

## モートにおける磁束排除効果の形状依存性の数値解析

溝口 翔太<sup>†</sup> 伊藤 大<sup>†</sup> 井上 真澄<sup>†</sup> 藤巻 朗<sup>†</sup><sup>†</sup>名古屋大学大学院量子工学専攻 〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町E-mail: <sup>†</sup>syota\_mizo@super.nuqe.nagoya-u.ac.jp

**あらまし** 本研究では時間依存 Ginzburg-Landau (TDGL) 方程式を数値解析することにより、モートを形成した超伝導薄膜におけるボルテックスの振る舞いを明らかにすることを目指す。ここでは外部磁場が0のときの超伝導転移後の超伝導体グランドプレーンにおいて、揺らぎにより生成されたボルテックスの軌道、速度、加速度のモート形状依存性について調査した。ボルテックスの生成された位置によりモートに向かい排斥される加速度の傾き、排斥軌道に違いがみられた。モート短辺の延長線二本の間の領域より外側で生成されたボルテックスはモートの角を避けるような軌道でモートへ排斥された。短辺延長線の間の領域で生成されたボルテックスは長辺に対して垂直な軌道でモートへ排斥された。ボルテックスの加速度の値は短辺の延長線間より外側にあるものほど加速度が小さくなり、短辺の延長線間にあるものではモートの長辺方向の位置に依存しないことが確認できた。

**キーワード** ボルテックス, TDGL 方程式, モート, 磁束排除効果, 超伝導薄膜

## Numerical analysis on the moat shape dependence of the exclusion effect of magnetic field

Shota Mizoguchi<sup>†</sup> Hiroshi Ito<sup>†</sup> Masumi INOUE<sup>†</sup> and Akira FUJIMAKI<sup>†</sup><sup>†</sup> Department of Quantum Engineering, Nagoya University Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603 JapanE-mail: <sup>†</sup>syota\_mizo@super.nuqe.nagoya-u.ac.jp

**Abstract** We examine the behavior of vortices in superconducting thin films next to moats by numerical analysis using the time-dependent Ginzburg-Landau (TDGL) equation. In particular, we investigate the trajectory, velocity and acceleration of vortices in superconducting thin films after the transition to superconductors. It is found that the exclusion trajectory and acceleration differ depending on the position of the vortex generation. Vortices which were generated out of the region between two extended lines from the short sides of the moat, were excluded in the trajectory approaching the extended line into the moat. In contrast, vortices which were generated inside the region between two extended lines, were excluded with drawing trajectory vertical to the moat. The acceleration was smaller for the vortex generated out of the region of between the extended lines, as the position became farther from the extended line, whereas it was independent to the position along the long side of the moat for the vortex generated between the extended line.

**Keyword** vortex, TDGL equation, moat, flux exclusion effect, superconducting thin films

## 1. はじめに

単一磁束量子 (SFQ) 回路は、高速動作性及び低消費電力性の特徴を持つデジタル回路であり、これまでに Nb/Al-AIO<sub>x</sub>/Nb ジョセフソン接合を 10,995 個用いたマイクロプロセッサ等が動作実証されている [1]。今後 SFQ 回路の技術応用に向けて、更なる大規模化が必要不可欠となる。SFQ 回路の設計にあたり、ジョセフソン接合の臨界電流値が回路動作を決定づけるため、

その値の制御が非常に重要である。それゆえ、臨界電流値を低下させる磁束トラップ [2] は SFQ 回路の誤動作を引き起こし、SFQ 回路の大規模化への妨げの一因となっている。

磁束トラップを低減する方法として臨界温度近傍での冷却時間を長くする、磁気シールドを用いて外部磁場を遮蔽する、グランドプレーン、モートを用いてモートに磁束を捕捉する方法がある。

