社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
SS2010-63 (2011-3)

制約付き木オートマトンとその閉包性

倉橋 克尚† 酒井 正彦† 西田 直樹† 野村 太志††*
坂部 俊樹† 草刈圭一朗†

† 名古屋大学大学院情報科学研究科
†† 名古屋大学工学部電気電子・情報工学科
〒 464-8603 名古屋市千種区不老町
E-mail: †{kura@sakabe.i.,sakai@,nishida@,sakabe@,kusakari@}is.nagoya-u.ac.jp

あらまし 木オートマトンは項を入力としたオートマトンであり，和集合・補集合・積集合演算に閉じていることや空判定問題が決定可能であることから，項書換え系の性質を調べることに有効である．また，近年，制約付き項書換え系に関する研究が行われており，特に定理自動証明の研究が注目されている．本稿では，等号不等号制約付き木オートマトンの制約を任意の制約系を指定できるように一般化した制約付き木オートマトンを提案し，任意の制約付き木オートマトンに対して決定性と完全性を持ち受理集合が等価である制約付き木オートマトンが存在することを示す．さらに，制約付き木オートマトンのクラスが和・積・補集合演算に閉じていることを示す．
キーワード 木オートマトン，制約，閉包性

Tree Automata with Constraints and their Closure-Properties

Katsuhisa KURAHASHI†, Masahiko SAKAI†, Naoki NISHIDA†, Futoshi NOMURA††*,
Toshiki SAKABE†, and Keiichirou KUSAKARI†

† Graduate School of Information Science, Nagoya University
†† Department of Information Engineering, School of Engineering, Nagoya University
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464–8603, Japan
E-mail: †{kura@sakabe.i.,sakai@,nishida@,sakabe@,kusakari@}is.nagoya-u.ac.jp

Abstract Tree automata are useful in analyzing properties of term rewriting systems since the class of recognizable tree languages is closed under union, intersection and complement and since the emptiness problem is decidable. Recently, constrained term rewriting systems are investigated and theorem proving methods of constrained systems attract attention. In this paper, by generalizing tree automata with equality and disequality constraints, we propose tree automata with constraints, for which one can specify structures that give an interpretation of predicate symbols and some function symbols. We also show that for every tree automaton with constraints there exists a deterministic and complete tree automaton with constraints, which recognizes the tree language recognized by the former one. In addition, we show that the class of recognized tree languages for tree automata with constraints is closed under union, intersection and complement.
Key words tree automata, constraint, closure property

1. はじめに

木オートマトン [2] は項を入力としたオートマトンであり，和・積・補集合演算に閉じていることや空判定問題が決定可能なことから，項書換え系 [1] の性質を調べることに有効である．また，近年，項書換え系を拡張した制約付き項書換え系に関する研究が行われている [5]．制約付き項書換え系は書換え規則に付随した制約が真の時にその書換え規則を適用して項の書換えを行う計算モデルであり，制約付き項書換え系の書換え帰納法に基づいた定理自動証明の研究が注目されている [4]．その証明

(注*)：2009 年 3 月卒業．

法では，R 完全性と呼ばれる性質の判定が必要である．さらに，対象の制約付き項書換え系が解釈を与えられている関数記号に関する十分完全性，すなわち，解釈可能な項に対する関数適用は必ず書き換えられる性質を持つ場合には項の解釈に関連した推論規則を利用できる．項の位置が R 完全であるとは，その位置にある部分項のあらゆるインスタンスがリデックスであることである．これらの性質は制約のない項書換え系では決定可能であるが，制約付き項書換え系ではその判定方法は知られておらず，決定可能かどうかも不明である．R 完全性の判定は，その部分項のインスタンスの集合がリデックスの集合に包含されるかどうかという問題に帰着できる．解釈を与えられて関数記号に関する十分完全性の判定は，解釈可能な項への関数適用を表す項の集合がリデックスの集合に包含されるかどうかという問題に帰着できる．よって，制約を満たす項の集合を受理する木オートマトンがこれらの性質の判定に有効であると考えられる．制約が導入された木オートマトンとして，等号不等号制約付き木オートマトン [3] が知られている．この木オートマトンでは，項が構造的等価であるときに真と解釈される述語のみが導入されており，遷移規則はその述語と項から構成される一階述語論理式を制約として持つことができる．等号不等号制約付き木オートマトンは述語が一つに限定されているため，整数上の線形制約を導入された制約付き項書換え系の R 完全性や十分完全性の判定には利用できない．

本稿では，等号不等号制約付き木オートマトン [3] の制約を一階述語論理式に一般化した制約付き木オートマトンを提案し，任意の制約付き木オートマトンについて，決定性，完全性を持つ等価な木オートマトンが存在すること，および，制約付き木オートマトンのクラスが和・積・補集合演算に閉じることを示す．さらに，和集合や積集合を受理する制約付き木オートマトンを生成する際に状態の数を削減する手法を提案する．

本稿は次のように構成される．2. 章では，項および制約の概念や記法を与える．3. 章では，制約付き木オートマトンを提案する．4. 章では，制約付き木オートマトンを受理集合が等価で決定性・完全性を持つ制約付き木オートマトンに変換できることを示す．5. 章では，制約付き木オートマトンのクラスが和・積・補集合演算に閉じていることを示す．6. 章では，今後の課題を挙げる．

2. 準　　備

本章では，項書換え系の基本的な概念および記法を与える [1].

