけである。x_{ijk}には3つの相が存在するのでこれを3相データという（図1）。

$$\boldsymbol{X}_k = \overbrace{\begin{bmatrix} \\ x_{ijk} \\ \\ \end{bmatrix}}^{n_j} \Bigg\} N \quad (\mathrm{I})$$

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} x_{ij1} & x_{ij2} & \cdots\cdots & x_{ijk} \end{array}\right] = \left[\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{X}_2 \cdots\cdots \quad \boldsymbol{X}_{n_k}\right] \quad (\mathrm{II})$$

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_{n_k} \end{bmatrix} \quad (\mathrm{III})$$

図1.　3相データ

被験者の数をN，尺度の数をn_j，機会または方法の数をn_kとかく。添字i，j，kは，各々，N，n_j，n_k以下の自然数をとるということになる。Tucker（1964, 1966）では3つの相の添字を明確に区別するための特殊な記法が導入されているが，本研究はそれには従わない。ただし相は，それぞれ上記の固有の添字で区別される。

次にデータ x_{ijk} は，機会または方法ごとに，各尺度について平均が0，分散が1となるように標準化されているものとする。すなわち，

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk} = 0 \quad j = 1, \ldots, n_j, \quad k = 1, \ldots, n_k \qquad (1)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk}^2 = 1 \quad j = 1, \ldots, n_j, \quad k = 1, \ldots, n_k \qquad (2)$$

のように既に変換してあるものとして取扱う。これは，

---

* 本論文における分析例の計算は，名古屋大学大型計算機センターのFACOM 230－75によった。

幾つかの機会を通じての平均値の変動そのものは一応分析の対象外とし，いわゆる因子構造の変化と，個人の相対的位置の変化に関心を集中しようとする立場である。以下，この x_{ijk} のことを素データと呼ぶ。

このようなデータを因子分析しようとするときには，通常の因子分析の目的であるデータの縮約的表現と，それを通じての変数（尺度）の分類，あるいは現象の背後にある基本的な因子の発見，といったことに加えて，上述のような因子の変化を記述することが問題となる。周知のように，因子分析は素データを，因子負荷と因子得点の積和の形で近似する。因子の変化という場合，それが因子負荷の変化であるか，因子得点の側の変化であるか，という形で問題がたてられることが多い。例えば Baltes & Nesselroade (1973) は，因子負荷が不変であるか否か，因子得点が安定であるか否かの組合わせで，因子を4種に分類している。すなわち，

a型　因子負荷不変 ― 因子得点安定
b型　因子負荷不変 ― 因子得点変動
c型　因子負荷変化 ― 因子得点安定
d型　因子負荷変化 ― 因子得点変動

である。これに従って，縦断的データの場合，a型の因子の示すものは“trait”であり，b型の因子は“state”を示す，といった解釈がなされる。

このような因子の分類を行なうための最も単純な方法は，各機会または方法ごとに独立な因子分析を行なうことであろう。因子分析のモデルは次のようにかかれる。

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_{m=1}^{M_k} l_{jmk} f_{imk} \tag{3}$$

ここで，l_{jmk} が因子負荷，f_{imk} が因子得点である。$\hat{x}_{ijk}$ は，このモデルによるデータの近似値であり，$\cong$ は最小2乗その他，何らかの基準による近似を示す。M_k は k 番目の機会，または方法について抽出された因子の数であり，尺度数 n_j，被験者数 N よりかなり小さいことが期待される（図2のI）。なお，異なる k に対する因子負荷，因子得点の間には，アプリオリには何の対応関係も課されていない。

$$\boldsymbol{X}_k = \begin{bmatrix} x_{ijk} \end{bmatrix} \cong N \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} f_{imk} \end{bmatrix}}^{M_k} \right. M_k \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} l_{jmk} \end{bmatrix}}^{n_j} \right. = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{L}_k' \tag{I}$$

$$\boldsymbol{R}_{kk} = \frac{1}{N} \boldsymbol{X}_k' \boldsymbol{X}_k \cong \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{L}_k' \tag{II}$$

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{L}_k (\boldsymbol{L}_k' \boldsymbol{L}_k)^{-1} \tag{III}$$

図2.　機会ごとの因子分析

因子分析を実施するに際しては，共通性推定の問題を含めた解法の選択，因子数の決定，因子軸の回転方法の選択等，考えるべき問題が多い。本論文では，共通性の推定は行なわず，(3)のモデルによって結果的に説明される分散の大きさ，すなわち $\hat{x}_{ijk}$ の分散をもって共通性とみなす。解法としては主軸法（本質的には成分分析）をとる。すなわち，各機会における尺度間相関係数，

$$r_{jj'kk} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ijk} x_{ij'k} \tag{4}$$

を要素とする相関行列 R_{kk} の，大きい順に M_k 番目までの固有値，$\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{M_k k}$ に対応する固有ベクトルを（軸の回転前の）因子負荷とする。（$\boldsymbol{R}_{kk}$ と添字 k が重複している理由は後に明らかになる。以下煩雑になるので本文中では添字 k をしばらく省略する。）因子数は，何らかの方法で決定されているものとする。因子負荷 l_{jm} は，

$$\sum_{j=1}^{n_j} l_{jm}^2 = \lambda_m \qquad m = 1, \ldots, M \tag{5}$$

のように基準化されるが，それによって相関係数は，

$$r_{jj'} \cong \sum_{m=1}^{M_k} l_{jm} l_{j'm} \tag{6}$$

のように近似されることになる（図2のII）。

一方因子得点は，（軸の回転以前には，）

$$f_{im} = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{j=1}^{n_j} l_{jm} x_{ij} \tag{7}$$

のようにして求められる。（これは成分分析における成分得点を分散が1になるように基準化したものに他ならない。）このとき，因子得点の平均値を考えると，

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{im} = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{j=1}^{n_j} l_{jm} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \right)$$

であり，この右辺のカッコの中は，(1)により0となるので，因子得点の平均値はすべての m について0であることがわかる。そこで，次式は因子得点間の共分散ということになるが，l_{jm} が固有ベクトルであることから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{im} f_{im'} &= \frac{1}{\lambda_m \lambda_{m'}} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{j'=1}^{n_j} l_{jm} l_{j'm'} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ijk} x_{ij'k} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_m \lambda_{m'}} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{j'=1}^{n_j} l_{jm} l_{j'm'} r_{jj'} \\ &= \frac{1}{\lambda_m} \sum_{j=1}^{n_j} l_{jm} l_{jm'} \end{aligned}$$

ここで，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ が相互に相異なるものとすれば，それに対応する固有ベクトルは直交すること，及び(5)から，

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{im}f_{im'} = \begin{cases} 1 & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \tag{8}$$

これは，因子得点の分散が1で，かつ互いに直交していることを意味している。逆に(8)を前提とし，これを制約条件として，x_{ijk} と $\hat{x}_{ijk}$ の差の2乗和を最小化するように（最小2乗法）定式化すれば，結局上述のような相関行列の固有値問題に帰着する。いずれにしても，このとき因子負荷は，素データと因子得点の相関係数という意味をもつ。なぜなら，(1)，(2)，(8)から，その相関は，

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}f_{im} = \frac{1}{\lambda_m}\sum_{j=1}^{n_j}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}x_{ij'}\right) l_{j'm}$$

$$= \frac{1}{\lambda_m}\sum_{j=1}^{n_j} r_{jj'}l_{j'm}$$

となるが，再び，l_{jm} が固有ベクトルであることから，

$$l_{jm} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}f_{im} \tag{9}$$

が成り立つ。

この後，因子軸の回転が行なわれる。通常因子負荷をいわゆる単純構造に近づけるような回転法が適用される。変数（尺度）の分類を通じて，解釈を容易にするためである。因子得点に対しても同じ回転が適用される。回転は，直交回転と斜交回転が区別されるが，本論文では直交回転だけを考える。また，これ以後は特に断らない限り因子負荷，因子得点は既に回転済みであるものとする。直交回転によって(6)，(8)，および(9)の性質は不変に保たれる。

なお，計算手順としては，因子負荷の回転が行なわれた後に，因子得点の算出がなされるのが普通であろう。このときは，

$$u_{mm'} = \sum_{j=1}^{n_j} l_{jm}l_{jm'} \tag{10}$$

を要素とする M 次の正方行列の逆行列の要素 $u^{mm'}$ を用いた，

$$f_{im} = \sum_{m'=1}^{M} u^{mm'}\left(\sum_{j=1}^{n_j} l_{jm'}x_{ij}\right) \tag{11}$$

