論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　甲　第　　号

氏　　　名　伊 藤　大 貴

論 文 題 目

Global existence of solutions of the Navier-Stokes equations with the Coriolis force
（コリオリ力の入ったNavier-Stokes 方程式の大域解の存在）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱 田　俊 明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
加 藤　淳

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.
大 平　徹

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
津 川　光 太 郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位申請論文は, 3 次元全空間 $\mathbb{R}^3$ において Coriolis の力を伴う Navier-Stokes 方程式の初期値問題の時間大域解について考察したものである. $\mathbb{R}^3_y$ の無限遠で回転運動 $\frac{\Omega}{2} e_3 \times y$ に近づく非圧縮粘性流の方程式系に変数変換 $y = \mathcal{O}_\Omega(t)x$ (ただし $\mathcal{O}_\Omega(t)$ はある直交行列, また従属変数も適当な変換) を施すと, 方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u - \nabla p - \Omega e_3 \times u, \qquad \mathrm{div}\ u = 0 \tag{1}$$

が導かれる. ここで, 未知関数 $u = u(x,t)$, $p = p(x,t)$ は流体の速度ベクトルと圧力, $\nu > 0$ は運動粘性係数 (定数), $\frac{\Omega}{2} e_3$ は上記の回転運動の角速度 ($\Omega \in \mathbb{R}$ は定数), $e_3 = (0,0,1)$ である. 1990 年代の後半に, Babin-Mahalov-Nocolaenko の一連の著作によって, $|\Omega|$ が大きいほど流れの様相が 2 次元流に近づき, 大きい初期関数に対しても初期値問題の滑らかな時間大域解が一意的に存在しうる傾向にあることが明らかにされた. Coriolis 項が解の長時間挙動におよぼす効果を定量的に取り出し, 一意な大域解を許す初期関数の大きさと $|\Omega|$ の大きさの関係を明示的に与えた Iwabuchi-Takada (2013) の仕事もある.

一方, $\Omega = 0$ の場合に, Lei-Lin (2011) は関数空間

$$\chi^{-1} = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3);\ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\widehat{f}(\xi)|}{|\xi|}\, d\xi < \infty \right\}$$

を非線型項 $u \cdot \nabla u = \mathrm{div}\ (u \otimes u)$ の発散型の構造を扱うのに適した空間の一つとして提示した. 実際, 彼らはソレノイダルな初期関数 $u_0 \in \chi^{-1}$ が $\|u_0\|_{\chi^{-1}} < (2\pi)^3 \nu$ をみたすならば, 初期値問題の大域解が一意に存在し, 評価

$$\|u(t)\|_{\chi^{-1}} + \Big((2\pi)^3 \nu - \|u_0\|_{\chi^{-1}} \Big) \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau \le \|u_0\|_{\chi^{-1}} \tag{2}$$

をみたすことを示した. この形の不等式は, L^2 におけるエネルギー不等式を想起させるものである. スケール変換 $\lambda u_0(\lambda x)$ により不変な関数空間の内で, 初期値問題の時間大域的な適切性を許す初期関数のクラスは χ^{-1} のほかにも種々あるが, 初期関数は ν と比べて非常に小さく絞らなくてはならず, 条件 $\|u_0\|_{\chi^{-1}} < (2\pi)^3 \nu$ のもとで大域解が一意に得られることは, 方程式の構造とこの空間の相性の良さを示唆している.

本論文の成果は, 上記の Lei-Lin の結果が Coriolis の力を伴う (1) に対しても成立することを明らかにしたものであると要約できる. Lei-Lin の議論の要点は Fourier 側でのエネルギー法に基づき, したがって歪対称な Coriolis 項は良くも悪くも寄与しないので, 結論は予想できるものであるが, 本論文では Lin たちの理論を $\Omega = 0$ のときも含めて以下のように整備した.

申請者はまず, 解の存在定理とは独立に, 評価 (2) が a priori に成り立つ解のクラスを明確にした. このような a priori 評価を Coriolis の力も許して

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

確立しておくと, 様々なタイプの局所解存在定理と組みあわせて解を延長できるので, 大域解の存在証明の方法の可能性をひろげたと言える. 実際, 申請者は 2 通りの証明を提示しており, いずれも Lei-Lin の議論とは異なる. 一つは Sobolev 空間 H^s を補助的に使う方法, いま一つは Hieber-Shibata (2010) による線型化作用素の生成する半群の表示を使う方法である. 特に後者について, この半群の Fourier 変換の Ω に依らない各点評価を用いる着想は申請者による. また, 申請者は $t \to \infty$ で χ^{-1} 減衰する (1) の初期値問題の大域解のクラスを与えた. この定理は, $\Omega = 0$ であるときの先行研究 (Benameur, 2015) の議論の不備を Sobolev 空間 H^s の補助的な使用によって解決したものである.

冒頭で述べた Coriolis 項による効果を積極的に捉える結果となっていない点は課題として残るが, 一般に, エネルギー法とスペクトル解析が技術的にかみあわない状況はしばしば起こることである. Lei-Lin による空間 χ^{-1} での理論を Coriolis の力を伴う場合へ射程をひろげたこと自体が, 今後の研究へ向けての第一歩として評価されるべきであり, さらなる展開が期待される. Hieber-Shibata の半群を用いる方法は副論文 (指導教員との共著論文) に含まれず, 申請者が独自に主論文において初めて提示したものである. また, 主論文の一部分は副論文の内容であるが, 共同研究の部分についても申請者は中心的な役割を果たし, 得られた成果は当分野の発展に寄与するものである. 本論文に関する公開審査会を 2016 年 2 月 2 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した.

以上により, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.