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，**変数**の可算無限集合 $\mathcal{V}$ から生成されるすべての**項**の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．関数記号 f の引数個数を $\mathrm{arity}(f)$ で表す．また，変数を含まない項を**基底項**と呼び，基底項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ とする．項 t に現れるすべての変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ で表す．項 s と t が同一であるときは $s \equiv t$ と記述する．項 t における**位置**の集合を $\mathcal{P}os(t)$ とする：$\mathcal{P}os(x) = \{\varepsilon\}$ （$x \in \mathcal{V}$ のとき），$\mathcal{P}os(f(t_1,\cdots,t_n)) = \{\varepsilon\} \cup \{i \cdot p \mid 1 \leqq i \leqq n,\ p \in \mathcal{P}os(t_i)\}$ （$f \in \mathcal{F}$ かつ $\mathrm{arity}(f) = n$ のとき）．**ホール** $\square \notin \mathcal{F}$ を特別な定数記号とする．**文脈**とは，$\square$ を一つだけ含む項である．ホール自身も文脈であり，このような文脈を空の文脈という．文脈 $C[\,]$ において位置 p に出現するホール $\square$ を項 t で置き換えることによって得られる項を $C[t]_p$ と記す．なお，p を省略してもよい．$\mathcal{F},\mathcal{V}$ 上のすべての文脈の集合を $\mathcal{T}_\square(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．項 t,u に対して $t \equiv C[u]_p$ となるような文脈 $C[\,]$ が存在するとき，u を t の**部分項**と呼ぶ．また，p における部分項 u を $t|_p$ と記す．

代入 σ の定義域と値域をそれぞれ $\mathcal{D}om(\sigma)$ （$= \{x \mid x \not\equiv \sigma(x)\}$）と $\mathcal{R}an(\sigma)$ （$= \{\sigma(x) \mid x \in \mathcal{D}om(\sigma)\}$）で表す．$\mathcal{D}om(\sigma) = \{x_1,\cdots,x_n\}$ かつ $\sigma(x_i) \equiv t_i$ のとき，σ を $\{x_1 \mapsto t_1,\cdots,x_n \mapsto t_n\}$ と記す．項 t に対して，$\sigma(t)$ を t の**インスタンス**と呼び，$t\sigma$ と略記する．項 t に対して，$t\sigma_g$ が基底項となるような σ_g を t に対する**基底代入**という．単純に基底代入と呼ぶときには，それ以降に現れる項にその代入を行うと基底項になる代入を指す．

制約は関数記号の集合 $\mathcal{G}$，述語記号の集合 $\mathcal{P}$，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{P}$ の構造 $\mathcal{M}$ とする．述語記号 p の引数個数を $\mathrm{arity}(p)$ で表す．$\mathcal{G}$ と $\mathcal{P}$ で定義される論理式 ϕ を BNF 記法を用いて次のように定める．

$$\phi \quad ::= \quad p(t_1,\cdots,t_n) \mid \neg\phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \wedge \phi \mid \top \mid \bot$$

ただし，$p \in \mathcal{P}$，$\mathrm{arity}(p) = n$，$t_1,\cdots,t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{V})$ とする．$\top$ と $\bot$ はそれぞれ真と偽に相当する．なお，本論文では限量子は用いない．また，変数を含まない論理式を**閉じた**論理式と呼ぶ．$\mathcal{G},\mathcal{P}$ から成る論理式の集合を $L(\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{V})$ と記述する．$\mathcal{G}$ と $\mathcal{P}$ の解釈である**構造** $\mathcal{M}$ は，**領域**と呼ばれる空でない集合 A，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{P}$ の解釈から成り立つ．任意の n 引数関数記号 $f \in \mathcal{G}$ は，$A^n \to A$ の関数で解釈され，その関数を $f^{\mathcal{M}}$ と書く．任意の n 引数述語関数 $p \in \mathcal{P}$ は，A^n の組みの集合（$\subseteq A^n$）で解釈され，その組みを $p^{\mathcal{M}}$ と書く（すなわち，$p^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$）．基底項 $f(t_1,\cdots,t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{V})$ の解釈は $(f(t_1,\cdots,t_n))^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}((t_1)^{\mathcal{M}},\cdots,(t_n)^{\mathcal{M}})$ とし，閉じた論理式 c の $\mathcal{M}$ での解釈は通常の定義に従う．c が $\mathcal{M}$ で真と解釈されるとき，c は $\mathcal{M}$ **のもとで真である**といい，$\mathcal{M} \models c$ と書く．一方，偽と解釈されるときは，c は $\mathcal{M}$ **のもとで偽である**といい，$\mathcal{M} \not\models c$ と書く．$\mathcal{M}$ で解釈される論理式を（$\mathcal{M}$ **で解釈される**）**制約**と呼ぶ．

3. 制約付き木オートマトンの提案

木オートマトン [2] は関数記号の集合，状態の集合，最終状態の集合，遷移規則の集合の四つ組みで定義される．等号不等号制約付き木オートマトンは木オートマトンの遷移規則に解釈が $\equiv$ で与えられる述語 $=$ のみである論理式を遷移規則に付加することで定義される．解釈を与えられた関数記号と述語記号，その解釈を定める構造からなる制約系における制約付き木オートマトンを，解釈を与えられた関数記号と述語記号の集合 $\mathcal{G}$，$\mathcal{P}$，それらに解釈を与える構造 $\mathcal{M}$，それ以外の関数記号の集合 $\mathcal{F}$，状態の集合 Q，最終状態の集合 Q_f，遷移規則の集合 Δ の七つ組みで定義する．各遷移規則に付随される論理式では，通常の変数の代わりに対象項の位置を表す自然数列を用いる．これは等号不等号制約付き木オートマトンと同様である．自然数列 $a \in \mathcal{N}^+$ を $\langle\,\rangle$ で囲んだ記号 $\langle a\rangle$ を変数とみなし，それらの

