別紙 4

報 告 番 号	※ 第 号

主 論 文 の 要 旨

論 文 題 目 Global existence of solutions of the Navier-Stokes equations with the Coriolis force
（コリオリ力の入った Navier-Stokes 方程式の大域解の存在）

氏 名 伊 藤 大 貴

論 文 内 容 の 要 旨

コリオリ力の入った空間 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + \Omega e_3 \times u + (u,\nabla)u + \nabla p = 0, & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{NS$_\Omega$}$$

について考察する．但し，$u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ は速度ベクトル場，$p = p(t,x)$ は圧力を表し，$\nu > 0$ を流体の粘性係数，$\Omega \in \mathbb{R}$ は単位ベクトル $e_3 = (0,0,1)$ 方向を軸とする回転の速度を表す．この問題の先行研究の結果は次の 2 つのタイプに大別される:

<u>タイプ I</u> ある Banach 空間に属する任意の初期値に対して，Ω が十分大きいならば，時間大域解が存在する．

<u>タイプ II</u> 初期値の Banach 空間におけるノルムが小さいならば，任意の Ω に対して，時間大域解が存在する．

タイプ I では，回転が速くなると流れが 2 次元的になり，大域解の存在が示しやすくなることを意味している．タイプ I の先行結果としては，Babin, Mahalov, Nicolaenko (1997) による周期境界条件の下での結果，Iwabuchi, Takada (2013) の斉次ソボレフ空間 $\dot{H}^s, \frac{1}{2} \le s < \frac{3}{4}$ での結果，さらに Koh, Lee, Takada (2014) による斉次ソボレフ空間 $\dot{H}^s$, $\frac{1}{2} < s < \frac{9}{10}$ での結果などが挙げられる．タイプ II の結果としては，減衰しない初期値に対する大域可解性についての Giga, Inui, Mahalov, Saal (2008) によるスケール不変な空間 $FM_0^{-1}(\mathbb{R}^3)$ での結果，ソボレフ空間 $H_\sigma^{\frac{1}{2}}$ での Hieber, Shibata (2010) による結果，フーリエ・ベゾフ空間 $\dot{\mathcal{B}}^{-1}_{1,1}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{\mathcal{B}}^0_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ における Konieczny, Yoneda (2011)，$\dot{\mathcal{B}}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ における Iwabuchi, Takada (2014) の結果が知られている．

本論文では，2011 年に Z. Lei, F. Lin (2011) が導入した空間 χ^{-1} を用いて，初めに以下の定理を証明する:

定理 1 (Theorem 2.3)**.** $u_0 \in \chi^{-1}$ を，$\operatorname{div} u_0 = 0$, $\|u_0\|_{\chi^{-1}} < (2\pi)^3\nu$ を満たすものとする．$T > 0$ に対し，

$$u \in L^1(0,T;\chi^1), \quad \partial_t u \in L^1(0,T;\chi^{-1})$$

を満たす (NS$_\Omega$) の解 $u \in C([0,T);\chi^{-1})$ が存在したとすると，u は以下を満たす:

$$\|u(t)\|_{\chi^{-1}} + (\nu - (2\pi)^{-3}\|u_0\|_{\chi^{-1}}) \int_0^t \|u(\tau)\|_{\chi^1}\, d\tau \le \|u_0\|_{\chi^{-1}}, \quad 0 \le t < T.$$

この評価は, Z. Lei, F. Lin が $\Omega = 0$ の場合に得たものと同じものであり, コリオリ力がある場合でも Ω に依らない先験的評価が得られた.

この定理を用いることで, (NS_Ω) の時間大域解が得られる:

定理 2 (Theorem 2.5). $s > 3/2$ とする. $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ を, $\operatorname{div} u_0 = 0, \|u_0\|_{\chi^{-1}} < (2\pi)^3\nu$ を満たすものとする. このとき, (NS_Ω) の時間大域解 $u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^3))$ で,

$$u \in AC([0,\infty); H^{s-1}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0,\infty; H^{s+1}(\mathbb{R}^3))$$

を満たすものがただ一つ存在する.

この定理は初期値に制限があるという点ではタイプ II におけるものとなっているが, 初期値のノルムの大きさが単に $(2\pi)^3\nu$ より小さいという仮定であり, タイプ II の結果のような小ささを仮定しているわけではないことが利点である. 大域解の存在を示す際には, 解のアプリオリ評価とともに, エネルギー評価を用いる.
次に, (NS_Ω) の任意の時間大域解 u の χ^{-1} ノルムは時刻無限遠方で減衰しているという漸近挙動の結果を得る:

定理 3 (Theorem 2.7). $s > 1/2$ とする. $u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^3))$ を, 以下を満たす (NS_Ω) の大域解とする:

$$u \in AC([0,\infty); H^{s-1}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^{s+1}(\mathbb{R}^3)).$$

このとき,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\chi^{-1}} = 0$$

が成り立つ.

この定理からさらに, 定理 2 で得られた時間大域解 u においても同様に χ^{-1} ノルムは無限遠方で減衰していることがわかる. 定理 3 は, $\Omega = 0$ の場合には, Benameur (2015) による結果に対応する. その場合の大域解 u についての仮定は $u \in C([0,\infty); \chi^{-1})$ のみであったが, それでは不十分な為, この定理では, 解の一意性のために必要な条件を課している.

次に, 初期値 u_0 が χ^{-1} に属する場合の結果を述べる:

定理 4 (Theorem 3.1). $u_0 \in \chi^{-1}$ を, $\|u_0\|_{\chi^{-1}} < (2\pi)^3\nu$ を満たすものとする. このとき, (NS_Ω) の時間大域解 $u \in C([0,\infty); \chi^{-1})$ で,

$$u \in L^2(0,\infty; \chi^0) \cap L^1(0,\infty; \chi^1), \quad \partial_t u \in L^1(0,\infty; \chi^{-1})$$

を満たすものがただ一つ存在する.

$s > 1/2$ ならば, $H^s(\mathbb{R}^3) \subset \chi^{-1}$ が成り立つことから, 定理 2 の $H^s(\mathbb{R}^3)$ より広い空間である χ^{-1} に属する初期値に対しての大域解の存在を述べている. ここでも初期値のノルムの大きさの制限をしている点ではタイプ II の結果といえるが, それほど小さい仮定をしているわけではないということが利点である. $\Omega = 0$ の場合には対応する結果を Z. Lei, F. Lin (2011), Zhang, Yin (2013) がそれぞれ別の手法で証明しているが, 証明では, Zhang, Yin の手法を利用し, (NS_Ω) の線型化問題の半群を用いて, 半群のフーリエ変換の評価が Ω に依らないことを利用して, 縮小写像の原理により局所解を構成し, 解のアプリオリ評価 (定理 1) を用いることで, 時間大域解を得る.