が因子得点の最小2乗解となる（図2のⅢ）。これが実際には，(7)による因子得点を l_{jm} と同様に回転したものと等しくなることは容易に証明できる。

次に，素データ x_{ij} と，モデルによるその近似値 $\hat{x}_{ij}$ との関係についてみてみよう。$\hat{x}_{ij}$ の平均値は，

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{x}_{ij} = \sum_{m=1}^{M} b_{jm}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{im}\right) = 0$$

と尺度ごとに0であるので，その全分散 $\sigma_{\hat{x}}^2$ は，

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \sum_{j=1}^{n_j}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n_j}\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M} b_{jm}b_{jm'}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{im}f_{im'}\right)$$

で定義される。これは(8)により，

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \sum_{j=1}^{n_j}\sum_{m=1}^{M} b_{jm}^2 \tag{12}$$

となる。なお，これを尺度 j ごとに考えた，

$$h_j^2 = \sum_{m=1}^{M} b_{jm}^2$$

が共通性である。また軸の回転以前の因子負荷 l_{jm} を考えれば，(5)により，(12)は，

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \tag{13}$$

となる。x_{ij} と $\hat{x}_{ij}$ の共分散は，(9)により，

$$\sigma_{x\hat{x}} = \sum_{j=1}^{n_j}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}\sum_{m=1}^{M} b_{jm}f_{im}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_j}\sum_{m=1}^{M} b_{jm}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}f_{im}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_j}\sum_{m=1}^{M} b_{jm}^2$$

だから，

$$\sigma_{x\hat{x}} = \sigma_{\hat{x}}^2 \tag{14}$$

であり，また素データ x_{ij} の分散は，(2)により，

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^{n_j}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2\right) = n_j \tag{15}$$

である。従って，x_{ij} と $\hat{x}_{ij}$ の相関の2乗を考えると，

$$r_{x\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_{x\hat{x}}^2}{\sigma_x^2\,\sigma_{\hat{x}}^2} = \frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{\sigma_x^2} = \frac{\sum_{m=1}^{M}\lambda_m}{n_j} \tag{16}$$

これは，データの全分散中，(3)のモデルによって説明される分散の割合をあらわしてもいる。(3)を最小2乗的に解くことの意味は，$r_{x\hat{x}}^2$ または，$\sigma_{\hat{x}}^2/\sigma_x^2$ の最大化に他ならなかったのである。

以上のようにして，それぞれの機会，または方法ごとのデータの縮約的表現ができたわけであるが，因子変化については，前述のように因子負荷と因子得点とに分けて評価することになる。まず，因子負荷については，次のような類似性係数がしばしば用いられる。（添字 k を復活させる。）

$$s_{mk\cdot m'k'} = \frac{\sum_{j=1}^{n_j} l_{jmk}l_{jm'k'}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_j} l_{jm}^2{}_k}\ \sqrt{\sum_{j=1}^{n_j} l_{jm'k'}^2}} \tag{17}$$

これは，因子負荷の大きさ（magnitude）にかかわりなく全体としてのパタンの類似度を評価しようとするものである。絶対値で0と1の間の値をとり，1に近いほど類似性が高い，すなわち異なる機会を通じて不変であるとみなされる。

因子得点については，相関係数

$$r_{mk\cdot m'k'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{imk} f_{im'k'} \tag{18}$$

を用いるのが自然であろう。当然この場合も絶対値が1に近いほど，安定であるとされよう。

Baltes & Nesselroade 流の分類を行なうためには，まず(17)によって異なる時点または方法の間で対応する因子をさがし，続いて(18)によってその対応する因子の因子得点間の相関係数を評価することになろう。因子負荷が対応しなくても因子得点間の相関が高ければ，c型の因子が見出されたことになる。

この，時点または方法を単位として独立に行なわれる分析には，幾つかの問題点が含まれている。まず，因子軸が機会または方法を通じて共通でないため，それらを通じての比較が必ずしも共通の基準にもとづかないことが問題になる。特に，分析単位ごとになされる回転は，類似性係数を不当に低いものにする場合がある。（村上・後藤・辻本，1978における分析例1を参照。）また因子負荷の対応は常に不完全なものであろうから，そういった因子間の因子得点の相関にも疑問の生ずる余地がある。(17)や(18)を高めるように因子回転を行なう方法もありうる（target analysis, Levine, 1977）が，機会の数が3以上の場合に一般化することは容易ではない。

また，分析単位の数が増加すると，因子類似性係数や因子得点間相関係数の行列自体がかなり大きなものとなり，解釈が困難になる。このことは，因子分析の本来の目標の一つである記述の経済という観点からしても好ましくない。そこで3相データ全体を同時に扱えるような分析方法が要求される。

2. 3相データの同時分析

3相データ全体を同時に分析する方法については，既にかなり多くの提案がある。ただし $n_k = 2$ ，すなわち機会または方法の数が2つの場合と，$n_k \geqq 3$ の場合とでは，かなり事情が異なっている。提案されている方法の多くは $n_k = 2$ の場合のものであって，比較的よく知られているものに，Tucker (1959) の inter-battery 法，Corballis & Traub (1970) の縦断的因子分析法（longitudinal factor analysis がある。Hakstian (1973) は，前述した Baltes & Nesselroade (1973) の因子変化の4類型にほぼ合わせたような形で，予想される因子変化を4つの場合にわけ，それぞれに即したモデルを5種類導いているが，これも大部分が $n_k = 2$ の場合に限られている。これらの同時的分析法は多くの場合，2つのデータ行列の共通部分をなるべく多く抽出するように基準が立てられているが，その目的には正準相関分析法も適当であるかもしれない（Levine, 1977）。いずれにしても，これらの方法を $n_k \geqq 3$ の場合に拡張することは，かなり困難である。（Corballis (1973) の縦断的因子分析法の一般化はある。）

$n_k \geqq 3$ の場合に，全データを共通の因子空間で議論するためには，以下に述べる2つの方法が，比較的自然に思いつかれるであろう。これらはいずれも，素データの2つの相をまとめて1つの相として，通常の因子分析法のアルゴリズムを適用するものにすぎないのであるが，因子軸を全データに共通なものとみなしうること，及びパラメータの数の減少がはかれることが利点といえるだろう。これらの方法のバリエーションと考えられるモデルについては，その都度紹介することにしよう。

方法Ⅰ　この方法は，尺度（変数）を各機会において一応別のものとみなす。すなわち $n_j \times n_k$ 個の変数があると考えて，$n_j \times n_k$ 次の大きな相関行列 $\boldsymbol{R}$ を factor-ing の対象とする（図3のⅡ）。$\boldsymbol{R}$ の要素は，

$$r_{jj'kk'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk} x_{ij'k'} \tag{19}$$

とかかれる。因子分析のモデルは，

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_{m=1}^{M} l_{jmk} a_{im} \tag{20}$$

となる（図3のⅠ）。この l_{jmk} は，$\boldsymbol{R}$ の大きい順に m 番目までの固有値に対応する固有ベクトルで，全機会（または方法）に対する因子負荷であり，

$$\sum_{j=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{n_k} l_{jmk}^2 = \lambda_m \tag{21}$$

と基準化される。l_{jmk} に対しては，適当な（直交）回転がなされるが，以下単独の因子分析の場合とパラレルに次のことが成立する。l_{jmk} は，次のように相関係数の最小2乗近似，

$$r_{jj'kk'} \cong \sum_{m=1}^{M} l_{jmk} l_{jm'k'} \tag{22}$$

であり，a_{im} は l_{jmk} が回転された後ならば，(11)と同様な方法で算出される因子得点で，分散が1で直交する。

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{im} a_{im'} = \begin{cases} 1 & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{c:c:c:c} x_{ij1} & x_{ij2} & \cdots\cdots & x_{ijn_k}\end{array}\right] \cong \left[a_{im}\right]\left[l_{mj1} \quad l_{mj2} \quad \cdots\cdots \quad l_{mjn_k}\right] \\
\left[\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{X}_2 \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{X}_{n_k}\right] \cong \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{L}'_1 \quad \boldsymbol{L}'_2 \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{L}'_{n_k}\right] \\
\qquad\qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}'
\end{array}\right\}\text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} & \cdots\cdots & \boldsymbol{R}_{1n_k} \\ \boldsymbol{R}_{21} & \boldsymbol{R}_{22} & \cdots\cdots & \boldsymbol{R}_{2n_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{R}_{n_k1} & \boldsymbol{R}_{n_k2} & \cdots\cdots & \boldsymbol{R}_{n_kn_k} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}'_1 \\ \boldsymbol{X}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}'_{n_k} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{X}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{X}_{n_k}\right] \\
\qquad\qquad \cong \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_1 \\ \boldsymbol{L}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{L}_{n_k} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{L}'_1 \quad \boldsymbol{L}'_2 \cdots\cdots \boldsymbol{L}'_{n_k}\right] \\
\boldsymbol{R} = \frac{1}{N}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \cong \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{L}'
\end{array}\right\}\text{(II)}$$