集合を $\langle\mathcal{N}^+\rangle$ とする．

定義 3.1 (制約付き木オートマトン) $\mathcal{F},\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$ を満たす関数記号の集合，$\mathcal{P}$ を述語記号の集合，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{G}$ と $\mathcal{P}$ に解釈を与える構造とする．$(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ **上の制約付き木オートマトン**は，七つ組み $(Q,\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M},Q_f,\Delta)$ である．なお，Q は状態の有限集合であり $Q\cap(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})=\emptyset$ を満たし，Q_f は受理状態の集合であり $Q_f\subseteq Q$ を満たす．さらに，Δ は以下のすべてを満たす遷移規則 $f(q_1(x_1),\cdots,q_n(x_n))\xrightarrow{c}q(f(x_1,\cdots,x_n))$ の有限集合である：

- $f\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$,
- $\mathrm{arity}(f)=n$,
- $q_1,\cdots,q_n,q\in Q$,
- $c\in L(\mathcal{G},\langle\mathcal{N}^+\rangle,\mathcal{P})$,
- $x_1,\cdots,x_n$ はすべて異なる変数である．

付随した論理式が $\top$ である遷移規則 $l\xrightarrow{\top}r$ は単に $l\to r$ と書いてもよい．制約付き木オートマトン $(Q,\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M},Q_f,\Delta)$ を $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ **上の制約付き木オートマトン**と呼び，(Q,Q_f,Δ) の三つ組で略記する．

次に，制約付き木オートマトンの遷移関係の定義に必要である対象項に対する論理式の解釈を定義する．

定義 3.2 ($t\models c$) 解釈が与えられていない関数記号の集合を $\mathcal{F}$，解釈が与えられている関数記号の集合を $\mathcal{G}$ ($\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$)，述語記号の集合を $\mathcal{P}$，$\mathcal{G},\mathcal{P}$ に解釈を与える構造を $\mathcal{M}$ とする．基底項 $t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ を環境とした項 $u\in\mathcal{T}(\mathcal{G},\langle\mathcal{N}^+\rangle)$ から得られる項 $I_t(u)$ を以下のように再帰的に定義する．

- $f\in\mathcal{G}$ かつ $\mathrm{arity}(f)=n$ かつ $I_t(t_1),\cdots,I_t(t_n)$ が定義されているならば，$I_t(f(t_1,\cdots,t_n))=f(I_t(t_1),\cdots,I_t(t_n))$,
- $\langle\pi\rangle\in\langle\mathcal{N}^+\rangle$ かつ $\pi\in\mathcal{P}os(t)$ かつ $t|_\pi\in\mathcal{T}(\mathcal{G})$ ならば，$I_t(\langle\pi\rangle)=t|_\pi$.

項 $t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ を環境とした論理式 $c\in L(\mathcal{G},\langle\mathcal{N}^+\rangle,\mathcal{P})$ の $\mathcal{M}$ による解釈 $\mathcal{M},t\models c$ を以下のように再帰的に定義する．

- $p\in\mathcal{P}$ かつ $\mathrm{arity}(p)=n$ かつ $t_1,\cdots,t_n\in\mathcal{T}(\mathcal{G},\langle\mathcal{N}^+\rangle)$ かつ $I_t(t_1),\cdots,I_t(t_n)$ が定義されており $\mathcal{M}\models p(I_t(t_1),\cdots,I_t(t_n))$ であるならば，$\mathcal{M},t\models p(t_1,\cdots,t_n)$,
- $\mathcal{M},t\models\top$,
- $\mathcal{M},t\not\models c'$ ならば，$\mathcal{M},t\models\neg c'$,
- $\mathcal{M},t\models c_1$ かつ $\mathcal{M},t\models c_2$ ならば，$\mathcal{M},t\models c_1\vee c_2$,
- $\mathcal{M},t\models c_1$ かつ $\mathcal{M},t\models c_2$ ならば，$\mathcal{M},t\models c_1\wedge c_2$.

$\mathcal{M},t\models c$ のとき，c は（$\mathcal{M}$ **において**）t **で充足される**という．

次に，制約付き木オートマトンの遷移関係を定義する．

定義 3.3 $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付木オートマトン $\mathcal{A}=(Q,Q_f,\Delta)$ の遷移関係 $\to_\mathcal{A}$ は以下のすべてを満たす最小の関係である．

- $f\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ かつ $\mathrm{arity}(f)=n$ かつ $t_1,\cdots,t_n\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ かつ $f(q_1(x_1),\cdots,q_n(x_n))\xrightarrow{c}q(f(x_1,\cdots,x_n))\in\Delta$ かつ $\mathcal{M},f(t_1,\cdots,t_n)\models c$ ならば，$f(q_1(t_1),\cdots,q_n(t_n))\to_\mathcal{A} q(f(t_1,\cdots,t_n))$,
- $f\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ かつ $\mathrm{arity}(f)=n$ かつ $t_1,\cdots,t_n\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G}\cup Q)$ かつ $t_i\to_\mathcal{A} u$ かつ $t_1,\cdots,t_n$ には Q の記号の入れ子が存在しないならば，$f(t_1,\cdots,t_n)\to_\mathcal{A} f(t_1,\cdots,t_{i-1},u,t_{i+1},\cdots,t_n)$.

