

最小 2 乗法による準 3 相因子分析のアルゴリズム*

村 上 隆

準 3 相因子分析 (村上, 1979) は, いくつかの機会 (occasion) または方法 (method) によって得られたデータ (3 相データ) における因子の構造の変化, または相違を明らかにするための分析手法の一つである。本研究では, この手法の厳密な意味での最小 2 乗解法としての再定式化をはかる。その結果として, 準 3 相因子分析は, 通常の因子分析とより直結した, 解釈しやすいものとなることが示される。これとは別に, 準 3 相因子分析においてあらわれるパラメータ行列の 1 つである核行列をより解釈しやすくするためのモデルの若干の修正についても述べる。最後に適用例として, Campbell & Fiske (1959) による多方法—多特性行列の分析が示される。

1. 因子分析の意味と目的

通常, 因子分析は, N 人の被験者について n 個の変数に関する測定が行なわれたデータ $x_{ij}, i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$ から出発する。ここで x_{ij} は各変数ごとに平均値が 0, 分散が 1 となるように基準化されていることを前提とするのが普通である。すなわち,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij} = 0, \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = 1; j = 1, \dots, n \quad (2)$$

因子分析の第 1 の目的は, n 個の変数間の相関構造の要約的な記述を得ることにあると考えられる。データ x_{ij} を要素とする $N \times n$ 行列を X とするとき, (2) のもとで, n 次正方行列,

$$R = \frac{1}{N} X'X \quad (3)$$

は, n 個の変数のあらゆる組合せの間の相関係数を要素とする相関行列である (X' は X の転置)。変数間の相関関係に関するすべての情報はこの相関行列の中に含まれている。しかしながら, n が大となるにつれて, R に

* 本研究の一部は昭和 55 年度科学研究費奨励研究 (A) (課題番号 517026) の補助による。また本研究における分析例の計算は名古屋大学大型計算機センターの FACOM M-200 によった。

含まれる相関係数の数は増大し, R から直接変数間の相関構造を読みとることは困難になる。そこで因子分析法は, n 個の変数の基底にある少数の, より “本質的な” 変数である因子の存在を仮定し, その因子と n 個の変数との相関関係という形で変数間の相関構造を記述しようとする。

形式的には, N 人の被験者の q 個の因子上での得点を要素とする $N \times q$ 行列 A を考え, それが

$$\frac{1}{N} A'1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{N} A'A = I \quad (5)$$

を満足するものとする。 I は, q 次の単位行列である。 A は因子得点行列と呼ばれ, この行列の列の数 q は n よりも相当に小さいと仮定する。(4), (5) の条件は各因子の平均値が 0 で, 分散が 1 でありかつ互いに無相関であることを意味しており, (5) の条件を課さない因子分析もある。(5) が課される場合は直交解, 課されない場合は斜交解と呼ばれる。次の式で定義される $n \times p$ 行列 B ,

$$B = \frac{1}{N} X'A \quad (6)$$

を考える。 X と A の各列は, とともに平均値 0, 分散 1 に基準化されているから, B の要素は, 個々の変数と因子との相関係数である。この要素を因子負荷 (量) と呼ぶ。

因子負荷行列 B によれば, 変数間の相関構造はもとの

表 1 6 つの変数間の仮想的な相関行列

| | j = 1 | j = 2 | j = 3 | j = 4 | j = 5 | j = 6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| j = 1 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 2 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 3 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 4 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 |
| j = 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 |

相関行列 R によるよりはるかに読みとりやすくなる。相互に相関の高い変数は、共通の因子 (A の共通の列) と相関が高いであろうから、 B の同一の列において高い負荷量を示すことになる。相互に相関の低い変数は、 B の同一の列で高い負荷量を示すことはない。このような解釈を促進するために、 B には適当な回転 (例えば varimax 回転) が施されることがある。

次に極端に単純化された1つの例について具体的に見ることにしよう。表1は、6つの変数の間の仮想的な相関行列である。これを見ると、変数1と2及び変数3と4は相互に相関1であり、他の変数間には全く相関が見られない。これらの変数の基底にある因子は4つであり、因子負荷行列は表2のようになるであろう。

表2 表1の相関行列に対する因子負荷行列

| 因子 変数 | 1 = 1 | 1 = 2 | 1 = 3 | 1 = 4 |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| j = 1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 2 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 3 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 4 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| j = 5 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 |
| j = 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 |

ここで因子の3と4はそれぞれ1つの変数のみが負荷しており、通常このような因子は、独自因子として、1と2のような、2つ以上の変数が負荷しているような共通因子とは区別するのが普通である。しかしこの例ではあえてこの区別は行なわないことにする。この節では、因子分析を実際に行うためのアルゴリズムには触れることなく、因子分析の目的と意味の概略を述べた。

2. 3相データと因子変化

心理学研究においては、しばしば被験者と変数は共通のデータ行列が複数得られる場合がある。例えば、同一の被験者に一定の期間を置いた複数の機会 (occasion) に同一のテストを実施するといういわゆる縦断的データや、幾つかの特性を複数の方法 (method) によって測定する Campbell & Fiske (1959) の多方法-多特性行列 (multitrait - multimethod matrix) の場合等である。後者の範ちゅうに含まれるかも知れないが、母親のイメージについて、母親自身と、その子供に同一の項目を用いて調査する場合などもこれに当ると言えよう。(この場合は母親と子供のペアで1人の被験者とみなす。)

さて、この場合に複数の機会または方法による平均値の変化には関心がなく、項目間の相関構造の変化 (または相違) に関心があったとしよう。データは機会ごとに $N \times n$ 行列の形にまとめ、 $X_k (k = 1, \dots, p)$ とかくことにする。上の目的のためには X_k の各列 (変数) はすべて平均値0、分散1に基準化して考えればよい。全体としてのデータ行列は、 $N \times np$ 行列

$$X = [X_1 X_2 \dots X_p] \quad (7)$$

の形で扱うのが便利である。このようなデータを3相データと呼ぶ。これを用いた

$$R = \frac{1}{N} X'X = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1p} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p1} & R_{p2} & \dots & R_{pp} \end{bmatrix} \quad (8)$$

は np 次の相関行列であり、 n 次の部分行列に分割して考えることができる。主対角線上に並ぶ $R_{kk} (k = 1, \dots, p)$ は、同一の機会または方法における変数間の相関行列であり、 $R_{kk'} (k \neq k')$ は異なる機会または方法における変数間の相関行列である。 k が方法である場合、この行列は多特性-多方法行列と呼ばれる。縦断的データの場合には多変数-多機会行列 (multivariable - multioccasion matrix) とでも呼ぶことができよう。ここでも仮想的な例を用いて話を具体化しよう。

表3は、表1に示した6つの変数の測定を機会を改めてもう一度繰り返したと仮定した相関行列である。相関行列は対称なので、ここでは下三角の部分だけを示している。相関行列全体は4つの部分行列に分かれる。左上の部分は、1回目の測定における変数間相関行列で、表1の再録である。右下の部分は2回目の測定における変数間相関行列である。この部分は表1と全く同一の値をとっており、この部分だけを因子分析したとすれば、1回目の測定と同じ表2の因子負荷が得られる。

このように機会ごとに独立に因子分析するのは、極めて常識的なやり方ではあるが、これでは機会による変数間の相関構造の変化、あるいは因子変化 (factor change) についての深い知見は得られない。Baltes & Nesselrode (1973) は、因子変化に次の型を区別している。

a型 因子負荷不変— 因子得点安定

b型 因子負荷不変— 因子得点変動

c型 因子負荷変化— 因子得点安定

d型 因子負荷変化— 因子得点変動

独立した2度の因子分析では少くとも因子得点の変動性

表3 2つの機会における6つの変数間の仮想的な相関行列

| 機会 | 変数 | k = 1 | | | | | | k = 2 | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--|
| | | j = 1 | j = 2 | j = 3 | j = 4 | j = 5 | j = 6 | j = 1 | j = 2 | j = 3 | j = 4 | j = 5 | j = 6 | | |
| k = 1 | j = 1 | 1.0 | | | | | | | | | | | | | |
| | j = 2 | 1.0 | 1.0 | | | | | | | | | | | | |
| | j = 3 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | | | | | | | | | | |
| | j = 4 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | | | | | | | | | | |
| | j = 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | | | | | | | | |
| | j = 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | | | | | | | |
| k = 2 | j = 1 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | | | | | | |
| | j = 2 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | | | | | | |
| | j = 3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | | | | |
| | j = 4 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | | | | |
| | j = 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | | |
| | j = 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | |

に関する情報は得られない。また、今の例では2度の分析で全く同じ因子負荷行列を得たが、これから直ちに因子負荷は不変であると結論づけられる保障も実はない。これらの点について知るためには、表3の相関行列の左下の部分、すなわち異なる機会間の相関行列を含めて分析する必要がある。

少し形式的にするために、記号の定義をしておこう。まず、独立になされた因子分析による6×4の因子負荷行列Bを4つの列ベクトルに分割して、

$$B = [b_1, b_2, b_3, b_4] \quad (9)$$

とかく。これは前述のように2つの機会について見かけ上同一である(表2)。次に、各機会ごとの因子分析のN×4の因子得点行列をそれぞれA₁, A₂とし、これもそれぞれ4つの列ベクトルに分けてかくことにしよう。

$$A_1 = [a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}] \quad (10)$$

$$A_2 = [a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}] \quad (11)$$

この2つの行列の各列が互いに等しいものであるかどうか問題である。ここでは表3左下の異なる機会間の相関行列を見ながら、やや直観的にこの判定を試みることにしよう。

まず表3の実線で囲んだ部分は、異なる機会において測定された変数1, 2相互間の相関で、その値はすべて1である。この2つの変数の基底にある因子は、2つの

機会を通じて不変であったと考えられよう。変数1と2はBの第1列b₁に高い負荷を示していた。これに対応する因子得点のベクトルa₁₁とa₁₂は等しく、この因子はa型であると判定される。

次に表3の点線で囲んだ部分を見よう。これは異なる機会における変数3, 4相互間の相関でその値はすべて0である。変数3と4は各機会内では相互に相関1で結びついていたにもかかわらず、異なる機会間では全く相関がない。b₂の因子負荷をもつ因子の因子得点であるa₃₁とa₂₂は相互に完全に独立であると考えざるを得ない。従ってこの因子はb型と判定される。このような因子は、2つの方法、例えば自己評定と他者評定によって性格特性を測定しようとした場合等にしばしば見られるものである。

もう1つ表3で丸印を付した数値は、機会1における変数5と機会2における変数6の相関である。この2つの変数は、それぞれの機会内では、他の変数と相関をもたず、1変数で独自の因子を形成していたが、機会を通じては相関しており、これに対応する因子得点a₃₁とa₄₂は等しい。換言すれば、a₃₁の因子得点に対応する因子負荷は、b₃からb₄へ変化したことになるから、この因子はc型ということになる。このような因子が経験的に見出された例は少ないが、小嶋(1968)は、親の特性に関する親の自己評定と子供による評定の間で、例えば「親が自主性の尊重ということは子供に言わせると放任と見なされやすい」といった可能性があることを示唆し

ている。機会1における因子4(変数6)と、機会2における因子3(変数5)にはそのような対応関係はない。

以上、直観的ではあったが多特性-多方法(あるいは多変数-多機会)行列によって因子変化を含めた3相データの因子の構造が記述できることを示した。なお、この過程が記述の経済という観点から見ても、意味があることも指摘しておこう。