図 3.　方法 I による 3 相データの因子分析

また，因子負荷は，素データと因子得点との相関という意味をもつ。

$$l_{jmk} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk}\, a_{im} \tag{24}$$

更に(12)〜(16)と同様のプロセスにより，

$$_1r_{x\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_{\hat{x}}^2}{\sigma_x^2} = \frac{\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{n_j}\sum_{k=1}^{n_k} b_{jm}^2{}_k}{n_j\, n_k} \tag{25}$$

は，x_{ijk} と $\hat{x}_{ijk}$ の相関の 2 乗であるとともに，全分散中モデルによって説明される部分の割合である。

Bentler (1973) は，この方法を identical factor score method と呼んでいる。Hakstian (1973) において Case Ⅲ と呼ばれているものは，本質的に，この方法と同一である。Evans (1967) のモデルは，これに平均値の変化を含めて分析するようになっている。Corballis (1973) の一般化された縦断的因子分析法も $\boldsymbol{R}$ を出発点とする点で，この方法とつながりがある。ただしモデル自体は，(3)であり，異なる機会の間の因子得点の直交性を仮定することによって，因子得点も機会によって変化することを認めるようになっている。(ただし，その結果軸の回転はできない。)

方法 II　この方法では，被験者の方を機会ごとに異なるものとみなして因子分析を行なう。モデルは，

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_{P=1}^{P} b_{jp} f_{ipk} \tag{26}$$

のようになる (図 4 の I)。因子負荷 b_{jp} を求めるための相関行列 $\overline{\boldsymbol{R}}$ の要素は，

$$\bar{r}_{jj'} = \frac{1}{n_k\, N}\sum_{k=1}^{nk}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk}\, x_{ij'k} \tag{27}$$

のようになるが，これは機会ごとの相関行列 $\boldsymbol{R}_{kk}$ を平均したもの，

$$\bar{r}_{jj'} = \frac{1}{n_k}\sum_{k=1}^{nk} r_{jj'kk} \tag{28}$$

でもある (図 4 の II)。因子負荷 b_{jp} は，$\overline{\boldsymbol{R}}$ の P 番目までの固有値に対応する固有ベクトルとしてまず求められ，

$$\sum_{p=1}^{P} b_{jp}^2 = \lambda_p \qquad p = 1, \ldots, P \tag{29}$$

と基準化された後，(直交) 回転される。以下，

$$r_{jj'} \cong \sum_{p=1}^{P} b_{jp} b_{j'p} \tag{30}$$

が最小2乗近似であること，因子得点が次のような意味で，分散が1で直交すること，

$$\frac{1}{n_k N} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{N} f_{ipk} f_{ip'k} = \begin{cases} 1 & (p = p') \\ 0 & (p \neq p') \end{cases} \tag{31}$$

b_{jp} が素データと因子得点との相関係数であること，

$$b_{jp} = \frac{1}{n_k N} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{N} x_{ijk} f_{ipk} \tag{32}$$

は，前と同様に成り立つ。なお，(31)は，あくまでも全機会を通してみたときに成立するにすぎず，因子得点の機会毎の分散共分数

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{ipk} f_{ip'k} \tag{33}$$

は，$p = p'$ のとき1となるとは限らず，$p \neq p'$ のとき0となるとは限らない。(ただし，(2)により，平均値は機会ごとに0となっている。)

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_{n_k} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{n_k} \end{bmatrix} m \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} b_{mj} \end{bmatrix}}^{n_j} \right. \\ \widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{B}' \end{array}\right\} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{R}} = \dfrac{1}{n_k N} \widetilde{\boldsymbol{X}}'\widetilde{\boldsymbol{X}} = \dfrac{1}{n_k}\left(\dfrac{1}{N}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \cdots + \dfrac{1}{N}\boldsymbol{X}_{n_k}'\boldsymbol{X}_{n_k}\right) \\ \overline{\boldsymbol{R}} = \dfrac{1}{n_k}\left(\boldsymbol{R}_{11} + \cdots + \boldsymbol{R}_{n_k n_k}\right) \cong \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' \end{array}\right\} \text{(II)}$$

図4. 方法IIによる3相データの因子分析

(26)のモデルによる，x_{ijk} と $\hat{x}_{ijk}$ の相関係数の2乗を考えると

$${}_{I}r_{x^2x} = \frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_x{}^2} = \frac{\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{nj} b_{jp}^2}{n_j} = \frac{\sum_{p=1}^{P} \lambda_p}{n_j} \tag{34}$$

となり，やはり全分散中に占めるモデルによって説明される分散の割合になっている。(この方法では，相関行列 $\overline{\boldsymbol{R}}$ を求めるとき n_k で割り算が行なわれているため，全分散は n_j である。)

この方法は Bentler (1973) では，Within−group covariance method と呼ばれている。Hakstian(1973) の Case II は(33)の直交性を条件として(26)を解くものであるが，$n_k = 2$ の場合に限定され，$n_k \geqq 3$ に一般化することは困難である。

この節で述べた2つの方法は，少くとも形式的には，因子負荷または，因子得点のうちどちらか一方は，全機会を通じて一定であることを前提としていた。因子変化に関する情報は，方法Aでは(17)を用いて因子負荷の変化として，方法Bでは(18)によって因子得点の変化として得られるにすぎない。しかしながら実際には，どちらのモデルにも因子負荷と因子得点両方の変化が潜在的に含まれているのである。この2つの方法を統合し，更にデータを縮約して表現するとともに，因子変化をよりよく記述すると考えられるモデルを次節で述べる。

3. 準3相因子分析

Tucker (1964) による3相因子分析の原型は，3相データを次のような4つの項の積和で近似しようとするものである。

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q} a_{im} b_{jp} c_{kq} g_{mpq} \tag{35}$$

ここで考察しようとするモデルは，単にこれから機会に関する因子負荷 c_{kq} を除いただけのものである。

$$x_{ijk} \cong \hat{x}_{ijk} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} a_{im} b_{jp} g_{mpk} \tag{36}$$

以下このモデルを準3相因子分析（quasi three−mode factor analysis）と呼ぶ。本論文で考察の対象にしているような3相データは，機会または方法の数がさほど多くはない場合が多いと考えられるから，Tucker のモデル原型のまま適用することには多分に無理があり，かえって(36)の単純なモデルの方が適用範囲は広いと考えられる。

相 m と p は，それぞれ被験者因子，尺度因子と呼ばれる。a_{im} は被験者 i の，m 番目の被験者因子における因子得点，b_{jp} は尺度 j の，p 番目の尺度因子に対する因子負荷である。ここで被験者因子と尺度因子とは，一応直接的関係はなく，また，必ずしも $M = P$ でなくてもよい。3相のパラメータである g_{mpk} は，この2つの因子の間の関連度を示すとともに，因子変化を表現するものであり，その意味は次節で明らかになるであろう。

形式的にみると，まず(36)の項の順序を入れかえ

$$x_{ijk} \cong \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{p=1}^{P} b_{jp} g_{mpk}\right) a_{im}$$

これと，前節の方法Ⅰのモデル(20)と比較すると，

$$l_{jkm} \cong \sum_{p=1}^{P} b_{jp} g_{mpk} \tag{37}$$

である。また，もう一度(36)の項を入れかえて，

$$x_{ijk} \cong \sum_{p=1}^{P} b_{jp} \left(\sum_{m=1}^{M} a_{im} g_{mpk} \right)$$