$\xrightarrow{*}_\mathcal{A}$ は $\to_\mathcal{A}$ の反射推移閉包を表す．$\mathcal{A}=(Q,Q_f,\Delta)$ を $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付木オートマトンとする．基底項 $t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ に対して $t\xrightarrow{*}_\mathcal{A} q(t)$ かつ $q\in Q_f$ のとき，$\mathcal{A}$ **は** t **を受理する**という．$\mathcal{A}$ が受理する項の集合を $L(\mathcal{A})$ で表す．任意の基底項 $t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ について $t\xrightarrow{*}_\mathcal{A} q(t)$ となる状態 $q\in Q$ が存在するとき，$\mathcal{A}$ は**完全**であるという．任意の基底項 $t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ と状態 $q,q'\in Q$ について $t\xrightarrow{*}_\mathcal{A} q(t)$ かつ $t\xrightarrow{*}_\mathcal{A} q'(t)$ を満たすならば $q=q'$ であるとき，$\mathcal{A}$ は**決定的**であるという．以降では，状態記号 q の引数を省略する．例えば，$q(x)$ や $q(t)$ は q と記述し，遷移規則 $f(q_1(x_1),\cdots,q_n(x_n))\xrightarrow{c}q(f(x_1,\cdots,x_n))$ は単に $f(q_1,\cdots,q_n)\xrightarrow{c}q$ と記す．

例 3.4 $\mathcal{F}=\{\mathsf{f}(,),\mathsf{g}()\}$，$\mathcal{G}=\{\mathsf{s}(),\mathsf{0}\}$，$\mathcal{P}=\{=,\geq,<\}$ とし，$\mathcal{G},\mathcal{P}$ に解釈を与える構造 $\mathcal{M}$ の領域を自然数の集合とし $\mathsf{s}^\mathcal{M}(x)=x+1$，$\mathsf{0}^\mathcal{M}=0$，$=^\mathcal{M}=\{(n,n)\mid n$ は自然数 $\}$，$\geq^\mathcal{M}=\{(n,m)\mid n\geq m,\ n,m$ は自然数 $\}$，$<^\mathcal{M}=\{(n,m)\mid n<m,\ n,m$ は自然数 $\}$ とする．以下のように定義される $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}=(Q,Q_f,\Delta)$ を考える．

- $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$,
- $Q_f=\{q_2\}$,
- $\Delta=\left\{\begin{array}{ll}\mathsf{0}\to q_0 & \mathsf{s}(q_0)\to q_1\\ \mathsf{s}(q_1)\to q_1 & \mathsf{f}(q_1,q_1)\xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle}q_2\\ \mathsf{f}(q_1,q_1)\to q_3 & \end{array}\right\}$

$\mathcal{M},\mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})),\mathsf{s}(\mathsf{0}))\models\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle$ より項 $\mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})),\mathsf{s}(\mathsf{0}))$ は $\mathsf{f}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})),\mathsf{s}(\mathsf{0}))\xrightarrow{*}_\mathcal{A}\mathsf{f}(q_1,q_1)\to_\mathcal{A} q_2$ のように受理状態 q_2 へ遷移できるので，この項は $\mathcal{A}$ で受理される．

制約付き木オートマトンの遷移規則の制約の真偽判定では，相反する述語の解釈に矛盾が生じる場合がある．p_1 と p_2 を n 引数の述語記号，$\mathcal{M}$ を A を領域とする構造とし，$p_1^\mathcal{M}=A^n\setminus p_2^\mathcal{M}$ とする．このとき，任意の解釈可能な項 $t_1,\cdots,t_n$ について，$\mathcal{M}\models p_1(t_1,\cdots,t_n)$ のとき，かつそのときに限り，$\mathcal{M}\models\neg p_2(t_1,\cdots,t_n)$ である．しかし，「任意の項 t と任意の解釈可能な項 $t_1,\cdots,t_n$ について，$\mathcal{M},t\models p_1(t_1,\cdots,t_n)$ のとき，かつそのときに限り，$\mathcal{M},t\models\neg p_2(t_1,\cdots,t_n)$ である」とは限らない．例えば，例 3.4 の述語 $\geq$ と $<$ では，$\mathcal{M},\mathsf{f}(\mathsf{a},0)\models\langle 1\cdot 1\rangle\geq\langle 2\rangle$ は成立しないが，$\mathcal{M},\mathsf{f}(\mathsf{a},0)\models\neg(\langle 1\cdot 1\rangle<\langle 2\rangle)$ は成立する．よって，制約付き木オートマトンの遷移規則を設計する際には遷移規則に付加する制約には十分な注意を払う必要がある．また，遷移規則の制約中の原子論理式を否定 $\neg$ と相反する述語で置き換えた場合には動作が必ずしも一致しないので，そのような操作を加えるべきではない．

4. 制約付き木オートマトンの決定化と完全化

本章では，制約付き木オートマトンを受理言語を保存したま

ま決定化および完全化する方法を示す．これらの手法は等号不等号制約付き木オートマトンの場合と同様である [2].