まず磁気シールドを用いる手法について述べる。高い透磁率の金属を磁気シールドとして用い、その中でSFQ回路を動作させている。多くの場合、二重あるいは三重の磁気シールドが用いられ、それにより磁束密度を約40~50dB低減させることが可能となる。この環境下では、残留磁場は約0.1~1μTとなる。しかし、数mm角のSFQ回路のチップにおいては、磁気シールドを用いても約1000本の磁束量子が残るため、更に約-50dB程度の磁場環境が必要となる。更なる磁束トラップの抑制のための手法として、回路近傍で超伝導グランドプレーンに、モートと呼ばれる溝を造る方法が挙げられる[3][4]。磁束トラップはSFQ回路を動作温度まで冷却していく際に生じる。超伝導臨界温度 $T_c$ 直下において、磁場侵入長 $\lambda$ は0[K]の時に比べ非常に長くなり、ボルテックスの生成位置がモートからの距離が離れたところであっても、モートからの引力を受けて、最終的にモートに捕捉される。磁場侵入長が長くなるほど、磁束量子をモートに引き付ける効果が大きくなることが確認されている[5]。超伝導回路中の磁束トラップはこのモートの効果により抑制されている。

我々のグループでは、超伝導回路のグランドプレーンの磁場排除効果を実験面と理論面から検討している。これまでの成果として我々のグループでは磁束排除効果のグランドプレーン材料依存性について明らかにした[6]。

本研究では、時間に依存するギンツブルグ-ランダウ (Time-Dependent Ginzburg-Landau: TDGL) 方程式を数値計算することにより、モートを形成した超伝導体におけるボルテックスの振る舞いを明らかにすることを目指す。これにより、磁束トラップが発生する状況を明らかにし、磁束トラップを回避する方法を検討していく。具体的には、超伝導薄膜に長方形のモートを設けたシミュレーションにおいてボルテックスがモートに捕捉される振る舞いを調査する。本稿では、モート形状及び位置と磁束排除効果の関係を明らかにするため、超伝導転移後の超伝導薄膜中でのボルテックスの軌道、速度、加速度を調査した。

## 2. 時間依存 Ginzburg-Landau 方程式

超伝導体の動力学は、TDGL方程式により記述できる。この方程式は、GL理論における秩序変数の空間と時間依存性を記述した微分方程式である。TDGL方程式はHuとThompson[6]により(1)式のように規格化された。

$$D^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{2e\phi}{\hbar} \right) \psi + \xi^{-2} (|\psi|^2 - 1) \psi + \left( \frac{\nabla}{i} - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0,$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left( -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \text{Re} \left[ \psi^* \left( \frac{\nabla}{i} - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right] \frac{\hbar c^2}{8\pi e \lambda^2}, \quad (1)$$

ここで、秩序変数 $\psi$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は各々規格化されおり、 $\phi$ はスカラー・ポテンシャル、 $\mathbf{j}$ は電流密度を示す。また、 $D$ と $\sigma$ は常伝導状態での拡散係数と伝導度であり、その関係は(2)式で表される。

$$\sigma = \frac{c^2 \xi^2}{48\pi \lambda^2} \frac{1}{D}. \quad (2)$$

ここで $\xi$ はコヒーレンス長、 $\lambda$ は磁場侵入長を示す。上述のTDGL方程式では、熱による揺らぎは無視されている。(1)式にMaxwell方程式、

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3)$$

をつけ加える。ただし、 $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{B}$ は磁束密度を示す。

計算を容易化するため、以前の報告[7]と同様に秩序変数と、スカラー・ポテンシャル、ベクトル・ポテンシャルについてゲージ変換を行い、スカラー・ポテンシャルがゼロとなるゲージを採用する。

さらに無次元化を行うことにより、(4)式の無次元化されたTDGL方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{12} \left[ \left( \frac{a}{i} \nabla - \frac{\mathbf{A}}{a} \right)^2 \psi + (|\psi|^2 - 1) \psi \right], \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{a^2}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A} \\ &\quad - \kappa^2 a^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4)$$