独立な2つの因子分析では、原則として $4 \times 2 = 8$ 個の因子負荷ベクトルと、同数の因子得点ベクトルが必要である。この例では、2つの因子負荷行列がたまたま一致しているため4個の因子負荷ベクトルで足り、因子得点ベクトルにも相互に等しいものがあるため、6個ですむ。このように、必ずしも等しくない数の因子負荷と因子得点を組み合わせた3相データの記述をモデルとして定式化したのが準3相因子分析である。

3. 準3相因子分析のモデル

1節において、因子分析の目的は、相関行列 R に含まれている変数間の相関構造を因子負荷行列 B に要約することであると述べた。しかし、ある意味ではこれは結果であって、因子分析の出発点である基本モデルは、 $N \times n$ のデータ行列 X を、 $N \times q$ の因子得点行列と、 $n \times q$ の因子負荷行列の転置の積

$$\hat{X} = AB' \quad (12)$$

によって近似することである。これは、 X の各列(変数)を、より“本質的な”少数の因子(得点)の1次結合で表現することを意味しており、因子負荷は各因子への重みをあらわしている。

準3相因子分析は、3相データのデータ行列 $X_k (k = 1, \dots, p)$ を、

$$\hat{X}_k = A_0 G_k B_0'; k = 1, \dots, p \quad (13)$$

で近似しようとするものである(村上, 1979)。ここで A_0 は $N \times Q$ の因子得点行列、 B_0 は $n \times q$ の因子負荷行列であって、これらは機会 k に関係なく共通である。(共通であるとしたことは、直ちに X_k の因子得点と因子負荷が k にかかわらず不変であることを意味するわけではない。このことは次第に明らかになる筈である。)また、 A_0 と B_0 の列の数 Q と q は必ずしも等しい必要はなく、また列相互の関係もアプリアリには定まっていない。その関係をつけるのが $Q \times q$ 行列 G_k である。 G_k は核行列(core matrix)と呼ばれる。

核行列の機能について説明するために、もう一度前節の例にもどらう。 X_1, X_2 は、それぞれ機会1, 2のデータ行列をあらわすとし、これらをそれぞれ机

会で

$$\hat{X}_1 = A_1 B_1'$$

$$\hat{X}_2 = A_2 B_2'$$

と近似しようとするとき、 A_1, A_2, B_1, B_2 をどのように決めたらよいだろうか。因子負荷については、機会1, 2で共通であったから、(9)の B を使って、

$$B_1 = B_2 = B$$

とすればよい。因子得点については、(10), (11)の A_1, A_2 に含まれるベクトルのうち重複するものを除いて改めて番号をつけなおし、

$$a_1 = a_{11} = a_{12}, a_2 = a_{21}, a_3 = a_{22}$$

$$a_4 = a_{31} = a_{43}, a_5 = a_{32}, a_6 = a_{41}$$

として、

$$A_1 = [a_1 \ a_2 \ a_4 \ a_6]$$

$$A_2 = [a_1 \ a_3 \ a_5 \ a_4]$$

とすればよい。

(13)の準3相因子モデルでこれを表現することは容易であり、かつ示唆的である。まず、

$$B_0 = B = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]$$

$$A_0 = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]$$

とする。次に核行列によって、機会1では b_1, \dots, b_4 にそれぞれ、 a_1, a_2, a_4, a_6 が対応し、機会2では a_1, a_3, a_5, a_6 が対応するという関係を示せばよい。このためには各機会の核行列の対応する因子得点の行で、因子負荷の列にあたる要素を1とし、それ以外の要素を0とすればよい。具体的には表4のようになる。これにより、機会1において A_0 のどの因子得点ベクトルと B_0 のどの因子負荷が対応しているかが、容易に見てとれる。

更に、核行列のパターンから Baltes & Nesselrode (1973)による因子変化の型を知ることでもできる。すなわち、異なる機会に対する核行列において、

a型) 同一の行、列の要素の値が大きい。

b型) 異なる行、同一の列の要素の値が大きい。

c型) 同一の行、異なる列の要素の値が大きい。

d型) 異なる行、列の要素の値が大きい。

となる。(より詳細な議論は、村上(1979)のP.9及びP.10の表1参照。)表1において、 $k = 1, k = 2$ の行列はともに1行1列の要素が1となっていることから、因子

表4 表3の仮想的な相関行列に対する核行列

| | | a | b | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ | $l=4$ |
|-------|-------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| $k=1$ | $m=1$ | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=2$ | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=3$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=4$ | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | | |
| | $m=5$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=6$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | |
| $k=2$ | $m=1$ | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=2$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=3$ | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | | |
| | $m=4$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | | |
| | $m=5$ | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | | |
| | $m=6$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | |

負荷 b_l , 因子得点 a_l の因子は a 型である。また $k=1$ においては、2行2列、 $k=2$ においては3行2列の要素(異なる行、同一の列)が1となっていることから因子負荷 b_l の因子は b 型である。

すなわち、因子得点と因子負荷の共通のプールである A_0 と B_0 から適切なものを選択してその機会または方法における因子モデルを構成する、というのが核行列の役割である。¹⁾

もちろん、ここでとりあげた例は、相関行列自体が、1または0の値しか含まないという意味で極めて特殊な場合であり、一般には因子負荷も核行列もこのようにクリアーな結果になるわけではない。ここでは因子負荷と因子得点の両方の変化を示すという核行列の機能を示すことが目的であった。核行列の要素の統計量としての意味づけ、実際のデータの分析例は、アルゴリズムについて論じた後に述べる。

なお、準3相因子分析は、モデルとしては Tucker (1966) の3相因子分析の簡略化である。村上(1979)ではアルゴリズムも Tucker のものをほぼ採用し、パラメータの意味づけをしたにとどまっていた。本研究では正確な最小2乗解としての定式化を行なう。

1) 表1の4行は、 $k=1$ で3列、 $k=2$ で4列が1であり、2節で述べたように c 型とみられる。しかし他方、3列と4列は、 $k=1$ と2で別の行の値が1となっており、 b 型とみることもできる。このように b 型と c 型の区別は微妙な場合がある。10節の分析例参照。

4. 因子分析の最小2乗解

この節では、準3相因子分析の最小2乗解を求めるための準備段階として、通常の因子分析モデル(1)から考えよう。ここでデータ X と、モデルによるその近似 \hat{X} の差がなるべく小さくなるように A, B を定めるのが合理的であろう。このために要素ごとに考えた差 $x_{ij} - \hat{x}_{ij}$ の2乗和

$$NS^2 = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2 \quad (14)$$

を最小にするように A, B を定めようというのが、最小2乗法の考え方である。

この条件を満足する B が、(3)の相関行列 R の大きい方から順に q 番目までの固有値に対応する固有ベクトルを、2乗和が固有値に等しくなるように基準化したもの、またはその直交回転であることはよく知られている。しかしながら、その導出過程は必ずしも明確ではなかったように思われる。共通性の推定を行なわず R の対角要素を1としたままで固有ベクトルを求める手法は、通常主成分分析と呼ばれる。主成分分析では、

$$B'B = I \quad (15)$$

の条件の下で、

$$A = XB \quad (16)$$

によって定義される成分得点の各列の分散を最大にするという形で定式化されるのが普通である。しかしながらこの B は、(6)の性質をもたず、変数間の相関構造の要約として解釈することが難しい。このため成分得点とデータとの相関係数の意味をもつように、固有値の平方根を掛けた(つまり2乗和を固有値に等しくなるように基準化した)形で扱いたくなる。これは主成分分析の用語では構造ベクトルと呼ばれる(芝, 1967)が、もはや共通性の推定の問題を除けば、因子分析における因子負荷と同一であり、実際この方法を因子分析と呼ぶことは多い。(例えば Nunnally, 1978) 本研究もその慣習に従うが、問題は成分分析の導出過程が個々の成分得点の分散の最大化という形でなされているため、 B の回転を行なうことが厳密に言えば出来ないことである(Morrison, 1967)。これとは別に Hottelling による主因子解の定式化はしばしば採用されている(例えば芝, 1979)。これは、

$$R = BB' \quad (17)$$

を制約条件として、(R の対角要素は共通性に置きかえたものとして扱われている。) B の各列の2乗和(因子

寄与)を最大にする, というものである。すなわちこの場合も個々の因子寄与の最大化であるが, それに加えてこの形式化にはもっと別の問題が含まれているように思われる。(17)の条件は, たとえ R の対角要素に共通性を置いたとしても厳密に満足される可能性がほとんどないからである。(むしろ R の対角要素を1のまま $q = n$ とすれば(17)は満足されるが, 変数の数と同様の因子を求める, というのは多くの場合ナンセンスであろう。) 因子分析と呼ぶか主成分分析と呼ぶかはともかく, R の要約としての B を求めるという目的のためには, ある q の値を定めたとき, (5)の下で(14)を全体として最小化するような A, B を導出するような定式化が必要である。

以下の定式化は, 決してオリジナルなものではないと思われるが, 著者の知る限りいかなる文献にも記述されていないものであるので, あえて述べておくことにしよう。なお, Hakstian (1973) 及び Kroonenberg & De Leeuw (1980) を一部参考にした。後の便宜のために, (14)を N で割った S^2 の最小化を行なうことにする。行列表記を用いれば, S^2 は

$$S^2 = \frac{1}{N} \text{tr}(X - \hat{X})(X - \hat{X}) \quad (18)$$

とかくことができる。(tr は行列のトレースを示す) これを A についての(5)の制約条件の下で最小化するためには, A をラグランジュの未定定数行列として, 次の停留方程式

$$\phi = S^2 - \text{tr}A\left(\frac{1}{N}A'A - I\right) \quad (19)$$

を, A, B, A で偏微分し, 全要素を0とおいた方程式系を解けばよい。(行列のトレースの微分については, 芝 (1979) 参照。) \hat{X} に(12)を代入し, まず B で偏微分してその全要素を0とおくと,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial B} = \frac{1}{N} (X - AB')'A = 0 \quad (20)$$

となる (ここで 0 は $n \times q$ のゼロ行列)。20は,

$$B = \frac{1}{N} XA$$

を意味するが, これは因子負荷がデータと因子得点の相関係数であるという(6)式そのものである。これを改めて(18)に代入して整理すると,

$$S^2 = \text{tr}R - \frac{1}{N^2} \text{tr}XAA'X \quad (21)$$

が導かれる。この第1項は相関行列の対角要素の和に等しいから, S^2 の最小化は(21)の第2項の最大化に他ならないことがわかる。この第2項は, (6)を用いて,

$$\frac{1}{N^2} \text{tr}XAA'X = \text{tr}\left(\frac{1}{N}XA\right)\left(\frac{1}{N}AX'\right) = \text{tr}BB'$$

であり, これは,

$$\text{tr}B'B = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^q b_{ij}^2 \quad (22)$$