定義 4.1 (決定化) $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}=(Q,Q_f,\Delta)$ から以下のように生成される制約付き木オートマトン $\mathcal{A}'=(Q',Q'_f,\Delta')$ を $\mathrm{Det}(\mathcal{A})$ で表す．

- $Q'=\{S \mid S \subseteqq Q\}$,
- $Q'_f=\{S\in Q' \mid S\cap Q_f \neq \emptyset\}$,
- $\Delta'=\{f(S_1,\cdots,S_n)\xrightarrow{d} S \mid S_1,\cdots,S_n,S\in Q',\ S=\{q\in Q \mid f(q_1,\cdots,q_n)\xrightarrow{c} q\in\Delta,\ q_1,\in S_1,\cdots,q_n\in S_n\},\ d=\left(\bigwedge_{q'\in S}\bigvee_{f(q_1,\cdots,q_n)\xrightarrow{c} q\in\Delta, q_1\in S_1,\cdots,q_n\in S_n} c\right)\vee\left(\bigwedge_{q\in Q\setminus S}\bigwedge_{f(q_1,\cdots,q_n)\xrightarrow{c} q\in\Delta, q_1\in S_1,\cdots,q_n\in S_n}\neg c\right)\}$.

次に，定義 4.1 の変換法を用いて制約付き木オートマトンを決定性を持つ制約付き木オートマトンに変換する例を示す．

例 4.2 例 3.4 の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}$ を考える．$\mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Det}(\mathcal{A})$ は以下のように定義される制約付き木オートマトン (Q',Q'_f,Δ') である．

- $Q'=\{\{q_0\},\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\},\{q_2,q_3\},\cdots\}$,
- $Q'_f=\{\{q_2\},\{q_2,q_3\},\cdots\}$,
- $\Delta'=\left\{\begin{array}{l}\mathsf{0}\to\{q_0\}\\ \mathsf{s}(\{q_0\})\to\{q_1\}\\ \mathsf{s}(\{q_1\})\to\{q_1\}\\ \mathsf{f}(\{q_1\},\{q_1\})\xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle\wedge\top}\{q_2,q_3\}\\ \mathsf{f}(\{q_1\},\{q_1\})\xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle\wedge\perp}\{q_2\}\\ \mathsf{f}(\{q_1\},\{q_1\})\xrightarrow{\neg(\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle)\wedge\top}\{q_3\}\end{array}\right\}$

$\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle\wedge\perp$ は充足不能であるので，その制約を持つ遷移規則は取り除いてもよい．

次に，Det の正当性を示す．

定理 4.3 $\mathcal{A}\,(=(Q,Q_f,\Delta))$ を $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトンとする．このとき，$\mathrm{Det}(\mathcal{A})$ は $L(\mathcal{A})=L(\mathrm{Det}(\mathcal{A}))$ を満たす決定性を持つ制約付き木オートマトンである．さらに，$\mathcal{A}$ が完全性を持つならば，$\mathrm{Compl}(\mathcal{A})$ も完全性を持つ．

［略証］ 等号不等号制約付き木オートマトンの場合と同様の方法で証明できる [2]. □

次に，制約付き木オートマトンから完全性を持つ等価な制約付き木オートマトンへの変換法を示す．

定義 4.4 (完全化) $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}=(Q,Q_f,\Delta)$ から以下のように生成される制約付き木オートマトン $\mathcal{A}'=(Q',Q'_f,\Delta')$ を $\mathrm{Compl}(\mathcal{A})$ で表す．

- $Q'=Q\cup\{q_\perp\}$,
- $Q'_f=Q_f$,
- $\Delta'=\Delta\cup\ \{f(q_1,\cdots,q_n)\xrightarrow{c} q_\perp \mid q_1,\cdots,q_n\in Q,\ c=\neg(\bigvee_{f(q_1,\cdots,q_n)\xrightarrow{c'} q\in\Delta} c')\}\ \cup\{f(q_1,\cdots,q_\perp,\cdots,q_n)\to q_\perp \mid q_1,\cdots,q_n\in Q'\}$.

ただし，$q_\perp\notin Q$ とする．

次に，定義 4.4 の変換法を用いて制約付き木オートマトンを完全性を持つ制約付き木オートマトンに変換する例を示す．

例 4.5 例 3.4 の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}$ を考える．$\mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Compl}(\mathcal{A})$ は以下のように定義される制約付き木オートマトン (Q',Q'_f,Δ') である．

- $Q'=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_\perp\}$,
- $Q'_f=\{q_2\}$,
- $\Delta'=\left\{\begin{array}{ll}\mathsf{0}\to q_0 & \mathsf{s}(q_0)\to q_1\\ \mathsf{s}(q_1)\to q_1 & \mathsf{s}(q_2)\to q_\perp\\ \mathsf{s}(q_3)\to q_\perp & \mathsf{s}(q_\perp)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_1,q_1)\xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle=\langle 2\rangle} q_2 & \mathsf{f}(q_1,q_1)\to q_3\\ \mathsf{f}(q_0,q_0)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_0,q_1)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_0,q_2)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_0,q_3)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_0,q_\perp)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_1,q_0)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_1,q_2)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_1,q_3)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_1,q_\perp)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_2,q_0)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_2,q_1)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_2,q_2)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_2,q_3)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_2,q_\perp)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_3,q_0)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_3,q_1)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_3,q_2)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_3,q_3)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_3,q_\perp)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_\perp,q_0)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_\perp,q_1)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_\perp,q_2)\to q_\perp\\ \mathsf{f}(q_\perp,q_3)\to q_\perp & \mathsf{f}(q_\perp,q_\perp)\to q_\perp\\ \mathsf{g}(q_0)\to q_\perp & \mathsf{g}(q_1)\to q_\perp\\ \mathsf{g}(q_2)\to q_\perp & \mathsf{g}(q_3)\to q_\perp\\ \mathsf{g}(q_\perp)\to q_\perp & \end{array}\right\}$