無次元化は、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}}{l} &\rightarrow \mathbf{r} \quad \left( l \equiv \frac{\xi}{a} \right), \\ \frac{t}{t_{GL}} &\rightarrow t, \\ \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2H_c \kappa l}} &\rightarrow \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (5)$$

などにより行った。ただし、 $H_c$ は熱力学的臨界磁場、 $a$ は正の定数で、数値計算を行う際に値が収束するように後で決定する。

また、 $t_{GL}$ と $\kappa$ は各々(6)式のように定義される。

$$t_{GL} \equiv \frac{\pi\hbar}{8k_B(T_c - T)}, \quad (6)$$

$$\kappa \equiv \frac{\lambda}{\xi}$$

数値計算は二次元格子上で単純差分法を用いて行った。図1に示すようにベクトルポテンシャルを格子間で定義されるリンク変数と呼ばれる格子点の計算を格子間の計算の置き換える手法[8]を用いて(4)式の書き換えを行った。

$$U^x = \exp(i\delta x A_x)$$

$$\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial t} = \frac{1}{12} \left[ \left( 1 - |\psi_{i,j}|^2 \right) \psi_{i,j} + \left( \frac{U^{*x}_{i,j} \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + U^x_{i-1,j} \psi_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{U^{*y}_{i,j} \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + U^y_{i,j-1} \psi_{i,j-1}}{dy^2} \right) \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial U^x_{i,j}}{\partial t} = \text{Re} \left[ \psi_{i,j} \psi_{i+1,j}^* U^x_{i,j} \right] - \kappa^2 a^2 \left\{ \frac{U^x_{i,j} U^y_{i+1,j} U^{*x}_{i,j+1} U^{*y}_{i,j} U^x_{i,j} U^{*y}_{i+1,j-1} U^{*x}_{i,j-1} U^y_{i,j-1} - 1}{dy^2} \right\}$$

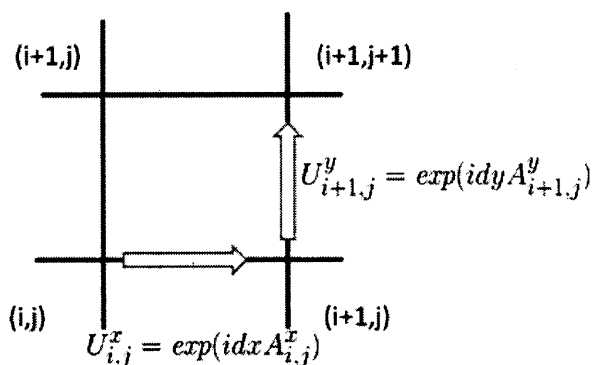


図1. リンク変数の定義

これからの議論では、二次元の第二種超伝導体 ( $k > 1/\sqrt{2}$ ) の薄膜について行う。外部磁場は  $x$ - $y$  平面におかれた超伝導体に対して垂直な  $z$  軸方向に加える。我々は、 $z$  軸方向の物理量の変化が不変な場合に関心があるため、物理量の空間変化は  $x$  と  $y$  座標のみに依存する。このような状況は、物理的には超伝導体の厚さがコヒーレンス長  $\xi$  よりも大きく、磁場侵入長  $\lambda$  よりも小さい場合に対応する。

### 3. シミュレーションモデル

シミュレーションモデルの安定性の都合上、格子間隔と時間間隔はシミュレーション毎に異なる。今回は二つのシミュレーションを行ったのでそれぞれ①、②としてそのパラメータについて下に纏める。その物理的な大きさは  $l = \xi/a$  と規格化されている。秩序変数は複素数であるため、複素変数を用いて計算した。また Nb を想定して  $\kappa = 2$  に固定した。また  $a = 1$  とした。