すなわち, 因子負荷の2乗の総和に他ならない。このことから, (22)を最小2乗法で解くことは, 因子負荷の2乗和を最大にすることに等しいことが知られる。最小2乗法の本来の考え方は, 少数の因子の1次結合 \hat{X} によって最大限もとのデータ X に近いものをつくること, すなわち, データの“本質的な”部分を最もよく表現するような因子(得点) A と, それに対する最良の1次結合の重みである因子負荷 B を求めるところにあつた。そのような因子は, データ X と全体として最も相関が高くなるように決めることに等しい, と考えれば, 最小2乗法が(22)の最大化と等価であることは納得されよう。

$$\frac{1}{N^2} \text{tr}(XAA'X) = \frac{1}{N^2} \text{tr}(A'XX'A)$$

だから, 最小2乗解は, 次の停留方程式,

$$\psi = \frac{1}{N^2} \text{tr}A'XX'A - \text{tr}A\left(\frac{1}{N}A'A - I\right) \quad (23)$$

を A, A で偏微分して0と置いた方程式系を解くことと等しい。 ψ の A による偏微分により,

$$\frac{1}{2N} \frac{\partial \psi}{\partial A} = \frac{1}{N} XX'A - AL^* = 0 \quad (24)$$

が導かれる。ここで L^* は q 次正方行列で,

$$L^* = \frac{1}{2}(A + A') \quad (25)$$

である。 L^* は(25)により対称でかつ, (24), (15)から,

$$L^* = \frac{1}{N^2} A'XX'A \quad (26)$$

だから半正値でもあるので, L^* の固有値を対角要素にもつ対角行列 L と, 固有ベクトルを要素とする直交列 T を用いて,

$$L^* = TLT' \quad (27)$$

とすることができる。これを(24)に代入して,

$$\frac{1}{N} XX'(AT) = (AT)L \quad (28)$$

これにより, 因子得点行列 A は行列 XX'/N の固有ベクトル, 又はその直交回転であることがわかる。また(22), (23)によって, 最大化すべき基準は,

$$\frac{1}{N^2} \text{tr}A'X'XA = \text{tr}L^* = \text{tr}L$$

で, $\text{tr}L$ は固有値の和であることから, 条件を満足するのは XX'/N の大きい方から q 番目までの固有値であることもわかる。

A による偏微分からは, (5)が導かれるが, これは固有

ベクトルの基準化の仕方を示すものである。かくして因子得点行列 \mathbf{A} は回転と列を単位としての符号を除き一意的に定まることが示された。

ところで、行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}'/N$ は、 N 次正方行列となるが、通常被験者の数 N は、変数の数 n より相当大きなものとなるのが普通であり、固有値計算は不可能であるか、そうでないまでも著しく時間のかかる場合が多い。この問題を解決するためには、28の左から \mathbf{X} をかけ全体を N で割って(3)、(6)を代入して得られる、

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}\mathbf{T}) = (\mathbf{B}\mathbf{T})\mathbf{L} \quad (29)$$

によればよい。 $\mathbf{B}\mathbf{T}$ は \mathbf{R} の固有ベクトルであり、因子負荷 \mathbf{B} はその直交回転である、というよく知られた主因子法のアルゴリズムが導かれたわけである。(8)と(29)の \mathbf{L} は共通であり、このことは、行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}'$ の固有値は行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}$ の固有値に等しいことを意味している。) このとき、 \mathbf{A} は、28から、

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{X}(\mathbf{B}\mathbf{T})\mathbf{L}^{-1} \quad (30)$$

によって求められる。

なお、最小化の基準 S^2 は因子によっては説明されない残差の分散をあらわす。(2)は

$$S^2 = \text{tr}\mathbf{R} - \text{tr}\mathbf{L} \quad (31)$$

とあらわすことができるが、この第1項 $\text{tr}\mathbf{R} = n$ はデータの全分散である。従って大きい順に q 番目までの固有値の和 $\text{tr}\mathbf{L}$ は因子によって説明される分散の大きさということになる。

5. 準3相因子分析の最小2乗解

準3相因子分析では、 $\mathbf{X}_k (k=1, \dots, p)$ の全体に対して、(13)のモデルをあてはめる。従って、最小2乗法で最小化すべき基準は、

$$S^2 = \frac{1}{pN} \sum_k \text{tr}(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k)'(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k) \quad (32)$$

ということになる。(N だけでなく p でも割っておくのは、後に出てくる固有値のオーダーを通常の因子分析とそろえるためである。)

最初に、いかなる制約条件の下でこれを最小化するかが問題になる。(12)には、 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ 2つのパラメータ行列があり、(5)または(15)のどちらかを課すことによって解が求められた。(13)のモデルは、 $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{G}_k$ という3つの行列からなっており、このうち2つに何らかの制約条件を課す必要がある。6節で触れるように次の3つの制約条件

$$i) \quad \frac{1}{N} \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}'_0 \mathbf{B}_0 = \mathbf{I} \quad (33)$$

$$ii) \quad \frac{1}{N} \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 = \mathbf{I}, \quad \frac{1}{p} \sum_k \mathbf{G}'_k \mathbf{G}_k = \mathbf{I} \quad (34)$$

$$iii) \quad \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad \frac{1}{p} \sum_k \mathbf{G}_k \mathbf{G}'_k = \mathbf{I} \quad (35)$$

のどれをとっても、(32)の最小値は同一であり、得られる $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{G}_k$ の推定値も、単位と回転を除けば同一となる。7節で示すように実際の適用において、普通の因子分析と関連づけて解釈するには(34)が適当であるが、最小2乗解の導出過程は(33)が容易である。本来求めたいのは(34)の制約条件下の解であるから、(33)の下での \mathbf{B}, \mathbf{G}_k は $\mathbf{B}^* \mathbf{G}_k^*$ とかいて区別する。最終的な単位の調整は解が求まった後で行なうこととし、まず(33)の下での S^2 の最小化を行なうアルゴリズムを導くことにしよう。この過程は前節の通常の因子分析の場合とほぼ完全に平行である。

まず、制約条件のない \mathbf{G}_k^* で S^2 を偏微分して、

$$\frac{\partial S^2}{\partial \mathbf{G}_k} = \frac{1}{pN} \mathbf{A}'_0 (\mathbf{X}_k - \mathbf{A}_0 \mathbf{G}_k^* \mathbf{B}'_0) \mathbf{B}_0^*$$

この全要素を0とおき、制約条件(33)を利用して、

$$\mathbf{G}_k^* = \frac{1}{N} \mathbf{A}'_0 \mathbf{X}_k \mathbf{B}_0^* \quad (36)$$

これを S^2 に代入して整理すると、

$$S^2 = \frac{1}{p} \sum_k \text{tr} \mathbf{R}_{kk} - \frac{1}{pN^2} \sum_k \text{tr} (\mathbf{B}_0^* \mathbf{X}'_k \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0 \mathbf{X}_k \mathbf{B}_0^*) \quad (37)$$

ここで、 \mathbf{R}_{kk} は(8)で定義された多特性—多方法(あるいは多変数—多機会)行列の主体角線上に並ぶ行列、すなわち、同一の機会、または方法における変数間相関行列であり、(37)の第1項は、それを全機会または方法について平均したものの対角要素(これらは1である)の和だから、(2)の第1項と同様 n となる。従って S^2 の最小化は(33)の第2項の最大化に等しい。この第2項を g とすると、これは、

$$g = \frac{1}{pN^2} \sum_k \text{tr} (\mathbf{B}_0^* \mathbf{X}'_k \mathbf{A}_0 \mathbf{A}'_0 \mathbf{X}_k \mathbf{B}_0^*) = \frac{1}{p} \sum_k \text{tr} \mathbf{G}_k^* \mathbf{G}_k^{*'} \quad (38)$$

すなわち、核行列 \mathbf{G}_k^* の要素の2乗和の平均値である。なお、(34)の制約条件下では、一般の因子分析と同様に因子負荷の2乗和 $\text{tr} (\mathbf{B}'_0 \mathbf{B}_0)$ 、(35)の下では、主成分分析と同様の成分得点の分散 $\text{tr} \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 / N$ が、それぞれ最大化すべきものとなるが、以下の導出は容易でない。なお、トレースの性質から、

$$g = \frac{1}{pN^2} \sum_k \text{tr} (\mathbf{A}'_0 \mathbf{X}'_k \mathbf{B}_0^* \mathbf{B}_0^{*'} \mathbf{X}_k \mathbf{A}_0) = \frac{1}{p} \sum_k \text{tr} \mathbf{G}_k^* \mathbf{G}_k^{*'} \quad (39)$$

でもあることを指摘しておこう。

かくして、(38)または(39)を最大化する $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ は、次の停留方程式、

$$\varphi = g - \text{tr} \mathbf{A}_A \left(\frac{1}{N} \mathbf{A}'_0 \mathbf{A}_0 - \mathbf{I}_q \right) - \text{tr} \mathbf{A}_B (\mathbf{B}_0^* \mathbf{B}_0^{*'} - \mathbf{I}_q) \quad (40)$$

を, A_0, B_0^*, A_A, A_B で偏微分し, 全要素を0と置いて得られる方程式系の解として得られることになる。なお A_A, A_B はそれぞれ Q 次, q 次のラグランジュの未定定数行列であり, I_Q, I_q はそれぞれ Q 次, q 次の単位行列である。 A_0, B_0^* による微分により,

$$\frac{1}{pN^2} (\sum_k X_k' A_0 A_0' X_k) B_0^* = B_0^* L_B \quad (41)$$

$$\frac{1}{pN^2} (\sum_k X_k' A_0 A_0' X_k) B_0^* = B_0^* L_B \quad (42)$$

が得られる。ここで,

$$L_A = \frac{1}{2} (A_A + A_A') \quad (43)$$

$$L_B = \frac{1}{2} (A_B + A_B') \quad (44)$$

である。24~28と同じ論法で, A_0, B_0^* はそれぞれ行列 $(\sum_k X_k B_0^* B_0^{*'} X_k) / pN$ 及び $(\sum_k X_k' A_0 A_0' X_k) / pN^2$ の大小順に Q 番目, q 番目までの固有値に対応する固有ベクトルまたはその直交回転であることが示される。ここでは簡単のために, A_0, B_0^* は固有ベクトルそのものとし, L_A, L_B はそれぞれ当該の行列の固有値を対角要素として対角行列として以下の議論を進めることにしよう。 A_A, A_B による微分からは, 制約条件29が導かれ, 固有ベクトルを基準化のしかたを示すものとなる。

(41), (42) から,

$$\frac{1}{p} \sum_k G_k^* G_k^{*'} = L_A \quad (45)$$

$$\frac{1}{p} \sum_k G_k^* G_k^{*'} = L_B \quad (46)$$

が得られるが, このことは, G_k^* を2様に並べた行列,

$$G^* = [G_1^*, \dots, G_p^*] \quad (47)$$

$$\tilde{G}^* = [G_1^*, \dots, G_p^*] \quad (48)$$

がともに直交行列であることを示している。(45), (46)からはまた,

$$g = \text{tr} L_A = \text{tr} L_B \quad (49)$$

が得られ, これは, (41), (42)の固有値の和が一致することを, また37とあわせて考えれば, この和が準3相因子モデルによって説明される分散の $1/p$ に相当することもわかる。

ところで, (41), (42)の左辺の行列は, とともに未知数の行列 B_0^*, A_0 を含んでおり, このまま解くことはできない。従って B_0^* , または A_0 の適当な初期値から出発して, (41)と(42)を交互に収束するまで反復する必要がある。以上の解法は Kroonenberg & De Leeuw (1980)による