これを，方法Ⅱのモデル(26)と比較して，

$$f_{ipk} \cong \sum_{m=1}^{M} a_{im} g_{mpk} \tag{38}$$

である。すなわち，方法Ⅰと方法Ⅱで，機会によって変化することが仮定されていたパラメータを，もう一度積和の形に分解してデータの縮約をはかったことになっている（図5の(Ⅰ)，(Ⅱ)）。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}' &= \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{L}_1' \ \boldsymbol{L}_2' \cdots\cdots \boldsymbol{L}_{n_k}'\right] \\ &\cong \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{B}' \ \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{B}' \cdots \boldsymbol{G}_{n_k}\boldsymbol{B}'\right] \end{aligned} \tag{Ⅰ}$$

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{n_k} \end{bmatrix} \boldsymbol{B}' \cong \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_{n_k} \end{bmatrix} \boldsymbol{B}' \tag{Ⅱ}$$

$$\boldsymbol{G}_k = (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1} \boldsymbol{B}'\boldsymbol{L}_k = \frac{1}{N} \boldsymbol{A}'\boldsymbol{F}_k \tag{Ⅲ}$$

$$(k = 1, \cdots, n_k)$$

図5.　準3相因子分析

さて，モデル(36)の解法であるが，ここでは，a_{im} としては，前節の方法Ⅰによる因子得点，すなわち(20)式の a_{im} を，b_{jp} は方法Ⅱによる因子負荷，(26)式の b_{jp} をそのまま採用する。a_{im}, b_{jp} をそのように固定したとすれば，核行列の要素 g_{mpk} は次のような最小2乗法で推定することが可能である。まず，(36)の x_{ijk} と $\hat{x}_{ijk}$ の差の2乗和を機会ごとに考える。

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_j} (x_{ijk} - \hat{x}_{ijk})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_j} \left(x_{ijk} - \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} a_{im} b_{jp} g_{mpk}\right)^2 \end{aligned} \tag{39}$$

この S_k を g_{mpk} で偏微分して0とおく。

$$\frac{\partial S_k}{\partial g_{mpk}} = 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_j} \left(x_{ijk} - \sum_{m'=1}^{M}\sum_{p'=1}^{P} a_{im'} b_{jp'} g_{m'p'k}\right) a_{im} b_{jp} = 0$$

これを整理して，

$$\sum_{m'=1}^{M}\sum_{p'=1}^{P} g_{m'p'k} \sum_{j=1}^{n_j} b_{jp} b_{jp'} \sum_{i=1}^{N} a_{im} a_{im'} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_j} a_{im} b_{jp} x_{ijk}$$

ここで，この両辺を N で割り，a_{im} の分散が1で直交すること（(23)式）を利用して，

$$\sum_{p'=1}^{P} g_{mp'k} \sum_{j=1}^{n_j} b_{jp} b_{jp'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{im} b_{jp} x_{ijk} \tag{40}$$

更に，これに(24)を代入し，また，

$$u_{pp'} = \sum_{j=1}^{n_j} b_{jp} b_{jp'} \tag{41}$$

とおくことにより，

$$\sum_{p'=1}^{P} u_{pp'} g_{mp'k} = \sum_{j=1}^{n_j} b_{jp} l_{jmk} \tag{42}$$

となる。この右辺は，方法Ⅱによる因子負荷 b_{jp} と，方法Ⅰによる機会 k の因子負荷 l_{jmk} の間の因子類似性係数（(17)で定義される）の分子である。これを，

$$s^*_{p \cdot mk} = \sum_{j=1}^{n_j} b_{jp} l_{jmk} \tag{43}$$

とおき，$u_{pp'}$ を要素とする P 次の正方行列の逆行列の要素を $u^{pp'}$ とすれば，結局

$$g_{mpk} = \sum_{p'=1}^{P} u^{pp'} s^*_{p' \cdot mk} \tag{44}$$

で g_{mpk} が求まる（図5のⅢ）。

このやり方は，必ずしも(36)を全体として最小2乗的に解いたことにはなっていない。しかしながら，もし全パラメータを同時に最小2乗的に推定しようとすれば，かなり複雑な逐次近似法（例えば Carroll & Chang,1970 の canonical decomposition）を用いる必要がでてくるが，そのような方法の数値計算上の頑健性には疑問がある。また実現可能な方法で，少くとも上記のやり方よりは，S_kを小さくする方法もないわけではない。（(37)，(38)を直接解くこと。）しかし，ここでは，前節で述べたような同時的分析法のパラメータ a_{im} と b_{jp} を採用することにより，それらの方法との自然なつながりを重要視することにする。これによって，g_{mpk} に次節で述べるような統計量としての意味が付与されるようになる。

Tucker（1964，1966）は(35)の原型のモデルにおいて，b_{jp} として $\overline{\boldsymbol{R}}$ の固有ベクトルを単位長さ（2乗和1）に基準化した b^*_{jp} を，b_{jp} の値として採用している。(36)においてもこうすると固有ベクトルの直交性により，核

行列の要素は，

$$g^*_{mpk} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_j} a_{im}\, b^*_{jp}\, x_{ijk} = \sum_{j=1}^{n_j} b^*_{jp}\, l_{jmk} \quad (45)$$

となる。このとき，a_{im} と b^*_{jp} がともに直交することになり，尺度相と被験者相が完全に対称的に取り扱えるようになる。g^*_{mpk} を要素とする核行列を素核行列と呼ぶことにする。

粗核行列は，もう1つ都合のよい性質をもっている。(36)において，b_{jp} を b^*_{jp} に，g_{mpk} を g^*_{mpk} におきかえた，

$$\hat{x}_{ijk} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} a_{im}\, b^*_{jp}\, g^*_{mpk} \quad (46)$$

を考えよう。この値そのものは，(36)と全く変わらず，$\hat{x}_{ijk}$ の平均は，尺度ごとに0となる。$\hat{x}_{ijk}$ の全分散は，

$$\sigma^2_{\hat{x}} = \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_j}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{x}^2_{ijk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{p'=1}^{P} g^*_{mpk}\, g^*_{m'p'k}\sum_{j=1}^{n_j} b^*_{jp}\, b^*_{jp'}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{im}\, a_{im'}\right)$$

である。ここで，a_{im} と b^*_{jp} の直交性により，

$$\sigma^2_{\hat{x}} = \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} g^{*2}_{mpk} \quad (47)$$

すなわち，素核行列の要素の2乗は，通常の因子分析における固有値と似た役割を果たし，モデルによって説明される分散の大きさを示す。これは要素ごとに考えても同様で，g^*_{mpk} は，機会 k において，被験者因子 m と尺度因子 p の組み合わせによって説明される分散の大きさに一致する。なお，x_{ijk} と $\hat{x}_{ijk}$ の共分散についても，

$$\sigma_{x\hat{x}} = \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_j}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk}\,\hat{x}_{ijk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} g^*_{mpk}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_j} a_{im}\, b^*_{jp}\, x_{ijk}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} g^{*2}_{mpk}$$

だから，

$$\sigma_{x\hat{x}} = \sigma^2_{\hat{x}} \quad (48)$$

である。また，素データ x_{ijk} そのものの分散は，

$$\sigma^2_x = \sum_{k=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_j}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^2_{ijk} = n_j\, n_k \quad (49)$$

そこで，x_{ijk} と $\hat{x}_{ijk}$ の相関係数の2乗は，

$$_{\mathrm{III}}r^2_{x\hat{x}} = \frac{\sigma^2_{\hat{x}}}{\sigma^2_x} = \frac{\sum_{k=1}^{n_k}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} g^{*2}_{mpk}}{n_j\, n_k} \quad (50)$$

で，これは，データの全分散中(36)のモデルによって説明される部分の割合である。

$\sigma^2_{\hat{x}}$ を，(44)による g_{mpk} で考えると，

$$\sigma^2_{\hat{x}} = \sum_{k=1}^{nk}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{p'=1}^{P} g_{mpk}\, g_{mp'k}\sum_{j=1}^{nj} b_{jp}\, b_{jp'}$$

$$= \sum_{k=1}^{nk}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P} g_{mpk}\, s^*_{p\cdot mk} \quad (51)$$

で，やや複雑になる。またこの積 $g_{mpk}\, s^*_{p\cdot mk}$ は，要素ごとに考えたとき，モデルによる分散に，完全には一致しない。(共分散ではある。) b_{jp} として方法IIの因子負荷を用いたことにより，回転によって b_{jp} の直交性が失なわれるためである。

(46)の対称性は，かなり魅力的ではあるが，因子変化の記述及び通常の因子分析との比較という観点からは，b_{jp} として方法IIの因子負荷を使う最初に記したモデルの方が適切であろう。本論文では，以後(36)として，これのみを考える。