次に，Compl の正当性を示す．

定理 4.6 $\mathcal{A}\,(=(Q,Q_f,\Delta))$ を $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトンとする．このとき，$\mathrm{Compl}(\mathcal{A})$ は $L(\mathcal{A})=L(\mathrm{Compl}(\mathcal{A}))$ を満たす完全性を持つ制約付き木オートマトンである．さらに，$\mathcal{A}$ が決定性を持つならば，$\mathrm{Compl}(\mathcal{A})$ も決定性を持つ．

［略証］ 等号不等号制約付き木オートマトンの場合と同様の方法で証明できる [2]. □

定理 4.3, 4.6 より以下の系が導かれる．

系 4.7 $\mathcal{A}$ を $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトンとする．このとき，$L(\mathcal{A})=L(\mathcal{A}')$ を満たす $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{P},\mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}'$ が存在し，$\mathcal{A}'$ は決定性と完全性を持つ．

5. 制約付き木オートマトンの閉包性

本章では，制約付き木オートマトンのクラスが和・積・補集合演算に閉じていることを示す．

定理 5.1 制約付き木オートマトンのクラスは和・積集合演算に閉じる．

［略証］ 等号不等号制約付き木オートマトンの場合と同様の方法で証明できる [2]. □

定理 5.2 制約付き木オートマトンのクラスは補集合演算に閉じている.

［略証］ 等号不等号制約付き木オートマトンの場合と同様の方法で証明できる [2]. 系 4.7 より, 受理集合が等価で決定性と完全性を持つ制約付き木オートマトン (Q, Q_f, Δ) が存在する. その制約付き木オートマトンから制約付き木オートマトン $(Q, Q \setminus Q_f, \Delta)$ を定義すると, この制約付き木オートマトンは元の受理集合の補集合を受理する. □

木オートマトンの空問題は決定可能であるが, 等号不等号制約付き木オートマトンの空問題は決定不能である. よって, 制約付き木オートマトンの空問題も一般には決定不能である. 受理集合が空であるための自明な十分条件は, 受理状態が存在しないことであるが, この十分条件は 1 つの制約付き木オートマトンの空問題に対しては全く実用的ではない. しかし, 和集合や積集合の空問題には有効な場合がある. その理由は, 2 つのオートマトンから和集合や積集合を受理するオートマトンを構成する際の状態の組み合わせでその状態に到達する可能性がない組み合わせを除去することで, 受理状態の集合が空になる場合もあるからである. 和集合や積集合を構成する際の状態の組み合わせ時には, あらゆる状態の組み合わせが新しい状態となる. 制約のない木オートマトンでは状態に到達する項が存在するかどうかを判定できるため, 不要な状態は除去することができる. しかし, 制約付き木オートマトンではその解析ができないため, 不要な状態を削減することはできない. したがって, 到達する項が存在しないことを解析するための情報を状態に与えることは上述の空問題の判定に有効であると考えられる.

以降では, 与えられた自然数列の接尾辞に閉じた有限集合 P に対して, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}$ $(= (Q, Q_f, \Delta))$ を, 以下の性質を満たすような制約付き木オートマトン $\mathcal{A}'$ に変換する手法を提案する.

> 任意の基底項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ と任意の状態 $q \in Q$ と任意の自然数列の集合 $P' \subseteq P$ について, $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{A}'} \langle q, P' \rangle$ のとき, かつそのときに限り, 以下のすべてが成り立つ.
> - $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{A}} q$,
> - 任意の $p \in P'$ について, $p \in \mathcal{P}os(t)$ かつ $t|_p \in \mathcal{T}(\mathcal{G})$,
> - 任意の $p \in P \setminus P'$ について, $p \in \mathcal{P}os(t)$ ならば $t|_p \notin \mathcal{T}(\mathcal{G})$.

P から上記を満たすように変換された 2 つの制約付き木オートマトンの和集合や積集合を受理するオートマトンの生成における状態 $\langle q_1, P'_1 \rangle$ と $\langle q_2, P'_2 \rangle$ の組み合わせでは, P'_1 と P'_2 が異なる場合にはそれらに到達する共通の項が存在しないことがわかる. よって, 組み合わせの際にそのような状態を除去することができる.

制約付き木オートマトン (Q, Q_f, Δ) と自然数列の集合 $P \subseteq \mathcal{N}^*$ に対して, 以下のような集合と演算を定義する.

- $\mathrm{CPos}(c)$ を制約 $c \in L(\mathcal{G}, \langle \mathcal{N}^+ \rangle, \mathcal{P})$ に出現するすべての自然数列の集合とする.
- $\mathrm{CPos}(\Delta)$ を $\bigcup_{l \xrightarrow{c} r \in \Delta} \mathrm{CPos}(c)$ とする.
- $\mathrm{Post}(P)$ を P の要素のすべての真接尾辞の集合とする.
- 自然数 i について, $i \cdot P$ を $\{i \cdot p \mid p \in P\}$ とする.