3相因子分析の解法の特珠な場合に相当しており, それに若干の修正を加えたものである。

6. 実際のアロリズム

前節で, 準3相因子分析の最小2乗解のアロリズムが一応得られた。しかしながら, 実際の計算にあたってこのアロリズムをそのまま適用することには困難が伴う。すなわち, (41)の行列は $N \times N$ の極めて大きなものとなるから, 通常の因子分析で28を直接解く場合と同じ問題が生ずるのである。従って, 28と等価な29を導いたのと同様の工夫がこの場合も必要となる。

そのためには, 若干の記法の導入が必要である。 B_0^* を次のような形に並べた $np \times pq$ 行列 B^* を定義する。

$$B^* = \begin{bmatrix} B_0^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_0^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_0^* \end{bmatrix} \quad (50)$$

この B^* は, 対角線に沿って B_0^* を p 個並べ, 他の部分はすべて0としたものである。これと(7)の X を使って, (41)は次のようにかくことができる。

$$\frac{1}{pN} X B^* B^{*'} X' A_0 = A_0 L_A \quad (51)$$

このとき, $X B^* B^{*'} X' / pN$ と, $B^{*'} X' X B^* / pN$ の固有値は等しい筈だから, (8)を用いて,

$$\frac{1}{p} B^{*'} R B^* W = W L_A \quad (52)$$

となるような $B^{*'} R B^* / p$ の固有ベクトルを要素とする $pq \times Q$ 行列 W が存在する。 $W' W = \frac{1}{p} L_A$ とすれば, 29と30の関係と同様に, A_0 は,

$$A_0 = X B^* W L_A^{-1} \quad (53)$$

によって求められる。

次式で定義される B_k は(53)を用いることによって,

$$B_k = \frac{1}{N} X_k' A_0 = (R_{k1} B_0^*, R_{k2} B_0^*, \dots, R_{kp} B_0^*) W L_A^{-1} \quad (54)$$

となるが, ここで W を p 個の $q \times Q$ 行列に分割して,

$$W = [W_1', \dots, W_p'] \quad (55)$$

として考えると,

$$B_k = \sum_k R_{kk'} B_0^* W_k' L_A^{-1} \quad (56)$$

となる。これにより(42)は,

$$\frac{1}{p} \left(\sum_k B_k B_k' \right) B_0^* = B_0^* L_B \quad (57)$$

となり、 R を最初に求めておけば、もとのデータ X 、及び A_0 に直接 refer することなく、52と57を交互に反復して計算を進めることができる。

また、核行列は、86により、

$$\begin{aligned} G^* &= \{G_1^*, \dots, G_p^*\} \\ &= \frac{1}{N} A_0' (X_1 B_{01}^*, \dots, X_p B_{0p}^*) \\ &= \frac{1}{N} A_0' X B^* \\ &= L_A^{-1} W' B' R B^* \end{aligned}$$

ここで、52を用いれば、

$$G^* = p W' \quad (58)$$

である。つまり、52と57の過程は、 A_0 、と B_0^* ではなく実質的に G^* と B_0^* の間での反復である。

初期値としては、 R_{kk} を平均した、

$$\bar{R} = \frac{1}{p} \sum_k R_{kk} \quad (59)$$

の固有ベクトルである B_0^* を用いる。実はこの B_0^* は村上(1979)で最終的な解として採用されているものと単位を除けば同じものである。以上のアルゴリズムは図1のフローチャートにまとめられる。なお、演算は倍精度で行なう必要がある。

ところで、52と57は、パラメータ B_0^* と G^* の意味について若干の示唆を与えている。52における $B^* R B^*$ は、

$$B^* R B^* = \begin{pmatrix} B_0^{*'} R_{11} B_0^* & B_0^{*'} R_{12} B_0^* & \dots & B_0^{*'} R_{1p} B_0^* \\ B_0^{*'} R_{21} B_0^* & B_0^{*'} R_{22} B_0^* & \dots & B_0^{*'} R_{2p} B_0^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^{*'} R_{p1} B_0^* & B_0^{*'} R_{p2} B_0^* & \dots & B_0^{*'} R_{pp} B_0^* \end{pmatrix}$$

であるが、この部分行列 $B_0^{*'} R_{kk} B_0^*$ は、

$$B_0^{*'} R_{kk} B_0^* = B_0^* \left(\frac{1}{N} X_k' X_k \right) B_0^* = \frac{1}{N} (B_0^* X_k)' (X_k' B_0^*)$$

すなわち、すべての機会または方法について共通のウェイト B_0^* を用いて算出された成分得点間の共分散行列である。だから W は、この成分得点間共分散行列をもう一度 factoring した場合の固有ベクトルに相当している。

一方、54の B_k は、定義からわかるように、 A_0 と各機会または方法におけるデータ X_k との相関係数、すな

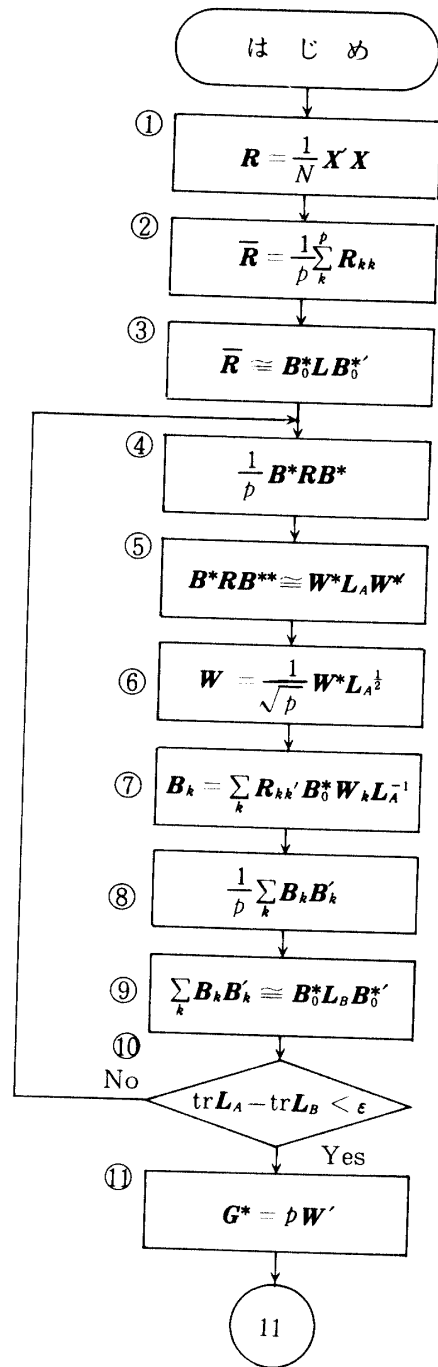


図1 準3相因子分析の最小2乗解を求めるためのフローチャート。①の R は(8)で定義される多特性-多方法(多変数-多機会)行列。 R と R_{kk} 、 B^* と B_0^* 、 W と W_k の関係は、(8)、(50)、(55)を参照。③、⑤、⑨はそれぞれ左辺の行列の定められた数の固有値、固有ベクトルの算出を示し、その場合固有ベクトルは2乗和1に基準化するものとする。以下、図2に続く。

わち, A_0 を共通の因子得点としたときの, 各機会または方法の因子負荷に相当するものとなっている。従って57による B_0^* は, その共通部分を最大限に抽出するためのウエイトであり, 次節で述べる変換を行なった B_0 は, B_k の要約である。

これらの行列に含まれるパラメータの統計量としての意味については, 次節でより明らかになるであろう。

7. パラメータの統計量としての意味

最小2乗法のアルゴリズムは, データに対してある意味で最もあてはまりの良いパラメータの推定値を与えるものである。例えば, ここでとりあげた準3相因子分析の場合で言えば, 32を最小にするように, 113のモデルをデータにあてはめることになる。もし因子数 Q と q を被験者数 N , 変数の数 n より十分小さくとしたとき, それでもモデルがよくあてはまる (すなわち S^2 が小さくなる) とするならば, データの“本質的な”部分は少数のパラメータをもつ113のような構造によって説明されたことになり, 記述の経済という観点からも, データの解釈の面からも有効である。

しかしながら, 因子分析がさまざまな分野でよく利用されるのは, 単にこれだけが理由ではない。112の構造モデルにおけるパラメータ行列 B は, (6)に見られるように, 因子得点とデータとの相関係数という統計量としての明確な意味をもっている。これは結果の解釈に際して大変都合のよい性質である。また, このことは1節でも述べたような, 変数間の相関関係の要約という因子分析の通常の目的にもかなうものでもある。準3相因子分析におけるパラメータ行列, B と G にも同様な統計量としての意味をもたせることは, 実用上大きな意味があると考えられる。

それを実現するためには, 制約条件を33から34に変える必要がある。すなわち, 核行列 G_k の単位を,

$$\frac{1}{p} \sum_k G_k' G_k = I \quad (60)$$

となるように変更する必要がある。 G_k' は, 46のようになっているから, 60を満足する G_k は,

$$G_k = G_k^* L_B^{\frac{1}{2}} \quad (61)$$

これに合わせて B_0 は,

$$B_0 = B_0^* L_B^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

とすれば, 113のモデルで, \hat{X}_k 自体は変化せず, A_0, G_k, B_0 は最小2乗解としての性質を維持することになる。(これが34の下での最小2乗解であることは, 34を制約条件として導かれた停留方程式の微分に, 61), 62を代入

して確かめることができる。) そこで, A_0, B_0, G_k はそれぞれ,

$$\frac{1}{N} A_0' A_0 = I_0, B_0' B_0 = L_B, \frac{1}{p} \sum_k G_k' G_k = I_q \quad (63)$$

を満足している。

ここでまず, 統計量としてではない G_k の意味について述べておこう。54式で, 機会ごとの因子負荷 B_k を, X_k と A_0 の相関として定義した。同様に機会ごとの因子得点 A_k を, 通常の因子分析における30にならって,

$$A_k = X_k B_0 L_B^{-1} \quad (64)$$

で定義してみよう。共通の因子得点, 因子負荷である, A_0, B_0 から機会ごとの因子得点と因子負荷 A_k, B_k への変換行列を U_k, V_k とし, 各機会ごとにこれを最小2乗法で求めてみよう。

$${}_A S_k^2 = \text{tr}(A_k - A_0 U_k)' (A_k - A_0 U_k) \quad (67)$$

及び,

$${}_B S_k^2 = \text{tr}(B_k - B_0 V_k)' (B_k - B_0 V_k) \quad (68)$$

を, U_k, V_k で偏微分して全要素を0と置き, 31), 61)を用いて整理すると,

$$U_k = \frac{1}{N} A_0' A_k = G_k \quad (69)$$

$$V_k = L_B^{-1} B_0' B_k = G_k' \quad (70)$$

が得られる。すなわち, G_k は A_0 から A_k への, その転置 G_k' は B_0 から B_k へのそれぞれ最小2乗変換となっているわけである。 A_k, B_k は, 準3相因子分析のモデルに直接あらわれていないが, 解釈時に暗に参考にする意味はあると思われる。以後,

$$\hat{A}_k = A_0 G_k \quad (71)$$

$$\hat{B}_k = B_0 G_k' \quad (72)$$

で定義される \hat{A}_k, \hat{B}_k をそれぞれ各機会または方法における因子得点の推定値, 因子負荷の推定値と呼ぼう。

さて, B_0 の統計量としての意味を考えるために, 固有方程式42を考えよう。

これに36を代入して得られる

$$\frac{1}{pN} \sum_k X_k' A_0 G_k = B_0^* L_B$$

は, 61), 62)を利用すると,

$$B_0 = \frac{1}{pN} \sum_k X_k' A_0 G_k = \frac{1}{pN} \sum_k X_k' \hat{A}_k \quad (73)$$