表1. 各シミュレーションにおけるパラメータ

	①	②
シミュレーションサイズ	60×168	80×80
物理サイズ	30ξ×84ξ	24ξ×24ξ
空間の刻み幅 Δx, Δy	0.5, 0.5	0.3, 0.3
モートサイズ	10×84	10×40
時間の刻み幅 Δt	0.01	0.001

ここで Nb を例に挙げて、今回のシミュレーションサイズの物理的な大きさを検討してみる。このシミュレーションにおいて温度  $T$  は臨界温度  $T_c$  近傍において一定であることより、 $T = 0.99T_c$  と仮定する。

また、Nb 超伝導材料が純粋な材料であると仮定すると、温度 0[K] 及び  $T$ [K] におけるコヒーレンス長  $\xi$ 、磁場侵入長  $\lambda$  は、表2のように求められる。

表2. 純粋な Nb における  $\xi$  と  $\lambda$  の関係 (但し、Nb の臨界温度  $T_c = 9.2$ [K] とする)

	T[K]	
	0	0.99T <sub>c</sub>
ξ[nm]	34	252
λ[nm]	80	566
κ	2.35	2.25

したがって、 $\kappa = 2$  の場合のシミュレーションが比較的 Nb に近い状況であると考えられる。これより  $\kappa = 2$  の時の今回のシミュレーションサイズについて下に纏める。実際の SFQ 回路のセルサイズは  $40[\mu\text{m}] \times 40[\mu\text{m}]$  程度であるが、今回行ったシミュレーションサイズの実際のサイズにするとシミュレーション①が  $7.6[\mu\text{m}] \times 7.6[\mu\text{m}]$ 、シミュレーション②が  $6.1[\mu\text{m}] \times 6.1[\mu\text{m}]$  となる。

境界条件は、 $x, y$  軸方向に周期境界条件を用いた。薄膜の内部に自由境界条件で囲んだ長方形の空洞を作り、それをモートと仮定した。自由境界条件は電流が境界を横切らないことを保証する以下の(9)式を適用した。

$$\left( \frac{a}{i} \nabla - \frac{A}{a} \right) \psi \Big|_n = 0, \quad (9)$$

ここで、添え字の  $n$  は境界に対して垂直を意味する。

ベクトル・ポテンシャルに関しては,

$$\nabla \times A = H_e. \tag{10}$$

のように, 境界上でベクトル・ポテンシャルの回転が外部磁場  $H_e$  に等しいとする. 磁場は  $z$  軸方向に加えるため,  $H_e = h_e(x,y)\hat{z}$  となる. ここで,  $\hat{z}$  は  $z$  軸方向の単位ベクトルである. ただし, 今回は外部磁場は 0 とした.

秩序変数の初期値は,  $y$  軸方向の境界上で実数部と虚数部ともに 0 かつ, それ以外の格子点において実数部と虚数部それぞれ母集団の平均が 0, 標準偏差が 0.05 の正規分布となるような異なる擬似乱数列を用いる. これにより, TDGL 方程式を時間発展させると磁束量子がランダムに生成される様子が観測される. ただし, 本稿ではボルテックスがモートから受ける力を考察したいため, 1 個生成される場合のみについてシミュレーションを行った. ボルテックスが複数個生成されるとボルテックス間の相互作用があることより, その振る舞いが複雑になるためである. ベクトル・ポテンシャルの初期値は,  $A = (A_x, A_y) = (0,0)$  とした.

上述の境界条件より, 本稿では図 1 に示すような, 超伝導薄膜を仮定してシミュレーションを行う. また, 今回のシミュレーションモデルは, 十分小さい磁場環境だが, 揺らぎによりボルテックスが生成される状況に相当する.

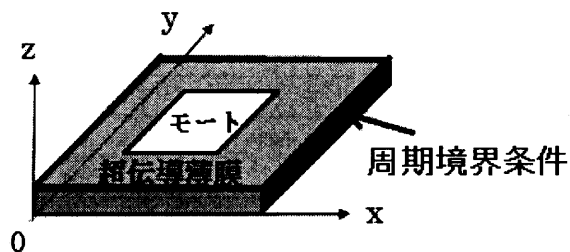


図 1. シミュレーション形状と境界条件

#### 4. 結果と考察

まず, モート長さと排除効果の因果性を調べる為に下記のモデルで TDGL 方程式を数値解析して, ボルテックスの軌道, 速度, 加速度を求めた.