定義 5.3 $\mathcal{A}$ を $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン (Q, Q_f, Δ), P を自然数列の有限集合とし, $\mathrm{Post}(\mathrm{CPos}(\Delta)) \subseteq P$ を満たし, さらに, P は接尾辞に閉じているとする. $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン $\mathcal{A} = (Q, Q_f, \Delta)$ と P から以下のように生成される制約付き木オートマトン $\mathcal{A}' = (Q', Q'_f, \Delta')$ を $\mathrm{Label}(\mathcal{A}, P)$ で表す.

- $Q' = \{\langle q, P' \rangle \mid q \in Q,\ P' \subseteq P\}$,
- $Q'_f = \{\langle q, P' \rangle \mid q \in Q_f,\ P' \subseteq P\}$,
- $\Delta' = \{f(\langle q_1, P'_1 \rangle, \cdots, \langle q_n, P'_n \rangle) \xrightarrow{d} \langle q, P' \rangle \mid f(q_1, \cdots, q_n) \xrightarrow{c} q \in \Delta,\ P' = (P \cap \bigcup_{i=1}^{n} i \cdot P'_i) \cup \{\varepsilon \mid f \in \mathcal{G},\ \varepsilon \in P'_1 \cap \cdots \cap P'_n\},\ d = \mathrm{update}(c, \bigcup_{i=1}^{n} i \cdot P_i)\}$.

ただし, update(c, P′) は以下のように再帰的に定義される論理式とする.

- $\mathrm{update}(\top, P') = \top$,
- $\mathrm{update}(\bot, P') = \bot$,
- $\mathrm{CPos}(c) \subseteq P'$ ならば, $\mathrm{update}(p(t_1, \cdots, t_n), P') = p(t_1, \cdots, t_n)$,
- $\mathrm{CPos}(c) \not\subseteq P'$ ならば, $\mathrm{update}(p(t_1, \cdots, t_n), P') = \bot$,
- $\mathrm{update}(c_1 \vee c_2, P') = \mathrm{update}(c_1, P') \vee \mathrm{update}(c_2, P')$,
- $\mathrm{update}(c_1 \wedge c_2, P') = \mathrm{update}(c_1, P') \wedge \mathrm{update}(c_2, P')$,
- $\mathrm{update}(\neg c, P') = \neg \mathrm{update}(c, P')$.

$\langle q_i, P'_i \rangle$ の P' は制約が参照し得る解釈可能な項が存在する位置を表している. よって, 制約が参照する位置が $\bigcup_{i=1}^{n} i \cdot P'_i$ に存在しなければ, そのような参照位置を含む原子論理式を偽と解釈してもよい. update はそのような原子論理式を $\bot$ に置き換えている. このように遷移規則に付加する論理式をできる限り評価しておくことで, 充足不能な制約を持つ遷移規則を除去できる. さらに, 遷移規則に現れなくなった状態を状態集合から除去することも可能になる.

例 5.4 例 3.4 の制約付き木オートマトン $\mathcal{A}$ と $P = \{\varepsilon, 1\}$ を考える. $\mathcal{A}$ に対して, $\mathrm{Label}(\mathcal{A}, P)$ は以下のように定義される制約付き木オートマトン (Q', Q'_f, Δ') である.

- $Q' = \left\{ \begin{array}{l} \langle q_0, \emptyset \rangle, \langle q_0, \{\varepsilon\} \rangle, \langle q_0, \{1\} \rangle, \langle q_0, \{\varepsilon, 1\} \rangle, \\ \langle q_1, \emptyset \rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\} \rangle, \langle q_1, \{1\} \rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\} \rangle, \\ \langle q_2, \emptyset \rangle, \langle q_2, \{\varepsilon\} \rangle, \langle q_2, \{1\} \rangle, \langle q_2, \{\varepsilon, 1\} \rangle, \\ \langle q_3, \emptyset \rangle, \langle q_3, \{\varepsilon\} \rangle, \langle q_3, \{1\} \rangle, \langle q_3, \{\varepsilon, 1\} \rangle \end{array} \right\}$,
- $Q'_f = \{\langle q_2, \emptyset \rangle, \langle q_2, \{\varepsilon\} \rangle, \langle q_2, \{1\} \rangle, \langle q_2, \{\varepsilon, 1\} \rangle\}$,
- $\Delta' =$

$$\left\{\begin{array}{ll}
0 \rightarrow \langle q_0, \{\varepsilon\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_0, \emptyset\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_0, \{\varepsilon\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_0, \{1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_0, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_1, \emptyset\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_1, \{1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \emptyset\rangle, \langle q_1, \emptyset\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \emptyset\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \emptyset\rangle, \langle q_1, \{1\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \emptyset\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle, \langle q_1, \emptyset\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle, \langle q_1, \{1\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{1\}\rangle, \langle q_1, \emptyset\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{1\}\rangle, \langle q_1, \{1\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle, \langle q_1, \emptyset\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle, \langle q_1, \{1\}\rangle) \xrightarrow{\perp} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \{1\}\rangle &
\end{array}\right\}$$

$\perp$ を持つ遷移規則を除去してもよいので，Δ' は下記のように変更してもよい．

$$\Delta' = \left\{\begin{array}{ll}
0 \rightarrow \langle q_0, \{\varepsilon\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_0, \emptyset\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_0, \{\varepsilon\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_0, \{1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_0, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_1, \emptyset\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \mathsf{s}(\langle q_1, \{1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \emptyset\rangle \\
\mathsf{s}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \rightarrow \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \emptyset\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \{1\}\rangle & \\
\mathsf{f}(\langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle, \langle q_1, \{\varepsilon, 1\}\rangle) \xrightarrow{\langle 1\cdot 1\rangle = \langle 2\rangle} \langle q_2, \{1\}\rangle &
\end{array}\right\}$$