となる。また, \hat{A}_k は全機会または方法を通じてみたと

き、分散が1で直交すること、すなわち、

$$\frac{1}{pN} \sum_k \hat{A}_k \hat{A}_k' = I_q \quad (74)$$

をあわせて考えると、73の右辺は、データと、各機会または方法ごとの因子得点の推定値定値との相関を意味している。(73と6)を比較のこと。) 村上(1979)の解法では、 B_0 は、 X_k とモデルの中には存在しない A_k との相関であったが、ここで73が得られたことにより、準3相因子分析モデルだけで閉じた意味をもつようになったことは、最小2乗解を求めたことによる大きなメリットである。

次に、 G_k について考えてみよう。 A_0 に関する制約条件により、

$$G_k = \frac{1}{N} A_0' A_0 G_k = \frac{1}{N} A_0' \hat{A}_k \quad (75)$$

であるが、これは共通の因子得点 A_0 と各機会または方法における因子得点の推定値との共分散である。 A_k は単独の k だけで考えると、その分散は1であるとは限らないので、66は相関行列とみなすことはできない。 G_k の要素が相関係数になるようなモデルの修正については9節で述べる。なお、 G_k に関しては、69から、

$$G_k = \frac{1}{N} A_0' A_k \quad (76)$$

でもある。村上(1979)の解法でも76は成立していたが、モデル内で閉じた75の方が望ましい性質であろう。

ただし、76は核行列の意味を考えるうえで興味ある面を示している。因子の変化を考える場合、異なる機会または方法間で因子得点間の相関をとる、というのはしばしば行なわれるやり方である。この場合も、共分散列、

$$\frac{1}{N} \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 A_2 \cdots \cdots \cdots A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} A_1' A_1 & \frac{1}{N} A_1' A_2 & \cdots & \frac{1}{N} A_1' A_p \\ \frac{1}{N} A_2' A_1 & \frac{1}{N} A_2' A_2 & \cdots & \frac{1}{N} A_2' A_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} A_p' A_1 & \frac{1}{N} A_p' A_2 & \cdots & \frac{1}{N} A_p' A_p \end{bmatrix} \quad (77)$$

の各部分行列を見ることによってその目的は達せられるかもしれない。しかしながら、機会や因子の数が多い場

合、あるいは変化のパターンが複雑な場合には、その読みとりは困難である。そこでこの行列をもう一度因子分析しようとするのは自然な発想である。76ではまさにそのことが行なわれている。すなわち、 A_0 は A_k に対する更に高次の因子であり、 G_k はその高次の因子に対する A_k の因子負荷に相当しているわけである。これは、1節で述べた相関構造の記述のための因子の導入と同じ考え方であり、核行列が決して特殊な概念でなく、通常の因子分析の思考法の延長線上にあることを示している。

なお、77における A_k を \hat{A}_k におきかえると、

$$\frac{1}{N} \hat{A}_k \hat{A}_k' = G_k' G_k' \quad (78)$$

だから、

$$G = [G_1 G_2 \cdots G_p] \quad (79)$$

とするとき、 $G'G$ が77に相当するものとなる。

8. 軸の回転について

因子分析の有用性を支えるもう一つの特徴は、4節で示されたように、解が完全には一意的でなく、直交回転に関する自由度を残していることである。(ここでは斜交回転については考えない。) すなわち、12の値は、 A, B に同じ直交回転を施しても変化しない。なぜなら、 T を q 次の正規直交行列とすると、

$$(AT)(BT)' = ATT'B' = AB'$$

だからである。回転によって因子負荷行列 BT は、いわゆる単純構造に近いパターンを示すようにできることが多いが、それによって相互に相関の高い変数群を選び出すことが容易になる。

3相因子分析では、13の値を変えないで、2種類の回転を施すことができる。すなわち、 T_A, T_B をそれぞれ Q 次、 q 次の正規直交行列とすると、

$$\hat{X}_k = (A_0 T_A)(T_A' G_k T_B)(B_0 T_B)' \quad (80)$$

である。

因子得点と因子負荷の因子数 Q と q を等しくしないでよいことと並んで、因子得点と因子負荷に独立に別の回転を施すことができることは、準3相因子分析モデルを著しく flexible なものとしている。分析モデルが、なるべく一義的な結果を生み出すのが望ましいか、あるいはさまざまな変換を許す一義性の低いものであることが望ましいかは、一概には決めにくい問題である。しかしながら、少なくとも分析の初期においては、データを多面的に検討する必要がある、モデルは flexible な方が良く考えられる。

現在までのところ、回転については十分な検討がなされていない。 T_B に関しては、 BT_B を単純構造に近づけるために B の varimax 回転を行ない、 T_A については、核行列を単純構造に近づけるために、 G を varimax 回転する、というのが、著者が試みている唯一の回転法である。後の分析例に見るように、多くの場合これによって十分解釈可能な結果を得ることができる。

しかしながら、モデルの flexibility を生かすためには、もっと多くの回転方法を検討する必要がある。研究者は、研究の初期の段階においても、変化の構造についてのある程度の仮説をもっているのが普通である。その仮説的構造を検討するためには、常に単純構造が適切なわけではない。例えば不完全プロクラステス回転等が有効である可能性がある。いずれにしてもこれは今後の検討課題である。

9. 核行列の相関係数への変換

7節において述べたように、核行列 G_k は、高次の因子得点 A_0 と、各機会または方法における因子得点または、その推定値 $A_0 G_k$ との共分散であり、いわば高次の因子負荷である。しかし、共分散は実際の解釈に必ずしも便利でない。一歩進めて、これを相関係数とすることはできないだろうか。

G_k を A_0 と $A_0 G_k$ の相関係数に変換することは形式的には容易である。 A_0 の各列の分散は1だから、 G_k の各行を $A_0 G_k$ の対応する列の標準偏差で割ればよい。 $A_0 G_k$ の分散は、

$$\frac{1}{N} G_k' A_0 A_0 G_k = G_k' G_k \quad (81)$$

の対角要素であるから、

$$D_k = \text{diag}(G_k' G_k) \quad (82)$$

として、

$$G_k^\dagger = G_k D_k^{-\frac{1}{2}} \quad (83)$$

とすれば、 G_k^\dagger の要素は、 A_0 と $A_0 G_k$ の相関係数となる。(ここで $\text{diag } X$ は、 X の対角要素はそのままにして、それ以外の要素をすべて0とした対角行列である。)

ただし、この場合 \hat{X}_k の値を変えないためには、モデルを、

$$X_k = A_0 G_k^\dagger D_k^{\frac{1}{2}} B_0 \quad (84)$$

に変形する必要がある。しかも、この変換は B_0 の回転が終わった後に行なわなければならない。84において B_0 の回転を行なうと、 $D_k^{\frac{1}{2}}$ は対角行列ではなくなってしまうからである。このことは、 B_0 の回転によって、

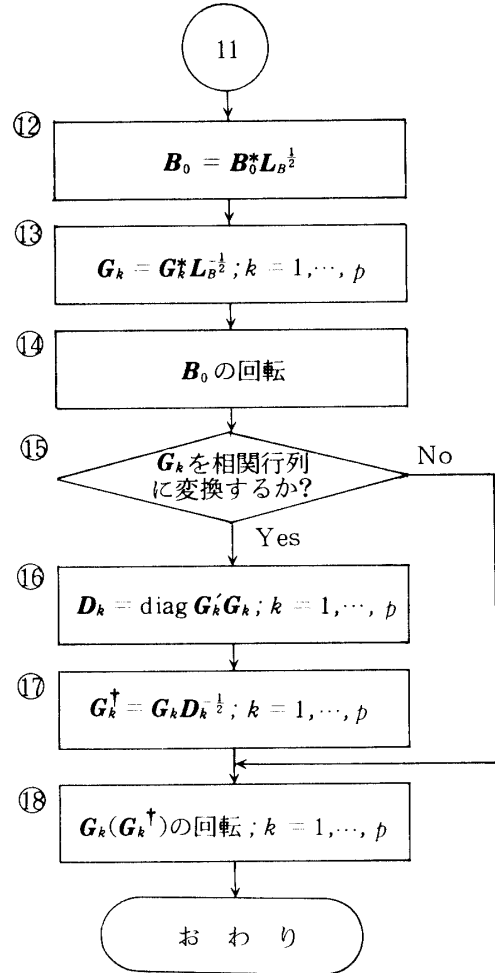


図2 図1に続く部分のフローチャート。(基準化 varimax 回転を用いるなら⑧の回転は G_k と G_k^\dagger で全く同一になる。)

$A_0 G_k$ の分散が変化するため、と言い換えてもよい。

$D_k^{\frac{1}{2}}$ は、各機会または方法における、因子負荷に対する重み、各機会または方法における特定の因子負荷の重要性を示すと解釈される。

84の修正は、いささか ad hoc であるきらいはあるものの、これによって解釈は著しく促進される。84は13に比べて一見やや複雑に見えるけれども、 $D_k^{\frac{1}{2}}$ は対角行列であり、それほどパラメータが増えるわけではない。図1に続く部分のフローチャートを図2に示す。

10. 多特性—多方法行列の分析

多特性—多方法行列は、Campbell & Fiske (1959) によって、心理測定の妥当性の検討方法として定式化された。それに関する一般的解説はここでは省略し、ここでは例として、表5をあげておこう。²⁾この例では124人

2) 簡潔な解説は池田 (1973) の p. 191~ p. 194にある。

表5 Kelly & Fiske による多特性—多方法行列

| | Staff ratings | | | | | Peer ratings | | | | | Self ratings | | | | |
|---------------------|---------------|------|------|------|------|--------------|------|------|------|------|--------------|------|------|------|------|
| | 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 1) | 2) | 3) | 4) | 5) |
| Staff ratings | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1) Assertive | 1.00 | .37 | -.24 | .25 | .35 | .71 | .39 | -.27 | .03 | .19 | .48 | .17 | -.04 | .13 | .37 |
| 2) Cheerful | .37 | 1.00 | -.14 | .46 | .19 | .35 | .53 | -.31 | -.05 | .05 | .31 | .42 | -.13 | .27 | .15 |
| 3) Serious | -.24 | -.14 | 1.00 | .08 | .09 | -.18 | -.15 | .43 | .03 | .04 | -.22 | -.10 | .22 | -.03 | -.22 |
| 4) Unshakable poise | .25 | .46 | .08 | 1.00 | .31 | .26 | .38 | -.06 | .20 | .29 | .19 | .10 | -.13 | .22 | .09 |
| 5) Broad interests | .35 | .19 | .09 | .31 | 1.00 | .41 | .29 | .03 | .07 | .47 | .12 | -.03 | -.05 | -.04 | .26 |
| Peer ratings | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1) Assertive | .71 | .35 | -.18 | .26 | .41 | 1.00 | .37 | -.15 | .11 | .33 | .46 | .09 | -.04 | .10 | .27 |
| 2) Cheerful | .39 | .53 | -.15 | .38 | .29 | .37 | 1.00 | -.19 | .23 | .22 | .36 | .24 | -.11 | .15 | .12 |
| 3) Serious | -.27 | -.31 | .43 | -.06 | .03 | -.15 | -.19 | 1.00 | .19 | .19 | -.15 | -.25 | .31 | .00 | -.07 |
| 4) Unshakable poise | .03 | -.05 | .03 | .20 | .07 | .11 | .23 | .19 | 1.00 | .29 | .12 | -.11 | .06 | .14 | .05 |
| 5) Broad interests | .19 | .05 | .04 | .29 | .47 | .33 | .22 | .19 | .29 | 1.00 | .23 | -.03 | .06 | -.03 | .35 |
| Self ratings | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1) Assertive | .48 | .31 | -.22 | .19 | .12 | .46 | .36 | -.15 | .12 | .23 | 1.00 | .23 | -.05 | .16 | .21 |
| 2) Cheerful | .17 | .42 | -.10 | .10 | -.03 | .09 | .24 | -.25 | -.11 | -.03 | .23 | 1.00 | -.12 | .26 | .15 |
| 3) Serious | -.04 | -.13 | .22 | -.13 | -.05 | -.04 | -.11 | .31 | .06 | .06 | -.05 | -.12 | 1.00 | .11 | .17 |
| 4) Unshakable poise | .13 | .27 | -.03 | .22 | -.04 | .10 | .15 | .00 | .14 | -.03 | .16 | .26 | .11 | 1.00 | .31 |
| 5) Broad interests | .37 | .15 | -.22 | .09 | .26 | .27 | .12 | -.07 | .05 | .35 | .21 | .15 | .17 | .31 | 1.00 |