最後に因子軸の回転について触れておこう。被験者因子 m，尺度因子 p については，それぞれ方法I，IIにおいて，l_{jmk} と b_{jp} が単純構造になるように回転が行なわれている。核行列は，そのままで十分解釈可能な場合も多いであろう。しかしながら，核行列を単純構造にするよう回転することも可能である。この回転は，被験者因子相について，

$$g^{\dagger}_{mpk} = \sum_{m=1}^{M} g_{m'pk}\, t_{mm'} \quad (52)$$

のように行なうことも，尺度因子相について，

$$g^{\dagger\dagger}_{mpk} = \sum_{p=1}^{P} g_{mp'k}\, t_{pp'} \quad (53)$$

のようにすることもできる。ここで t_{mm} は M 次の，$t_{pp'}$ は P 次の直交行列の要素とする。この際当然，b_{jp}，a_{im} についても対応した回転がなされる必要がある。

4. 核行列の意味と因子変化の表現

準3相因子分析が，素データを，単に(36)の形で近似するというだけのことであれば，データをより少数のパラメータによって説明可能にするというデータ縮約の意味はあるとしても，データ分析の手法としての効用は余り感じられないであろう。そこで次に，(36)に含まれる3種のパラメータ，特に核行列の意味，及びそれがどのように因子変化を表現するか，ということについて考察しよう。

核行列の要素の意味を考えるために，もう一度その計算式(44)にもどってみよう。(43)及び，(24)によって，これは次のように書きかえることができる。

$$g_{mpk} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{im}\left(\sum_{p'=1}^{P} u^{pp'}\sum_{j=1}^{n_j} b_{jp'}x_{ijk}\right) \qquad (54)$$

このカッコ内は(11)と比較することによってわかるように，同時的分析の方法Ⅱにおける因子得点の計算式に他ならない。かくして，

$$g_{mpk} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{im} f_{ipk} \qquad (55)$$

これは方法Ⅰによる因子得点と，方法Ⅱによる k 番目の機会における因子得点との共分散である。a_{im} の分散は1であり，f_{ipk} の分散は機会ごとには1にならないが，因子負荷が，機会を通じて安定している場合には，ほぼ1の近辺にあると考えられるから，g_{mpk} の最大値は，ほぼ1程度であることがこれからわかる。g_{mpk} が因子得点間の共分散であるというこの性質は，核行列を回転しても，保持される。実際(52)によって被験者相についての回転を行なったとき，

$$g^{\dagger}_{mpk} = \sum_{m=1}^{M} g_{m'pk}\, t_{mm'}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M} a_{im'} t_{mm'}\right) f_{ipk}$$

であって，これは核行列に対応した回転を施された a_{im} と f_{ipk} との共分散となる。(53)の場合も同様で，$g^{\dagger\dagger}_{mpk}$ は a_{im} と，回転された f_{ipk} との共分散となる。

核行列の要素が，a_{im} と f_{ipk} との間の，ほぼ相関に近い共分散であることから，g_{mpk} によって，Baltes & Nesselroade (1973) の4つの型（a～d）の因子を弁別することができることがわかる。もし因子負荷 b_{jp} で表現される因子がa型なら，どの機会 k についても，同一の m に対して g_{mpk} は1に近い値をとるであろう。すなわち因子得点は $a_{im}(i = 1, \ldots, N)$ で安定している。p 因子がb型なら，k の値によって核行列が大きい値をとるような m は変わるであろう。例えば，$k = 1$ のとき g_{mp1} の値が大きく，$k = 2$ のとき，$g_{m'p2}$ の値が大きいとすれば，因子得点は，a_{im} から $a_{im'}$ へと変動したわけである。また被験者因子 m の側から見て，k の値によって核行列の値の大きい p が変わるようなら，c型の因子が見出されたことになる。例えば，$k = 1$ のとき g_{mp1} の値が大きく，$k = 2$ のとき $g_{mp'2}$ の値が大きいならば，$a_{im}(i = 1, \ldots, N)$ という因子得点分布をもつ因子の因子負荷は，$b_{jp}(j = 1, \ldots, n_j)$ から，$b_{jp'}(j = 1, \ldots, n_j)$ へと変化したことを意味している。ある k の値以外のところに，特に大きな g_{mpk} の値を見出せないような m，p の組合わせからなる因子はd型である。

以上のことを図式的に示したのが，表1である。ここには2つの機会に対する核行列が表示されている。それぞれ行は被験者因子を，列は尺度因子に対応する。大文字**A**～**D**は1に近い値を，小文字**a**～**d**は，**A**～**D**よりかなり小さい値を示し，記号のないところは，ほぼ値が0であることを示すものとする。**A**は，2つの機会において，ともに1行1列に大きな値をとり，因子負荷，因子得点とも殆んど変化しないa型因子である。**B**，**b**はどちらの機会においても尺度相第2因子（II_p）において値が大きいが，被験者相については，$k = 1$ のとき第2因子（II_m），$k = 2$ のときは第3因子（III_m）でより大きな値をとっている。すなわちb型因子である。これとちょうど逆に**C**，**c**は，c型の因子をあらわしている。**D**，**d**はd型因子である。

Baltes & Nesselroade (1973) の分類自体，一つの理想であり，実際にはもっと入り組んだ形があらわれて来ることは当然である。しかし原理的には，この4つの型の分類が，準3相因子分析によって区別しうることが明らかにされたと思われる。

準3相因子分析の因子変化の記述方法としての意味を考えてみよう。因子負荷 b_{jp} と因子得点 a_{im} は，全時点に共通のパラメータと言うよりは，全データに含まれるあらゆる因子構造を良く代表する因子負荷ベクトル，因子得点ベクトルの集合のようなものとみるべきであると思われる。その集合の中から g_{mpk} によって適切に重みづけて選ばれたベクトルによって，各時点の(3)式のような因子モデルが構成される。g_{mpk} を単なる重みというだけでなく，各機会に対応する因子得点と，代表ベクトルとしての因子得点との相関という統計量の形で，その意味を裏づけることができたことは，原型のモデル(35)から1つパラメータを除き，かつ b_{jp} を方法Ⅱの因子負荷としたことによって生じた大きなメリットである。

別の見方をすれば，因子変化を(18)のように，すべての機会の因子得点相互の関連度でみるのではなしに，個々の因子得点と，代表ベクトルとしての a_{im} との関連度でみる形になっているとも言える。いわば，(18)を要素とする因子得点間相関行列を，縮約的に表現したのが，核行列であるとみることもできるわけである。

なお，g_{mpk} を真の意味での相関係数に変換するには，f_{ipk} の標準偏差で割ればよい。その際 f_{ipk} そのものが求まっている必要はなく，因子得点ウェイト，

$$w_{jp} = \sum_{p'=1}^{P} u^{pp'} b_{jp'} \qquad j = 1, \ldots, n_j \qquad (56)$$

と相関行列 $\boldsymbol{R}$ によって，因子得点間の分散を，

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{ipk} f_{ip'k'} = \sum_{j=1}^{n_j}\sum_{j'=1}^{n_j} r_{jj'kk'} w_{jp} w_{j'p'} \tag{57}$$

によって求めることができるから，この，$p = p'$，$k = k'$ の場合を利用すればよい。

表1　核行列による因子変化の分類

$k = 1$

$m \backslash p$	I	II	III	IV	V	VI
I	A					
II		B				
III		b	C	c		
IV					D	d
V					d	d
VI						

$k = 2$

$m \backslash p$	I	II	III	IV	V	VI
I	A					
II		b				
III		B				
IV			c	C		
V					d	d
VI					d	D

もう一つの因子比較の指標である因子類似性と核行列との関係は，既に核行列の計算式(44)に示されている。この場合も $s^*_{p\cdot mk}$ は，全体を代表する因子負荷 b_{jp} と個々の機会における因子負荷 l_{jmk} との類似性という形の縮約された因子変化の表現となっている。ただし，b_{jp} と a_{im} を非対称に取り扱ったことにより，g_{mpk} と $s^*_{p\cdot mk}$ の関係は，やや複雑である。（b_{jp} が回転によって直交性を失なっていることにより，$u^{pp'}$ は対角行列でなく，g_{mpk} と $s^*_{p\cdot mk}$ とは単純な比例関係にない。）もし，g_{mpk} を因子類似性の近似値とみなすとすれば，因子の分類に関する議論は，前と同様になるであろう。