表 3 のシミュレーションモデル①の場合, 秩序変数の初期値の擬似乱数列により, ボルテックスの生成場所が異なる 6 種類の結果を得た. 図 3 は超伝導薄膜中に 1 個のボルテックスが生成した時のそれぞれの軌道を示す. 図 3 は超伝導薄膜の上空から見た図である. 黒塗りの部分がモートとなっており, 具体的なモートの位置は  $(x:10-20 \ y:10-94)$  となっている. 今回はこの 6 か所の生成位置ごとにボルテックスの排除効果が異なるのかを, それぞれの加速度を求め調べた.

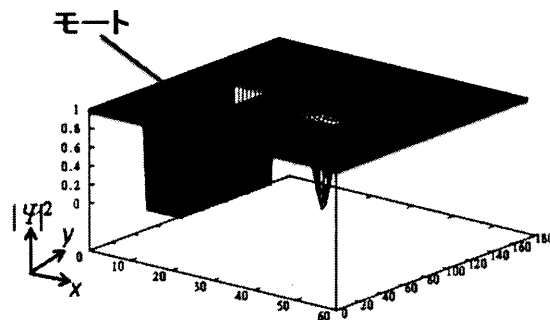


図 2. シミュレーションモデル①

図 4 は横軸をボルテックスとモートの最短距離, 縦軸をボルテックスの加速度でとったグラフである. それぞれ無次元化された値である. 図 3 と図 4 のマーカの種類はそれぞれ対応している. このグラフを見るとモートの短辺を延長した二本の線の間の領域に生成されたものは初期位置に依らず加速度の位置依存性に大きな違いが見られなかった. また延長線から一番近くの  $2.5\xi$  内側に初期生成された  $(33, 89)$ ,  $(35, 15)$  において, それらよりも内側にある点と同じ排除効果が得られた. しかし, この領域の外側にある初期生成位置  $(27, 102)$  のボルテックスの排除される加速度は一桁近く小さくなっていった.

このシミュレーションによりモートの短辺の延長線(端)より  $2.5\xi (1.25\lambda)$  内側であれば十分な排除効果が得られることが確認できた. この長さを表 2 を用いて実際のスケールで表記すると  $630\text{nm}$  となる. つまり実際の回路設計時においてジョセフソン接合をモートの端から  $630\text{nm}$  内側に配置することでより磁束トラップの低減が可能になると推測される.

次にシミュレーション①の結果を受け, モートの角近傍でのボルテックスの挙動を詳細に解析するためマップを小さくしてシミュレーション②を行った..

シミュレーション①と同様に図 5 は超伝導薄膜を二次元図で  $x,y$  軸は図 2 の  $x,y$  軸に対応している. 黒塗りの部分がモートとなっており, 具体的なモートの位置は  $(x:10-20 \ y:20-60)$  となっている.

図 5 のモートの短辺の延長線付近の初期生成位置  $(45, 60)$  のボルテックス排斥軌道を見ると角を避けて角から内側へ曲がるように排斥されていることから, モートの角近傍でポテンシャルが高くなっており, ポテンシャルの高い場所である角をさけながら辺に向かって排除されたのではないかと考えられる. 排除される時の加速度を調べてみると, ボルテックスの初期生成位置が 2 つの短辺延長線間で延長線から十分離れているものに対し, 生成位置が延長線付近のものは加速度が低下し, 延長線の外側にいくにつれて低下していることが確認できた.