原

書

の被験者について5つの特性 (Assertive, Cheerful, Serious, Unshakable poise, Broad inte rests) が, 3つの方法 (Staff ratings, Peer ratings, Self ratings) によって測定されている。Campbell & Fiske の考え方は, 要するに, 異なった方法によって測られた同一の特性間の相関 (表5のゴシックの数値) は, 十分高くなければならず (収束的妥当性), 同一の方法で測られた異なる特性の間の相関 (表5のイタリックの数値) は十分低くなければならぬ (弁別的妥当性) ということである。

Campbell & Fiske の分析は, あくまでも相関行列の値の大小関係の比較にもとづく定性的なものであったが, その後, より定量的, 形式的な分析の提案が幾つかかなされるようになった。それらの方法の概要と, 比較については, Schmitt, Coyle & Saari (1977) にまとめられている。(そこには3相因子分析も含まれている。)

準3相因子分析による多特性—多方法行列のアルゴリズムを, 従来の分析方法と比較するためには, Schmitt らが例としてとりあげている行列を分析してみるのがよいと考えられよう。しかしながら, その例は極めて明確な収束的妥当性を示すもので, 実際上いかなる方法によっても同一の結果が得られている。(準3相因子分析でも同様であった。)そこで, 本論文では, 表5にあげた Kelly & Fiske による, 行列を分析する。Campbell & Fiske (1959) では, この行列は, “性格特性の評定について心理学が現在のところ提供しうる最高の妥当性”を示すものとしているが, よく見ると特性間, 方法間でかなり複雑な相関構造を示しており, 収束的妥当性, 弁別的妥当性とも完全なものからは程遠い。

まず, 因子負荷ベクトルの数 q と因子得点ベクトルの数 Q のあらゆる可能な組合わせについてモデルのあてはめが行なわれた。収束判定は, $|\text{tr} \mathbf{L}_A - \text{tr} \mathbf{L}_B| < 10^{-6}$ という条件によったが, 大部分の条件で10回以内の反復で終了した。(最大の反復回数を要したのは, $q = 4, Q = 11$ の場合の23回であった。)

そこで, 3相因子モデルによって説明される分散の大きさ, $pg = 3\text{tr} \mathbf{L}_A = 3\text{tr} \mathbf{L}_B$ を因子得点ベクトルの数をパラメータとし, 因子負荷ベクトルの数 q の関数としてグラフにプロットしたのが図3である。(41), (42)の行列のランクの関係から, $Q \leq kq, q \leq kQ$ だから, 例えば, $Q \geq 4$ のとき $q = 1, Q \geq 7$ のとき $q \leq 2, Q = 1$ のとき $q \geq 4$ といった場合の計算は無意味である。逆に言えば, 例えば $q = 2$ のとき Q を7以上に増やしても, 説明

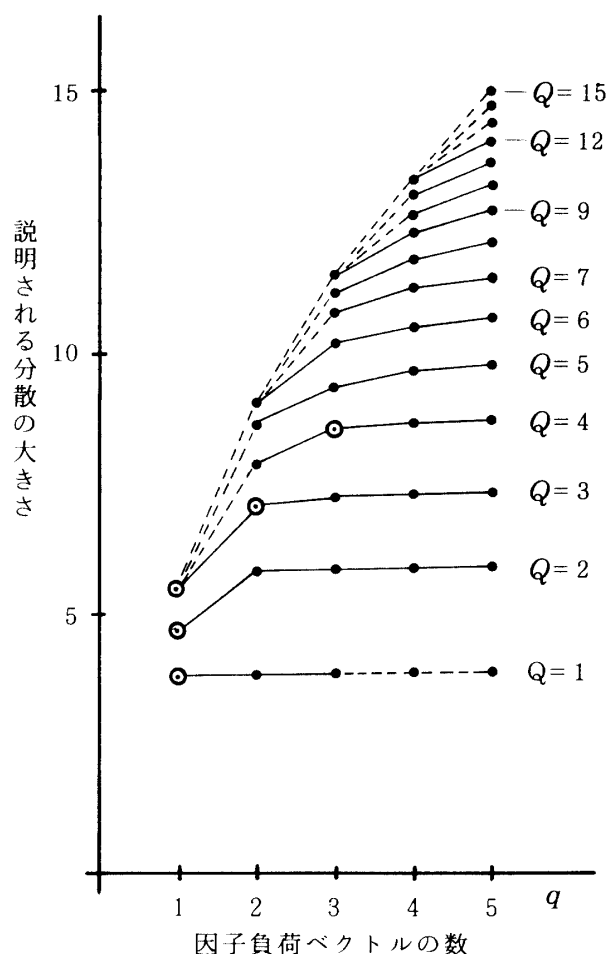


図3 因子負荷ベクトルの数 q に対してプロットされた準3相因子分析によって説明される分散大きさ。 Q は因子得点ベクトルの数。⊙は Kaiser の基準を満たす組合わせ。

力を増やすことはできない。このような部分について, 図3では点線であらわしてある。

図3から, 因子数 Q, q の適切な決定を行なうことは難しい。しかし, Q と q の適切な組合わせを示唆することはある程度できる。すなわち, $Q = 1$ のとき, q を2以上に増やしても, 説明力はほとんど増加しないから, $Q = 1$ なら $q = 1$ が唯一適切な組合わせである。同じ理由で, $Q = 2$ と $Q = 3$ の場合にも, $q = 2$ が適切な数であると言える。ただ, Q が増加するにつれて, このようなことは明確に言えなくなってくる。図4は, 同じデータを因子負荷ベクトルの数をパラメータとしてプロットしたものであるが, こちらは, よりなめらかな関数となり, 因子数を決める根拠とはなりにくい。従って, 因子数決定のための別の基準を考える必要がある。

通常因子分析において, 因子数の推定に用いられる使法として, Kaiser の基準と呼ばれるものがある。こ

3) 引用は Campbell & Fiske (1959) による。

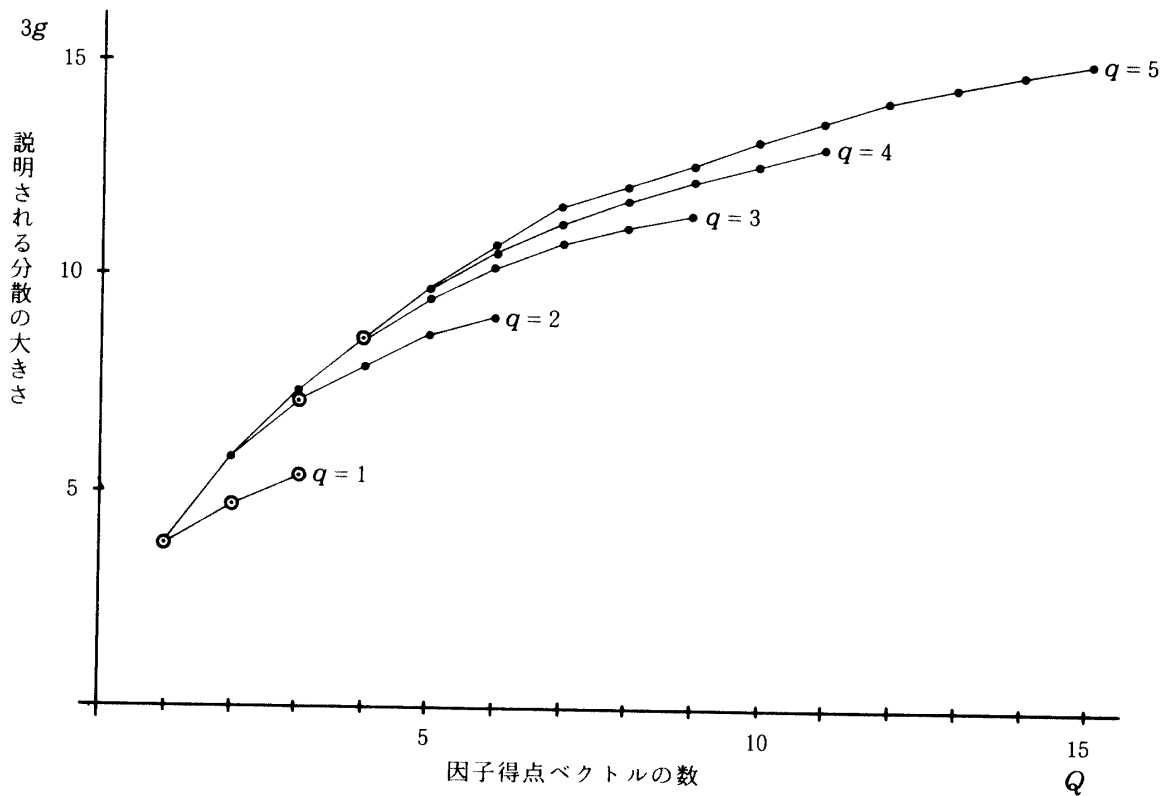


図4 因子得点ベクトルの数 Q に対してプロットされた準3相因子分析によって説明される分散の大きさ。 q は因子負荷ベクトルの数。図3と同じデータ。

これは、相関行列の1以上の固有値の数をもって因子数とする、というものである。これと同じ基準を、このモデルに対しても適用してみよう。すなわち、(41)、(42)の L_A 、 L_B の対角要素の p 倍が、すべて1を越えるような Q, q の組み合わせのうち、説明される分散が最大となるような因子数に決める、ということである。これは、全くの“rule of thumb”にすぎず、今後より適切な基準を考えたい必要がある。

さて、このデータでは、 L_A, L_B の対角要素が、すべて $1/p = 1/3$ を越えるのは、図3の◎で示した5つの組み合わせのみであった。そのうち説明力の最も高いのは、 $Q=4, q=3$ の場合である。そこで、一応ここでは、因子得点ベクトル、因子負荷ベクトルの数をこれに決めて、以下の結果を示すことにする。