なお，後に考える因子数の問題とも関連するが，データに対する準3相モデルの適切さの程度を知るために，次の2つの指標は有用であろう。

$$\rho_{\mathrm{I}} = \frac{{}_{\mathrm{III}}r^2_{xx\hat{}}}{{}_{\mathrm{I}}r^2_{xx\hat{}}} \tag{58}$$

$$\rho_{\mathrm{II}} = \frac{{}_{\mathrm{III}}r^2_{xx\hat{}}}{{}_{\mathrm{II}}r^2_{xx\hat{}}} \tag{59}$$

${}_{\mathrm{I}}r^2_{xx\hat{}}$，${}_{\mathrm{II}}r^2_{xx\hat{}}$，${}_{\mathrm{III}}r^2_{xx\hat{}}$ は，それぞれ(25)，(34)，(50)で与えられる，方法Ⅰ，方法Ⅱ，準3相モデルによって説明される分散の割合である。(37)，(38)からわかるように，準3相モデルは方法Ⅰと方法Ⅱのパラメータを更に分解したものだから常に ${}_{\mathrm{III}}r^2_{xx\hat{}} \leqq {}_{\mathrm{I}}r^2_{xx\hat{}}$，かつ ${}_{\mathrm{III}}r^2_{xx\hat{}} \leqq {}_{\mathrm{II}}r^2_{xx\hat{}}$ である。ゆえに ρ_{I} と ρ_{II} は0と1の間の値をとり，方法Ⅰと方法Ⅱに対する準3相因子分析の効率を示している。

また，(51)を要素ごとにとった $g_{mpk}\cdot s^*_{p\cdot mk}$ も，通常の因子分析における因子負荷の因子ごとの2乗和とほぼ同じ意味をもち，その因子の組み合わせの重要度を示すものとして解釈に際して参考になろう。

5. 分析例

モデルの有効性は実際のデータへの適用を通じて明らかにされる。準3相因子分析は，既に幾つかの実際のデータに対して適用されているが，それについては別論文にゆずり，ここでは計算手順を説明するための簡単な人工データの分析例を示すにとどめる。

まず，分析の出発点となる相関行列 $\boldsymbol{R}$ を表2に示す。尺度（変数）の数 $n_j = 12$，機会の数 $n_k = 2$ である。2種の因子得点 a_{im} と f_{ipk} の値“そのもの”を除けば，準3相因子分析に必要な全情報がここに含まれている。実はこの相関行列は，表3のように仮定された4因子構造の因子負荷 l_{jmk} から，

$$r_{jj'kk'} = \sum_{m=1}^{4} l_{jmk} l_{j'mk'}$$

によって導かれたものである。ただし対角要素は1に，異なる時点間の部分行列 $\boldsymbol{R}_{12}$ と $\boldsymbol{R}_{21}$ の対角要素 $r_{jjkk'}$（これは，異なる機会の間の同一項目間の相関係数である。）は，その行または列の最大値におきかえてある。

この $\boldsymbol{R}$ から改めて求められた因子負荷をVarimax 回転した l_{jmk} を表4に示す（方法Ⅰ）。ほぼ，もとの表3の構造が再現されている。共通性 h^2_j が増加したのは，$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}_{12}$ の対角要素をおきかえた結果で当然である。

$\boldsymbol{R}$ から算出された $\overline{\boldsymbol{R}}$（(28)式）による，方式Ⅱの因子負荷（Varimax回転）を表5に示す。第Ⅰ因子は尺度1～4，第Ⅱ因子は尺度5～8，第Ⅲ因子は尺度9, 11, 12,第Ⅳ因子は尺度10が，それぞれ高い負荷をもっている。

次に(44)式による核行列を表6に示す。目安として，0.5以上の値を拾ってみる。尺度相(p)の第Ⅰ因子と被験者相(m)の第Ⅰ因子の組み合わせは，$k = 1, 2$ においてともに値が大きく，a型の因子となっている。また尺度相第Ⅱ因子は $k = 1$ において被験者相第Ⅲ因子に，$k = 2$ において第Ⅳ因子に値が大きくb型因子であることがわかる。他方，被験者相第Ⅱ因子は，$k = 1$ においては尺度相第

表2. 相 関 行 列 ***R***

$k \diagdown k'$	$j \diagdown j'$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		1												2											
1	1	1.00																							
	2	0.75	1.00																						
	3	0.63	0.65	1.00																					
	4	0.56	0.50	0.44	1.00																				
	5	-0.14	-0.11	0.09	0.02	1.00																			
	6	-0.29	-0.14	0.08	-0.01	0.48	1.00																		
	7	-0.01	0.08	0.26	0.14	0.50	0.59	1.00																	
	8	-0.11	0.01	0.24	0.08	0.59	0.72	0.74	1.00																
	9	0.08	0.25	0.19	0.02	-0.18	0.15	0.08	0.09	1.00															
	10	0.11	0.27	0.14	0.04	-0.31	0.03	-0.02	-0.04	0.72	1.00														
	11	0.15	0.28	0.20	0.02	-0.26	0.00	-0.07	-0.08	0.55	0.61	1.00													
	12	0.14	0.16	0.11	0.16	-0.01	0.04	0.13	0.11	0.18	0.24	0.10	1.00												
2	1	0.80	0.55	0.50	0.48	0.01	-0.27	0.00	-0.08	-0.24	-0.27	-0.13	0.02	1.00											
	2	0.80	0.80	0.62	0.50	-0.13	-0.31	-0.07	-0.16	-0.01	-0.02	0.11	0.04	0.72	1.00										
	3	0.55	0.57	0.62	0.32	-0.11	-0.09	0.02	-0.02	0.24	0.23	0.29	0.06	0.39	0.56	1.00									
	4	0.62	0.53	0.42	0.62	-0.23	-0.39	-0.23	-0.32	-0.03	-0.02	0.11	-0.02	0.56	0.67	0.44	1.00								
	5	-0.09	0.00	0.23	-0.10	0.79	0.44	0.32	0.43	-0.05	-0.25	-0.02	-0.20	0.03	0.05	0.13	-0.01	1.00							
	6	-0.04	0.08	0.22	-0.08	0.18	0.44	0.22	0.30	0.18	0.06	0.18	-0.10	-0.06	0.04	0.18	0.00	0.52	1.00						
	7	0.09	0.17	0.35	-0.04	0.22	0.28	0.35	0.25	0.01	-0.18	0.10	-0.23	0.16	0.26	0.30	0.20	0.75	0.56	1.00					
	8	0.12	0.21	0.36	0.02	0.21	0.30	0.23	0.43	0.10	-0.05	0.14	-0.13	0.13	0.23	0.29	0.15	0.61	0.48	0.69	1.00				
	9	0.09	0.26	0.15	-0.02	-0.33	0.02	-0.08	-0.09	0.81	0.81	0.64	0.16	-0.27	0.01	0.27	0.03	-0.12	0.16	-0.01	0.07	1.00			
	10	0.07	0.11	0.15	0.00	0.02	0.07	0.03	0.05	0.08	0.81	0.11	-0.06	0.05	0.12	0.15	0.10	0.23	0.20	0.29	0.24	0.09	1.00		
	11	0.17	0.32	0.23	0.06	-0.25	0.05	0.00	-0.01	0.64	0.72	0.64	0.17	-0.16	0.09	0.30	0.07	-0.08	0.16	0.02	0.10	0.72	0.09	1.00	
	12	0.08	0.28	0.23	0.00	-0.19	0.19	0.09	0.11	0.73	0.79	0.63	0.79	-0.27	0.00	0.29	-0.02	0.02	0.26	0.10	0.18	0.80	0.12	0.72	1.00