次に，$\mathrm{Label}(\mathcal{A}, P)$ が前述の性質を満たすことを示す．

補題 5.5 $c \in L(\mathcal{G}, \langle \mathcal{N}^+\rangle, \mathcal{P})$，$t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$，$\mathrm{Post}(\mathrm{CPos}(c)) \subseteq P \subseteq \mathcal{N}^*$，$P' \subseteq P$ とし，さらに，以下が成り立つとする．

- 任意の $p \in P'$ について，$p \in \mathcal{P}os(t)$ かつ $t|_p \in \mathcal{T}(\mathcal{G})$，
- 任意の $p \in P \setminus P'$ について，$p \in \mathcal{P}os(t)$ ならば $t|_p \notin \mathcal{T}(\mathcal{G})$．

このとき，$\mathcal{M}, t \models c$ のとき，かつそのときに限り，$\mathcal{M}, t \models \mathrm{update}(c, P')$ である．

［略証］ c の構造に関する帰納法で証明できる． □

定理 5.6 $\mathcal{A}\ (= (Q, Q_f, \Delta))$ を $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{M})$ 上の制約付き木オートマトン，P を自然数列の有限集合とし，$\mathrm{Post}(\mathrm{CPos}(\Delta)) \subseteq P$ を満たす，さらに P は接尾辞に閉じているとする．このとき，$\mathrm{Label}(\mathcal{A}, P)$ は以下のすべてを満たす制約付き木オートマトンである．

1) 任意の基底項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ と任意の状態 $q \in Q$ と任意の自然数列の集合 $P' \subseteq P$ について，$t \xrightarrow{*}_{\mathcal{A}'} \langle q, P'\rangle$ のとき，かつそのときに限り，以下のすべてが成り立つ．
   - $t \xrightarrow{*}_{\mathcal{A}} q$，
   - 任意の $p \in P'$ について，$p \in \mathcal{P}os(t)$ かつ $t|_p \in \mathcal{T}(\mathcal{G})$，
   - 任意の $p \in P \setminus P'$ について，$p \in \mathcal{P}os(t)$ ならば $t|_p \notin \mathcal{T}(\mathcal{G})$．

2) $L(\mathcal{A}) = L(\mathrm{Label}(\mathcal{A}, P))$．

［略証］ 1) の順方向，逆方向はそれぞれ $\xrightarrow{n}_{\mathcal{A}'}$，$\xrightarrow{n}_{\mathcal{A}}$ の n に関する帰納法により証明できる．2) は 1) より成り立つ． □

共通の P から生成されたオートマトン $\mathrm{Label}(\mathcal{A}_1, P)$ と $\mathrm{Label}(\mathcal{A}_2, P)$ の和集合や積集合を生成するとき状態 $\langle q_1, P_1'\rangle$ と $\langle q_2, P_2'\rangle$ の組み合わせでは，P_1' と P_2' が異なる場合には組み合わせなくてよい．どちらか一方にしか現れない位置にある部分項については片方では解釈できるのだが，もう片方では存在しないか解釈できない．これを満たす項は存在しないために，これらの状態の両方に到達できる項は存在しない．よって，$\langle q_1, P_1'\rangle$ と $\langle q_2, P_2'\rangle$ の組み合わせを考慮する必要はない．

6. おわりに

本稿では，等号不等号制約付き木オートマトンを一般化した，制約付き木オートマトンを提案し，任意の制約付き木オートマトンを決定化・完全化できること，さらに，制約付き木オートマトンのクラスが和・積・補集合演算に閉じていることを示した．また，状態に解釈可能な項が存在する位置の集合を付加することにより，和集合や積集合を受理するオートマトンを構成するする際に，到達する項が存在しない状態の一部を除去する手法を示した．この手法を用いると状態数や遷移規則数は増大するが，積集合が空であること示すことに役立つ場合がある．今後の課題は，本手法を実装し，制約付き項書換え系の書換え帰納法に基づいた定理自動証明ツールに，R 完全性や十分完全性を証明する機能を組み込むことである．

文　献

[1] Baader, F. and Niplow, T., “Term Rewriting and All that,” Cambridge University Press, 1998.

[2] Comon, H., Dauchet, M., Gilleron, R., Jacqumard, F., Lugiez, D., Loding, C., Tison, S., and Tommasi, M., “Tree Automata Techniques and Applications,”, 2008. Available on `http://tata.gforge.inria.fr/`.

[3] Mongy, J., “Transformation de noyaux reconnaissables d’arbres, Forêts RATEG,” PhD thesis, Laboratoire d’Informatique Fondamentale de Lille, Universit’e des Sciences et Technologies de Lille, Villeneuve d’Ascq, France, 1981.

[4] 坂田翼，西田直樹，坂部俊樹，酒井正彦，草刈圭一朗，“制約付き項書換え系における書換え帰納法，” 情報処理学会論文誌プログラミング，Vol. 2，No. 2，pp. 80–96，2009.

[5] 古市祐樹，西田直樹，酒井正彦，草刈圭一朗，坂部俊樹，“制約付き項書換え系の潜在帰納法を利用した手続きプログラム検証の試み，” 情報処理学会論文誌プログラミング，Vol. 1，No. 2，pp. 100–121，2008.