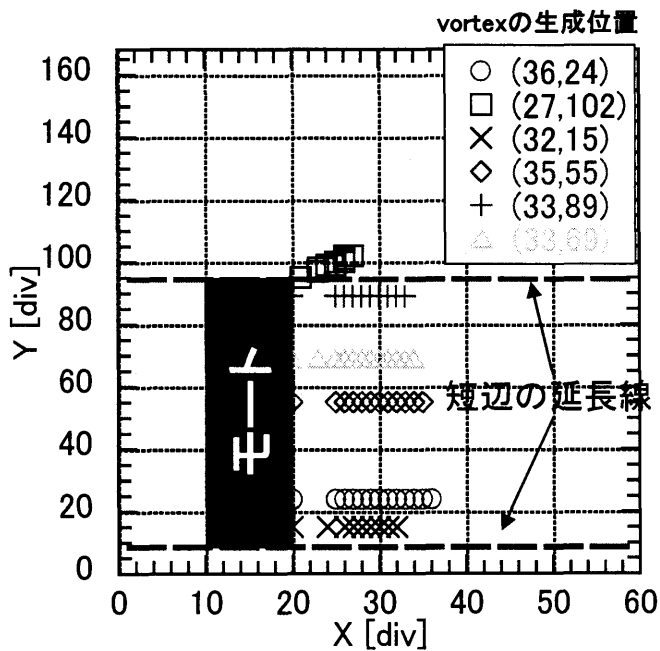


図 3. シミュレーションモデル①におけるボルテックスのモートへの排斥軌道.右肩にある座標値は各ボルテックスの初期生成位置を表す.黒塗り部がモート.

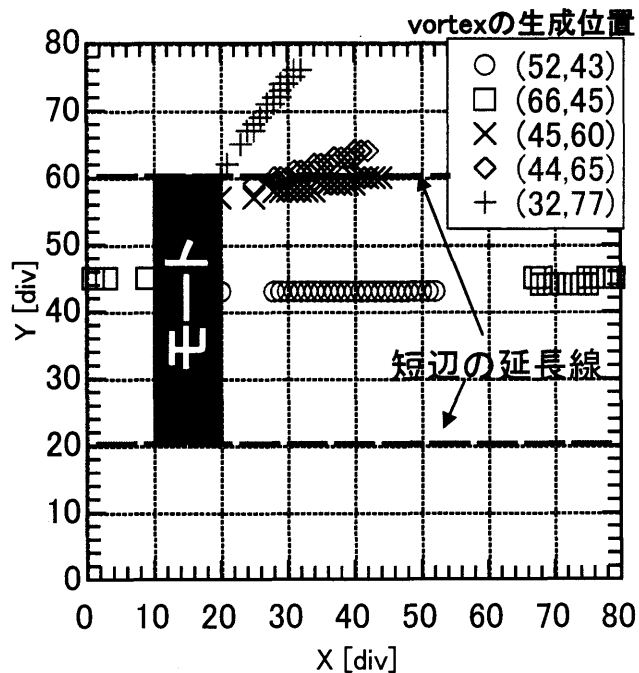


図 5. シミュレーションモデル②におけるボルテックスのモートへの排斥軌道.右肩にある座標値は各ボルテックスの初期生成位置を表す.黒塗り部がモート.