なお、参考のために、 $q=3$ とした場合の、幾つかの Q の値に対応する $(\sum_k X_k A_k A_k' X_k) / pN^2$ のすべての固有値をプロットした図5と、 $Q=4$ としたときの幾つかの q の値に対応する $(\sum_k X_k B_k B_k' X_k) / pN$ のすべての固有値を図6を示す。図5では、 $Q=1$ の場合1個、 $Q=2$ の場合2個、 $Q \geq 3$ の場合3個の明瞭な大きな固有値があり、それ以外の固有値はほとんど0となっている。このような固有値の明瞭な下降は、 L_B においては

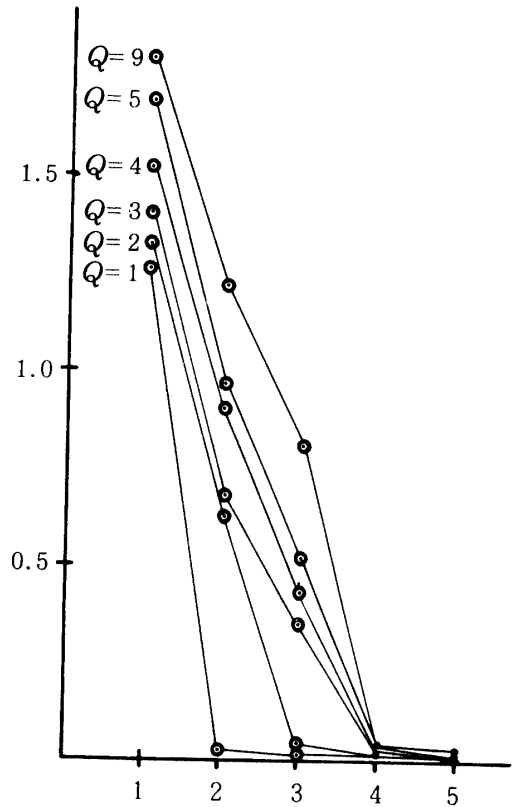


図5 $(\sum_k X_k A_k A_k' X_k) / pN^2$ の固有値 ($q=3$)。◎は3番目までの固有値、点線はKaiserの基準。

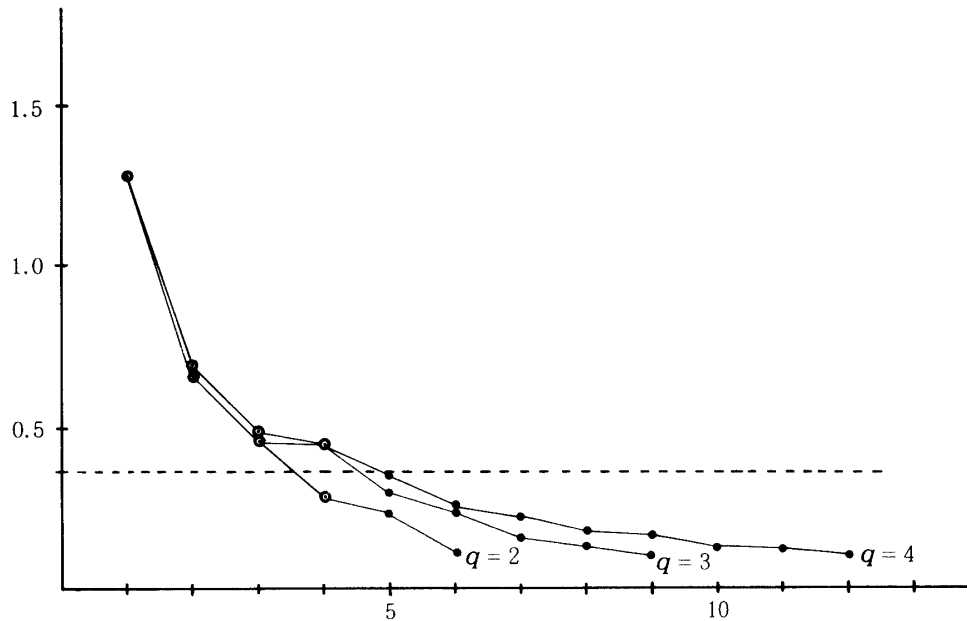


図6 $(\sum_k X_k B B' X_k') / \rho N$ の固有値 ($Q = 4$)。○は4番目までの固有値，点線は Kaiser の基準

しばしば見られ，因子数の不適切な組み合わせを除外するのに役立つ。図6では，このような明瞭な下降は見られない。しかしながら， $q = 3$ において，4番目と5番目の固有値の間には，はっきりした gap があり， $Q = 4$ に対する $q = 3$ の決定が，それほど具合の悪いものでないことを示している。

因子負荷の数 q を4以上に増やそうとすると， L_B の固有値を基準以上にするためには， L_A に相当小さい固有値まで含めなければならなくなる。すなわち， $q = 4$ に対しては， $Q = 6$ としたとき基準が満たされるが，そのとき L_A の最小の要素は，0.29である。更に， $q = 5$ とするには， $Q = 10$ とする必要がある， L_A の最小の要素は0.17である。

以下で採用する， $q = 3, Q = 4$ について L_A の対角要素は，大小順に，1.280, 0.684, 0.458, 0.442であり， L_B の対角要素は，1.527, 0.900, 0.473で，その和はともに2.864である。この数値は，それぞれの固有値計算が行なわれたもとの行列のトレースの，75.02%，99.25%に相当する。またモデルによって説明される分散の大きさは， $2.864 \times 3 = 8.592$ であり，これは全分散15の57.3%に相当する。

まず，varimax 回転された因子負荷行列 B_0 を表6に示す。第1列は，Assertive と Broad interests の高い負荷により，第2列は Cheerful と Unshakable poise の高い負荷によって特徴づけられる。これら2つの変数群は，互いに他方の群が高い負荷をもつ列にも，

若干の負荷量を有する。第3列は Serious の高い負荷で特徴づけられるが，Assertive と Cheerful が負に，Unshakable poise と Broad interests が正に，それぞれ低く負荷している。3つの列の負荷量の2乗和は，ほぼ等しく，それぞれが代表する， $(A G_k$ を因子得点とする) 因子によって説明される分散の量はほぼ等しい。

次に，これも相関行列に変換したうえで varimax 回転された核行列 G_k^\dagger と，その各列の対応する因子負荷に対する重み行列 $D_k^{\frac{1}{2}}$ の対角要素を表7に示す。方法ごとに大きな値を拾ってゆくと，Staff ratings では，第1行第1列，第2行第2列，第3行第3列にそれぞれ1に近い値が見出される。すなわち，第1行から第3行に相当する因子得点は，ほぼ完全に因子負荷の第1列から第3列に対応するものであることがわかる。Peer rat-

表6 因子負荷行列

| trait \ factor | I | II | III |
|---------------------|------|------|------|
| 1) Assertive | .67 | .25 | -.29 |
| 2) Cheerful | .18 | .72 | -.18 |
| 3) Serious | .00 | -.04 | .74 |
| 4) Unshakable poise | .23 | .57 | .38 |
| 5) Broad Interests | .70 | .16 | .30 |
| contributions | 1.02 | .94 | .91 |

表7 相関行列に変換された核行列

| factor scores | factor loadings | | |
|---------------|-----------------|------------|------------|
| | I | II | III |
| Staff ratings | | | |
| 1) | .99 | -.02 | -.15 |
| 2) | -.05 | .98 | .01 |
| 3) | -.07 | -.07 | .98 |
| 4) | -.15 | -.18 | .02 |
| weights | 1.02 | .99 | 1.15 |
| Peer ratings | | | |
| 1) | 1.00 | .23 | -.05 |
| 2) | .00 | .94 | -.25 |
| 3) | .05 | .18 | .85 |
| 4) | .00 | -.17 | .47 |
| weights | 1.00 | 1.06 | .74 |
| Self ratings | | | |
| 1) | .88 | -.40 | .04 |
| 2) | -.04 | .82 | -.12 |
| 3) | -.37 | -.30 | .21 |
| 4) | .31 | .28 | .97 |
| weights | .98 | .95 | 1.07 |

ings もほぼ同様の様相を示すが、第3行第3列の値は幾分小さく、第4行第3列の値がやや大きい。Self ratings では、明らかに、第3行第3列にかわって第3行第4列に大きな値を示す。すなわち、Self ratings では、因子負荷の第3列に対応する因子得点は、第4行に相当するものである。なお、全体としてみると、Staff ratings の部分は、.98以上の値と、絶対値.20以下の値のみで、ほぼ完全な単純構造をなしているのに対し、Self ratings では、それがかなり崩れている。Peer ratings は両者の中間程度である。

以上の結果から、因子の構造の方法による変化を概観すると、因子負荷の第1列と第2列に対応する因子は、ほぼ因子得点の変化しない、a型の因子であり(ただしSelf ratings に若干の問題がある)、因子負荷の第3列に対応する因子は、Staff ratings と、Self ratings とで因子得点に変化するb型因子である(Peer ratings の因子得点は、両者の平均的なものだが、かなりStaff ratings に近い)ということになる。

かなり粗雑に言葉で要約すれば、自己主張性と関心の広さ、快活さと落ち着き、真面目さ、は、パーソナリティ評定における3つの独立した次元であり、最初の2つの次元は、教師、仲間、自己の評定が一致するが、真面目

さについては、教師、仲間の評定と自己評定が一致しない、というわけである。

ところで、もう一度表5に戻り、Campbell & Fiske 流にこの行列を見ると、今述べた要約的結論は著しく不当な、事実をゆがめたもの、と写るかもしれない。例えば、表5でゴシックで示した異方法による同一特性間の相関において、第3の次元を特徴づける Serious の収束的妥当性は、第2の次元を特徴づける Cheerful と、Unshakable poise のそれに劣っているとは見え、特に、後者よりは明らかに勝っているように見える。しかしながら、これは特性間の相関構造を無視して異方法同一特性間相関だけを見ることによる、むしろ正しくない結論であると思われる。

本来、収束的妥当性と弁別的妥当性は独立した概念ではなく、論理的には明らかに後者は前者に先行する概念であると考えられるべきである。異方法同一特性間相関の大きさを単純に比較してよいのは、特性間の独立性がほぼ保障されているか、少なくとも方法間で同一の因子構造の成立が確認されている場合に限られる。このことをCampbell & Fiske (1959) は第4の要請としてあげてはいる(P. 83)。しかしながら Serious は明らかにこの要請を満たしていないのである。

そのことを示す前に、核行列の内積 $G^t G^t$, すなわち B_0 を因子負荷とする各方法ごとの因子得点間の相関行列を表8に示す。これは、因子を特性とみなした一種の多方法-多特性行列となっている。ここでは、同一方法内で、3つの特性はほぼ独立に近く、ゴシックで示した異方法同一特性間相関係数から、ほぼ先に述べた結論が確認できよう。全般にSelf ratings は、他の2つの方法と違った結果を生み出すことが明確であり、Serious で特徴づけられる因子が、Staff とSelf の間では全く収束的妥当性を欠くことも確認できる。

更に、ここではSelf ratings と他の方法との相関係数を含むブロックの非対角要素に、かなり絶対値の大きな値が目立つ。例えば、Self ratings における第1因子とStaff ratings における第3因子との相関-0.48はSelf ratings の核行列の第1列と、Staff ratings の核行列の第3列の積和である。このような大きな値を生ずる主たる原因は、それぞれの第3要素、-.37と.98の積である。あえて解釈すれば、学生自らが、自己主張的で関心が広いと考えている特性の一部は、教師によって真面目さの欠如ととらえられる傾向がある、ということになる。このような核行列の同一の行の異なる行における大きな値の出現は、2節において述べたように、因子得点が同一で、因子負荷が変化するc型因子の存在を暗示する。