原

著

表3　仮定された因子負荷行列

m / j \ k	I		II		III		IV		h^2	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	**0.90**	**0.80**	0.10	−0.30	0.00	0.00	−0.10	0.00	0.83	0.73
2	**0.80**	**0.90**	0.30	0.00	0.10	−0.10	0.00	0.10	0.74	0.83
3	**0.70**	**0.60**	0.20	0.30	0.30	0.00	0.20	0.20	0.66	0.49
4	**0.60**	**0.70**	0.00	0.00	0.20	−0.30	−0.20	0.10	0.44	0.59
5	−0.10	0.00	−0.30	−0.10	**0.60**	0.30	0.20	**0.80**	0.50	0.74
6	−0.30	0.00	0.10	0.20	**0.70**	0.20	0.30	**0.60**	0.68	0.44
7	0.00	0.20	0.00	0.00	**0.80**	0.10	0.10	**0.90**	0.65	0.86
8	−0.10	0.20	0.00	0.10	**0.90**	0.20	0.20	**0.70**	0.86	0.58
9	0.00	0.00	**0.80**	**0.90**	0.10	−0.10	0.00	0.00	0.65	0.82
10	0.00	0.10	**0.90**	0.10	0.00	0.00	−0.20	0.30	0.85	0.11
11	0.10	0.10	**0.70**	**0.80**	−0.10	0.00	0.10	0.00	0.52	0.65
12	0.10	0.00	0.20	**0.90**	0.20	0.10	−0.30	0.10	0.18	0.83
2乗和	2.43	2.40	2.22	2.51	2.50	0.30	0.41	2.46	7.56	7.67

表4　$\boldsymbol{R}$から再現された因子負荷行列$\boldsymbol{L}$

m / j \ k	I		II		III		IV		h^2	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	**0.91**	**0.82**	0.08	−0.32	−0.09	−0.06	−0.05	0.02	0.84	0.78
2	**0.83**	**0.89**	0.28	−0.02	0.02	−0.16	0.05	0.15	0.77	0.84
3	**0.74**	**0.64**	0.19	0.29	0.25	−0.04	0.23	0.27	0.71	0.57
4	**0.71**	**0.74**	−0.02	−0.03	0.14	−0.34	−0.21	0.12	0.57	0.68
5	−0.07	0.00	−0.33	−0.16	**0.71**	0.45	0.24	**0.77**	0.67	0.82
6	−0.26	−0.02	0.11	0.19	**0.76**	0.25	0.26	**0.67**	0.72	0.55
7	0.06	0.19	0.00	−0.04	**0.83**	0.20	0.09	**0.85**	0.69	0.79
8	−0.04	0.20	0.00	0.07	**0.88**	0.26	0.17	**0.73**	0.81	0.65
9	0.01	0.00	**0.83**	**0.90**	0.08	−0.11	0.03	0.05	0.70	0.83
10	−0.00	0.05	**0.92**	0.27	−0.10	−0.08	−0.01	0.43	0.86	0.27
11	0.09	0.11	**0.74**	**0.82**	−0.13	−0.03	0.16	0.05	0.60	0.69
12	0.17	0.06	0.38	**0.93**	0.36	0.23	−0.51	−0.04	0.56	0.92
2乗和	2.69	2.52	2.48	2.68	2.79	0.59	0.55	2.59	8.51	8.38

表 5　因子負荷行列 $\boldsymbol{B}$

$j \diagdown p$	I	II	III	IV	h^2
1	**0.88**	−0.09	−0.16	0.06	0.80
2	**0.88**	0.01	0.08	0.15	0.81
3	**0.73**	0.22	0.29	−0.00	0.66
4	**0.78**	0.04	0.02	−0.05	0.62
5	−0.02	**0.82**	−0.16	−0.10	0.71
6	−0.13	**0.79**	0.16	0.09	0.68
7	0.18	**0.86**	0.00	0.07	0.78
8	0.11	**0.87**	0.07	0.02	0.77
9	0.01	0.00	**0.82**	0.33	0.77
10	0.09	0.07	0.23	**0.91**	0.88
11	0.09	−0.08	**0.77**	0.30	0.69
12	0.43	0.12	**0.82**	−0.19	0.72
2乗和	2.77	2.88	2.15	1.11	8.90

表 6　核　行　列

$k = 1$

$m \diagdown p$	I	II	III	IV
I	**0.98**	−0.13	0.08	−0.14
II	0.08	−0.10	**0.65**	**0.87**
III	0.05	**0.95**	0.17	−0.27
IV	−0.03	0.22	−0.16	0.23

$k = 2$

$m \diagdown p$	I	II	III	IV
I	**0.94**	0.06	0.02	−0.02
II	−0.11	0.01	**1.12**	−0.01
III	−0.19	0.36	0.15	−0.17
IV	0.11	**0.89**	−0.08	0.41

表 7　因子得点間の共分散行列

		1				2			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	I	1.02							
	II	−0.09	1.02						
	III	−0.11	0.01	0.62					
	IV	0.03	0.19	0.31	1.16				
2	I	0.87	−0.27	0.02	0.18	0.98			
	II	0.05	0.48	0.08	0.03	0.09	0.98		
	III	−0.10	0.13	0.79	0.80	0.11	−0.01	1.38	
	IV	0.01	−0.02	−0.31	0.60	−0.03	−0.19	−0.31	0.84

表 8　データとモデルの共分散

$k = 1$

$m \diagdown p$	I	II	III	IV
I	**2.64**	0.01	0.03	−0.02
II	0.05	0.01	**1.23**	**1.18**
III	0.02	**2.64**	0.07	0.03
IV	0.00	0.13	0.03	0.04

$k = 2$

$m \diagdown p$	I	II	III	IV
I	**2.48**	0.03	0.00	−0.00
II	−0.00	0.00	**2.68**	−0.00
III	0.09	0.35	0.01	0.03
IV	0.07	**2.33**	−0.02	0.21

III因子，$k = 2$においては，尺度相第IV因子に負荷が高く，c型因子である。

もう一度表4にもどると，以上のことはこれからも見てとれる。このことから，方法Iでは因子得点が全機会を通じて固定されているから因子得点の変化を知ることができない，という見解が必ずしも正しくないことがわかる。経験的には，方法Iはむしろb型因子的なものを示しすぎる特性があるようである。そのとき，核行列を被験者相について回転すること（(52)式）により，本来の対応関係が回復できる場合もある。c型因子である第II因子の負荷のパターンは，尺度因子 b_{jp}（表5）の第III，第IV因子のパターンと完全な対応を示していないが，これは，b_{jp} に施されたVarimax 回転の特性によると思われる。

表7は，方法IIの因子得点 f_{ipk} の共分散行列である。((56), (57)式による。）これからも，前記の因子分類はだいたいみてとれる。核行列はこれらをより縮約して表現したものに他ならない。機会の数 n_k，因子数 M，P が増加するに従って，その効用は増大する。

モデルのあてはまりを見ると，${}_{\mathrm{I}}r^2_{x\hat{x}} = .70$, ${}_{\mathrm{II}}r^2_{x\hat{x}} = .74$, ${}_{\mathrm{III}}r^2_{x\hat{x}} = .68$ で $\rho_{\mathrm{I}} = .97$, $\rho_{\mathrm{II}} = .92$　となる。3相モデルの効率が極めて高いのは，人工データだから当然で

ある。最後に，素データとモデルとの共分散を表8に示しておく。これは，核行列とほぼ同様の様相を示している。

6. まとめと今後の問題

Bentler (1973) は，発達的な因子変化を記述するための分析方法を概観した中で3相因子分析に触れ，この方法が発達データに適用された例はなく，この状態は，計量心理学者達がこの方法をよく知るようになり，学生に教えるようになるまで続くであろう，と述べている。"この状態" は現在も続いており，統計手法としての精密化こそ行なわれているものの (Bentler & Lee, 1978), 実際のデータに適用された例は，あい変わらずほとんどない。

この理由の1つとしては，Tucker による原型のモデル(35)が，余りにも複雑で，結果の解釈が困難なこと，また機会 k についてもfactoring がなされる形になっているため，n_k がかなり大きくなければならないと一般に考えられていることがあげられよう。本論文で考察したモデル(36)は，これよりは単純であり，$n_k \geqq 2$ ならば常に適用可能である。

3相因子分析の適用が余り行なわれないもう1つの理由として，Tucker の定式化が3つの相の対称性を強調する余り，因子負荷の単位を通常のものと変えていることがあげられよう。そのため3相因子分析の結果を他の方法と比較することは困難であった。また核行列の意味もいまひとつ明確でなかった。本論文では，3相データを通常の因子分析によって2相データとして分析する際に考えられる2つの分析モデル，(20)と(26)のパラメータを(36)の因子得点 a_{im}，因子負荷 b_{jp} として採用することにより，他の分析方法との関連が明確化された。これとパラメータを1つ減らしたこととの副産物として，核行列の要素を，(20)と(26)における2つの因子得点間の共分散として意味づけることができた ((55)式)。また，(20)と(26)の因子負荷の間の類似性との関係も明らかにできた ((44)式)。これによってデータに含まれる因子変化を Baltes & Nesselroade (1973) 流に，4種の型に分類することもできた。