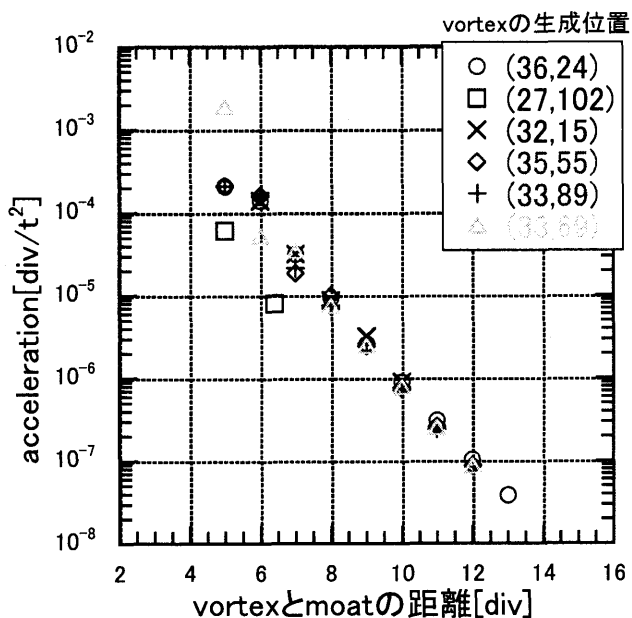


図 4. シミュレーションモデル①におけるボルテックスの加速度のモートの距離からの依存性.右肩にある座標値は各ボルテックスの初期生成位置を表す.

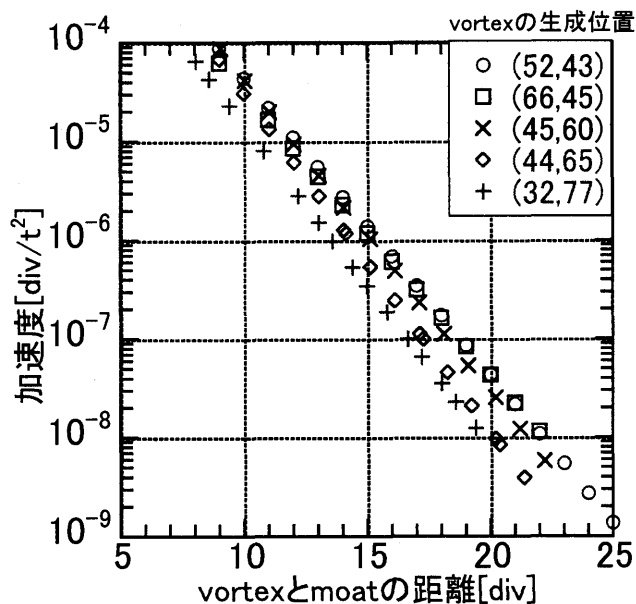


図 6. シミュレーションモデル②におけるボルテックスのモートの距離からの依存性.右肩にある座標値は各ボルテックスの初期生成位置を表す.

### 5. 実験による磁束トラップの評価法

シミュレーションで得られた結果を実験により検証する方法を紹介する.ジョセフソン接合を数百個単位で直列に繋ぎ,接合1個あたり1つのモートを横に設ける.このモートと接合の配置を変えることで磁束排除効果の場所依存性について調査する.

我々は3つのセルパターンを考えている.

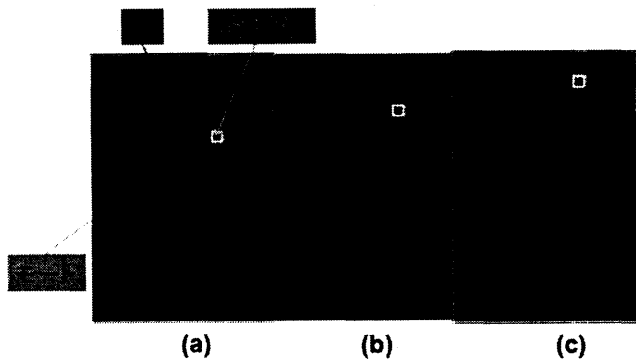


図 7. 磁束トラップ評価用のセルのイメージ図

図 7 の(a)がモートの短辺延長線から一番離れている.それに対して(c)は延長線に最も近いモデルとなっており,(b)はその中間となる.