表8 因子得点間の相関行列 ($G^t G^t$)

| | Staff ratings | | | Peer ratings | | | Self ratings | | |
|---------------|---------------|------|------|--------------|------|------|--------------|------|------|
| | I | II | III | I | II | III | I | II | III |
| Staff ratings | | | | | | | | | |
| I | 1.00 | | | | | | | | |
| II | -.04 | 1.00 | | | | | | | |
| III | -.23 | .03 | 1.00 | | | | | | |
| Peer ratings | | | | | | | | | |
| I | .98 | -.02 | -.10 | 1.00 | | | | | |
| II | .18 | .94 | .23 | .24 | 1.00 | | | | |
| III | -.17 | -.38 | .82 | -.01 | -.17 | 1.00 | | | |
| Self ratings | | | | | | | | | |
| I | .84 | -.01 | -.48 | .86 | .12 | -.22 | 1.00 | | |
| II | -.45 | .78 | -.15 | -.41 | .58 | -.30 | -.12 | 1.00 | |
| III | -.11 | -.30 | .20 | .05 | -.23 | .66 | .26 | .01 | 1.00 |

表9 各方法の因子負荷の推定値 ($B_0 G_k'$)

| | 1) | 2) | 3) | 4) |
|---------------------|------|------|------|------|
| Staff ratings | | | | |
| 1) Assertive | .71 | .22 | -.35 | -.16 |
| 2) Cheerful | .18 | .78 | -.25 | -.18 |
| 3) Serious | -.11 | .03 | .72 | .02 |
| 4) Unshakable poise | .16 | .67 | .30 | -.15 |
| 5) Broad interests | .65 | .17 | .23 | -.13 |
| Peer ratings | | | | |
| 1) Assertive | .72 | .26 | -.19 | -.18 |
| 2) Cheerful | .31 | .55 | -.06 | -.18 |
| 3) Serious | -.05 | -.22 | .66 | .38 |
| 4) Unshakable poise | .31 | .30 | .43 | .12 |
| 5) Broad interests | .71 | .04 | .33 | .13 |
| Self ratings | | | | |
| 1) Assertive | .45 | .28 | -.38 | .01 |
| 2) Cheerful | -.16 | .66 | -.33 | .10 |
| 3) Serious | .05 | -.11 | .16 | .68 |
| 4) Unshakable poise | -.03 | .47 | -.19 | .59 |
| 5) Broad interests | .55 | .13 | -.24 | .54 |

表9は $B_0 G_k'$, すなわち A_0 を共通の因子得点とするような、各機会の因子負荷の推定値を示すものである。これを見ると、Staff ratings に関しては、最初の3列に の3つの列がほぼ完全に再現され、第4列には目立った負荷はない。Peer ratings では、第2列にやや違いがみられるものの、最初の3列は Staff ratings とほぼ同じ傾向を示しており、第4列は、値は小さいが第3列とほぼ同じパターンである。Self ratings では、第1列、第2列はだいたい上と同様であるが、第3列は値が小さいが、Serious 以外の特性がすべて負に荷したパターンがあらわれ、第4列は、Serious 以下の3つの特性が高く荷した独自のものである。

表9の各列を通してみれば、これらは同一の因子得点を持ち、方法による因子負荷の変化をあらわしている。列全体を、表5の相関行列の列と比較してみよう。表5の Assertive と Broad interests の列は、表9の第1列と、Cheerful と Unshakable poise の列は、第2列と各方法ともほぼ同じパターンを示している。しかし、Serious の列は、Staff ratings に関しては第3列が Self ratings に関しては第4列が、それぞれ似たパターンを示している(それぞれ符号が完全に一致していることに注意)。このように、表9の4つの列は、もとの多特性-多方法行列を要約するものになっている。

すなわち、先に述べた一見矛盾する結果は、Serious と他の項目との相関構造が方法によって変わるために生じてきたものなのである。全体として表5から得られる

3つの因子のうち、2つはほぼ収束的妥当性を示し、他の1つは示さない、ということになる。

多特性—多方法行列に準3相因子分析を適用して妥当性検討を行なう場合、高い妥当性の指標となるのはa型因子ということになる。方法間における変数間の相関構造が、方法内の相関構造とがほぼ一致するような変数群は、収束的妥当性が高いと見てよいであろう。b型因子は、いわゆる方法分散が多く部分を占めるものと考えられる。問題はc型因子であって、これに負荷をもつ変数(特性)のうちには、単独でみれば高い収束的妥当性をもつものもある可能性がある。しかし、そのような変数(特性)は、方法間で意味が異なっていると考えられるから、妥当性の高いものとは言い難いと思われる。

このような、変数間の相関構造を考慮した多特性—多方法行列の分析法には、例えばGolding & Seidman (1974)、Jackson (1975)等がある。これらの方法は、要するに、方法ごとに独立に行なった因子分析の因子得点間相関行列(表8に相当する)を、もう一度因子分析する(核行列に相当するものを求める)という2段階の方法である。しかしながら、このやり方では、各方法の因子負荷の違いをうまく反映させることができないから、a型の因子とc型の因子は区別できない。

実際に多特性—多方法行列を必要とする場合は、表5のような少数の変数ではなく、もっと多くの変数が問題にされる必要があることが(特に研究の初期においては)多いと思われる。そこでは、変数の因子構造について、事前に十分な情報が無いのが普通であろう。その場合、まず方法ごとに因子分析をして、変数の因子構造を調べ、というのは(それが不要であるとは言わないまでも)重要な情報を見落とす危険が大きい。多特性—多方法行列の全体を扱う準3相因子分析法は、このような場面において威力を発揮する筈である。

11. 今後の問題

準3相因子分析モデルの評価については村上(1979)と本論文の各所で既に述べ尽したと思われる。ここでは、最小2乗解法について簡単に述べるにとどめよう。最小2乗解のメリットは、7節において論じたように、パラメータの統計量としての意味がよりすっきりしたことである。それ以外には、固有値の大きさによって因子数の決定が容易になったことが、経験的事実としてはあげられる。核行列の相関係数への変換については、解釈を促進する効果はあるものの、検討の余地がある。また、最小2乗法のアルゴリズムがデータとして R のみを用いるものであることから、共通性推定の問題の解決に大幅に近づいたと考えられる。村上(1979)は、準3相因子

分析の今後の問題として、因子数の決定方法と共通性推定をあげたが、最小2乗解は、そのための1ステップとして意味があると考えられる。

更に今後の問題としてあげられるのは、8節で述べた回転の問題、及び他の方法との数理的、経験的側面からの比較検討であろう。

文 献

- Baltes, P. B., & Nesselroade, J. R. 1973 The developmental analysis of individual differences on multiple measures. In J. R. Nesselroade & H. W. Reese (Eds.) *Life-span developmental Psychology: Methodological issues*. Academic Press. Pp 219-251.
- Campbell, D. T., & Fiske, D. W. 1959 Convergent and discriminant validation by multitrait-multimethod matrix. *Psychological Bulletin*, 56, 81-105.
- Golding, S. L., & Seidman, E. 1974 Analysis of multitrait-multimethod matrices: A two step principal components procedure. *Multivariate Behavioral Research*, 9, 479-496.
- Hakstian, A. R. 1973 Procedures for the factor analytic treatment of measures obtained on different occasions. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 26, 219-239.
- 池田 央 1973 心理学研究法8 テストII 東京大学出版会
- Jackson, D. N. 1975 Multimethod factor analysis: A reformulation. *Multivariate Behavioral Research*, 10, 259-275.
- 小嶋 秀夫 1968 親の態度・行動の心理学的測定 社会教育研究(金沢大学), 9, 157-170.
- Kroonenberg, P. M., & DeLeeuw, J. 1980 Principal component analysis of three-mode data by means of alternating least square algorithms. *Psychometrika*, 45, 69-97.
- Morrison, D. F. 1967 *Multivariate Statistical Methods*. McGraw-Hill.
- 村上 隆 1979 因子変化の記述と準3相因子分析 名古屋大学教育学部紀要—教育心理学科—, 26, 1-16.
- Nunnally, J. C. 1978 *Psychometric Theory*. McGraw-Hill.
- Schmitt, N., Coyle, B. W., & Saari, B. B. 1977 A

review and critique of analyses of multitrait-multimethod matrices. *Multivariate Behavioral Research*, 12, 447-478.

Tucker, L. R. 1966 Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31, 279-311.

芝 祐順 1967 相関分析法 東京大学出版会

(1981年7月31日 受稿)

芝 祐順 1979 因子分析法(第2版) 東京大学出版会

AN ALGORITHM OF QUASI THREE-MODE FACTOR ANALYSIS BY THE LEAST SQUARES METHOD

Takashi MURAKAMI

SUMMARY

The quasi three-mode factor analysis is a method for the factor analytic treatment of 3-way data matrix which has elements x_{ijk} such that $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$. The indices i, j and k are used for subjects, variables and occasions (or methods), respectively. The model can be written as;

$$X_k \cong A_o G_k B_o'; \quad k = 1, \dots, p \quad (1)$$

where X_k 's are $N \times n$ data matrices for p occasions; A_o and B_o are $N \times Q$ factor scores matrix and $n \times q$ factor loading matrix, respectively, and they are common to each k ; G_k 's are $Q \times q$ core matrices which represent the factor change across p occasions. While $\hat{A}_k = A_o G_k$ can be considered to be a factor score matrix for k^{th} occasion with the factor loadings in B_o , $\hat{B}_k = B_o G_k'$ can be regarded as a loading matrix for k^{th} occasion with the factor scores in A_o . Therefore, the model may give a natural summarization of the results of ordinary factor analysis applied to 3-way data.

In this paper, a rationale of least squares algorithm for the model was formulated in the manner of the alternating least squares method and a practical computational procedure requiring only the multitrait-multimethod type correlation matrix is developed. This algorithm not only gave the least squares solution of quasi three-mode factor analysis in the strict sense, but also prompted the interpretations of the parameters. Regarding to B_o estimated by the algorithm, it is shown that the factor loading, the element of B_o , is the correlation of the raw score with the factor score for each occasion. That is, the following equation holds.

$$B_o = \frac{1}{pN} \sum_{k=1}^p X_k' \hat{A}_k \quad (2)$$

The elements of core matrices, on the other hand, are the covariances between the factor scores common to all occasions and those for each occasion, such that

$$G_k = \frac{1}{N} A_o' A_k; \quad k = 1, \dots, p \quad (3)$$

A slightly modified model in which the core matrix is transformed into the correlation matrix rather than the covariance matrix was discussed. The core matrix in this revised model can be regarded as a sort of higher order loading matrix, for its elements are the correlations of the factor scores for each occasion with the factor scores in common which might be, so to speak, the factor of factors.

Kelly and Fiske's multitrait-multimethod matrix including five personality traits (Assertive, Cheerful, Serious, Unshakable poise and Broad interests) rated by three methods was reanalyzed in this model. Two factors, which represent Assertive and Broad interests, and Cheerful and Unshakable poise, respectively, had highly invariant loadings and stable factor scores over all methods, therefore their convergent validity was considered to be high. However, factor scores of the remaining one factor representing Serious were unstable across the methods and the convergent validity of the traits might be suspicious.