もっとも，因子負荷の単位を通常の因子負荷とそろえることは，Levin (1965) によってもなされている。ただし，それ以上の考察は行なわれていない。ともかく，本論文のモデルは，3相因子分析の考え方を実用的なものにする方向に一歩を進めることができた，と考えられる。

実際の適用に際しての最大の問題は因子数の決定法であろう。原型のモデルでは，3つの因子数 M, P, Q を決めなければならなかったが，準3相モデルでは，M, P の2つでよい。しかしなお，これは難しい。現在のところ，方法Ⅰと方法Ⅱによる分析を行なう際に，固有値の減少のしかた，その他の基準で決定する以上に特に推奨できるやり方をもちあわせていない。ただし，この2つの方法で抽出される分散は共通したものとは限らないから，それぞれの方法の水準では適当な因子数であっても，準3相モデルとしては十分でない場合もありうる。そのために，(50)の ${}_{\mathrm{III}}r^2_{\hat{x}\hat{x}}$ の値も見ておく必要がある。また ρ_{I}, ρ_{II} も参考にすることができるかもしれない。これらの指標は，M と P の関数であり，幾つかの M, P の値の組み合わせについて計算しておくことは参考になる。

モデルの問題として考える必要があるのは，共通性推定であろう。本論文で述べてきたのは，要するに成分分析モデルであり，これを因子分析の名に値するものにするためには，共通性推定の問題は避けて通ることができない。3相モデルでは何をもって共通性と呼ぶか，という点に最大の問題がある。Tucker (1966) には，多少の考察があるが，そこでは $\boldsymbol{R}$ の対角要素のみを問題にしている。しかしながら，異なる機会における同一の尺度間の相関 $r_{jjkk'}$ には，明らかに独自性分散が含まれると思われるから，この部分についても考慮せねばならないだろう。更に，$\overline{\boldsymbol{R}}$ の共通性とどう整合させるか，という問題もある。これは今後の課題である。

文　献

Baltes, P. B. & Nesselroade, J. R. 1973 The developmental analysis of individual differences on multiple measures. In J. R. Nesselronde & H. W. Reese (Eds.) *Life-span developmental psychology: Methodological issues.* Academic Press. Pp. 219 – 251.

Bentler, P. M. 1973 Assessment of Developmental factor change at the individual and growth level. In J. R. Nesselronde & H. W. Reese (Eds.) *Life-span Developmental psychology: Methodological issues.* New York: Academic Press. Pp 145 – 174.

Bentler, P. M. & Lee, S. Y. 1978 Statistical aspects of a three-mode factor analysis model. *Psychometrika,* **43**, 343 – 352.

Campbell, D. T. & Fiske, D. W. 1959 Convergent and discriminant validation by the multitrait-multimethod

matrix. *Psychological* **Bulletin**, **56**, 81 – 105.

Carroll, J. D. & Chang, J. J. 1970 Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika.* **35**, 283 – 319.

Corballis, M. C. 1973 A factor model for analysing change. *The British Journal of Mathematical & Statistical Psychology*, **26**, 90 – 97.

Corball is, M. C. & Traub, R. E. 1970 Longitudinal factor analysis. *Psychometrika*, **35**, 79 – 98.

Evans, G. T. 1967 Factor analytical, treatment of growth data. *Multivariate Behavioral Research*, **2**, 109 – 134.

Hakstian, A. R. 1973 Procedures for the factor analytic treatment of measures obtained on different occasions. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology.*

Levin, J. 1965 Three-mode factor analysis. *Psychological Bulletin*, **64**, 442 – 452.

Levine, M. S. 1977 *Canonical Analysis and Factor Comparison.* Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07 – 006. Beverly Hills and London: Sage Pablications.

村上　隆・後藤宗理・辻本英夫　1978　3相因子分析の適用上の諸問題．　名古屋大学教育学部紀要（教育心理学科），**25**，19－39.

Tucker, L. R. 1958 Aninter-battery method of factor analysis. *Psychometrika*, **23**, 111 – 136.

Tucker, L. R. 1964 The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. In N. Frederiksen and H. Gulliksen (Eds.) *Contributions to mathematical psychology.* New York: Holt, Rinehart and Winston. Pp. 109 – 127.

Tucker, L. R. 1966 Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, **31**, 279 – 311.

（1979年8月17日受理）

DESCRIPTION OF FACTOR CHANGE AND QUASI THREE-MODE FACTOR ANALYSIS

Takashi MURAKAMI

A simplified three-mode factor analysis model is investigated as a procedure for factor analysis of data matrices obtained on several occasions and for assessment of factor change. The model, termed quasi three-mode factor analysis, approximates the raw data x_{ijk}, which designates i^{th} individual's score on j^{th} scale on k^{th} occasion, by the following equations.

$$x_{ijk} \cong \sum_{m=1}^{P} \sum_{p=1}^{M} a_{im}\, b_{jp}\, g_{mpk} \qquad i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, n_j, k = 1, \ldots, n_k \tag{1}$$

where x_{ijk}'s are assumed to be standardized to have zero mean and unit variance for each scale on each occasion. That is

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk} = 0, \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ijk}^2 = 1 \qquad j = 1, \ldots, n_j, \quad k = 1, \ldots, n_k \tag{2}$$

The only difference of this model from Tucker's original one is that occasion factor coefficients are removed in Eq. (1), but this minor change makes this model applicable to any data with $n_k \geqq 2$.

Let $\boldsymbol{X}_k$ be $N \times n_j$ matrix of x_{ijk} for k^{th} occasion, $\boldsymbol{A}$ be the $N \times M$ matrix, $\boldsymbol{B}$ be the $n_j \times P$ matrix, and $\boldsymbol{G}_k$ be the $M \times P$ matrix, which is called the core matrix, then equation (1) is written in matrix form as

$$\boldsymbol{X}_k \cong \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{B}' \qquad k = 1, \ldots, n_k \tag{3}$$

Matrix $\boldsymbol{A}$ is obtained by the factor analysis of $N \times n_j n_k$ data matrix $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1 \ldots \boldsymbol{X}_{n_k})$$

as

$$X \cong A L' \tag{4}$$

where A is factor score matrix which is subjected to constraints

$$\frac{1}{N} A' A = I$$

In the analysis, factor scores are taken to be the same on each occasion. The loading matrix L, however, contains n_k *loading* matrices for separate occasions.

That is

$$L = (L_1 \ldots L_{n_k})$$

This factoring method of three-mode data is called *method I.*

In *method II,* on the other hand, we begin with $n_k N \times n_j$ data matrix $\widetilde{X}$.

$$\widetilde{X}' = (X_1' \ldots X'_{n_k})$$

($\widetilde{X}'$ is transposed matrix of $\widetilde{X}$.) and B is obtained as factor loading matrix in the following factor analysis of $\widetilde{X}$.

$$\widetilde{X} \cong FB' \tag{5}$$

where B is, in this model, a single factor loading matrix common for each occasion and F is a following super matrix which involves n_k factor score matrices.

$$F = (F_1 \ldots F_{n_k})$$

F_k's have zero mean for each factor, and F is orthogonal and has unit variance for each factor in the following sense.

$$\frac{1}{N} F' F = I$$

Two methods described above are usual factor analytic treatment of three-mode data. In quasi three-mode model, matrix A and B are considered to be the criterion for description of factor change by core matrices.

Using L_k in method I and B in method II, core matirx G_k is obtained by

$$G_k = L'_k B (B'B)^{-1} \qquad k = 1, \ldots, n_k \tag{6}$$

in the least squares sense. G_k may be submitted to orthogonal simple structure transformation, if necessary.

These procedures do not yield the overall least squares solutions for Eq. (1), but make the quasi three-mode model interpretable as the summarized form of method I and method II.

The core matrix G_k has a useful interpretation that it is the covariance matrix of factor scores in F_k with factor scores in A. That is

$$G_k = \frac{1}{N} F'_k A \tag{7}$$

This shows that G_k gives the relations between factors on k^{th} occasion and the criterion factors, thus assessing the factor change through n_k occasions. Moreover, the core matrix can distinguish factor loadings change from factor scores change. As the matter of facts, G_k's are shown to exibit the characteristic patterns corresponding to the four types of factor changes suggested by Baltes & Nesselroade (1973).