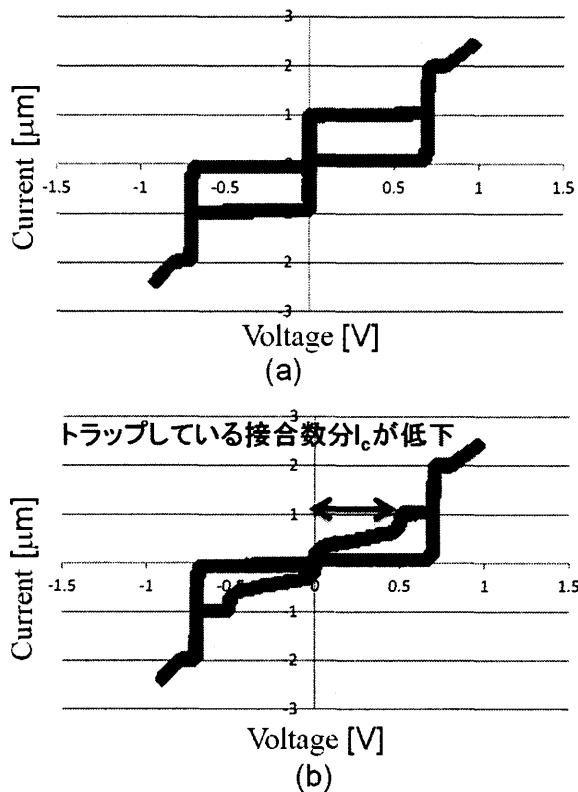


図 8. 横軸を電圧 V,縦軸を電流 I でプロットした 250 個直列ジョセフソン接合の特性図. (a)非トラップ時, (b)トラップ時の例.

図 8(a)はジョセフソン接合を 250 個直列に繋げた回路の非トラップ時の電流電圧(I-V)特性の例である.それに対して,図 8(b)はトラップが起きた時の I-V 特性の例である.全体のうちトラップしている接合数の割合を調べ,図 7 の(a), (b), (c)それぞれの磁束トラップが起こる接合のレート解析する.それにより実験的に磁束排除効果の場所依存性についての検討を行う.

### むすび

我々は TDGL 方程式を用いて,ボルテックスがモートまで排斥される過程を解析した.特に今回のシミュレーションモデルでは薄膜内部にモートを仮定した空洞を作り,モート形状並び位置と排除効果の関係性と,モートの角近傍でのポテンシャルの検討を行った.

モートの位置に関してはモート短辺の延長線から 2.5ξ内側にあれば十分な排除効果が得られることがわかった.またモートの角近傍でモートの辺に沿った部分より磁束が排除されにくいことも確認でき,ポテンシャルが高くなっていることが示唆された.

今後は今回のシミュレーション結果を実際の回路設計の場へフィードバックし,磁束トラップの低減を数値解析と実験の両面から目指す.

### 6. 謝辞

本研究の一部は科学研究費基盤研究(B)(課題番号 23360152)により行われた.

### 文 献

- [1] Y. Yamanashi, M. Tanaka, A. Akimoto, H. Park, Y. Kamiya, N. Irie, N. Yoshikawa, A. Fujimaki, H. Terai, and Y. Hashimoto, IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 17, no. 2, pp. 474-477, (2007).
- [2] Y. Plyakov, S. Narayana, and V. Semenov, IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 17, no.2 pp. 520-525, (2007).
- [3] S. Bermon and T. Gheewala, IEEE Trans. Mag., vol. 19, no.3, pp. 1160-1164, (1983).
- [4] K. Fujiwara, S. Nagasawa, Y. Hashimoto, and M. Hidaka, Proceedings of Superconducting SFQ VLSI Workshop, pp. 56-57, (2008).
- [5] C. R. Hu, and R. S. Thompson, Phys. Rev. B, vol6, pp. 110-120 (1972).
- [6] N. Mitamura, N. Naito, H. Akaike, and A. Fujimaki, Appl Physics Express4, vol4, art.no. pp013102, (2011).
- [7] 堤早希, 三田村直樹, 赤池宏之, 井上真澄, 藤巻朗, 信学技報 SCE2010-29 (2010).
- [8] R. Kato, Y. Enomoto, and S. Maekawa, The American Physical Society, vol. 47, no. 13, pp. 8016-8024 (1993).