学位報告4

別紙4

報告番	※ 第
−	−

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Scattering and well-posedness for the Zakharov system and the Klein-Gordon-Zakharov system in four and more spatial dimensions
(空間次元 4 以上の Zakharov 方程式と Klein-Gordon-Zakharov 方程式の解の散乱及び適切性)

氏　　名　加藤　勲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では空間次元 4 以上の Zakharov 方程式及び Klein-Gordon-Zakharov 方程式の初期値問題の適切性及び解の散乱について考察する. Zakharov 方程式や Klein-Gordon-Zakharov 方程式は異なる型の方程式の連立系であり, 単独の非線型方程式の場合とは異なる種類の相互作用の解析が必要となるため, それらの方程式に対する適切性問題は興味深い. 初期値は Sobolev 空間 H^s の元とし, より小さな指数 s に対して適切性を証明することが本論文の目的である. 一般に尺度変換不変則の議論によって決定される尺度臨界指数での適切性を考察することの意義は, 解の散乱や小さな初期値に対する時間大域的適切性を導くことができることである. ゆえに本論文では主として尺度臨界指数での適切性について考察する.

まず Klein-Gordon-Zakharov 方程式について述べる. この方程式はプラズマにおける Langmuir 波とイオン音波の相互作用を記述するものであり, 次で表される.

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + 1 - \Delta)u = -nu, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ (\partial_t^2 - c^2\Delta)n = \Delta|u|^2, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ (u, \partial_t u, n, \partial_t n)|_{t=0} = (u_0, u_1, n_0, n_1) & \\ \qquad \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d). & \end{cases} \tag{1}$$

ただし, 定数 c は $c > 0$ かつ $c \neq 1$ を満たし, 次元は $d \geq 4$ とし, 未知関数 u, n は実数値関数とする. ここで $u_\pm := \omega_1 u \pm i\partial_t u, n_\pm := n \pm i(c\omega)^{-1}\partial_t n, \omega_1 := (1-\Delta)^{1/2}, \omega := (-\Delta)^{1/2}$ と変換すれば, (1) は次と同値である.

$$\begin{cases} (i\partial_t \mp \omega_1)u_\pm = \pm(1/4)(n_+ + n_-)(\omega_1^{-1}u_+ + \omega_1^{-1}u_-), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ (i\partial_t \mp c\omega)n_\pm = \pm(4c)^{-1}\omega|\omega_1^{-1}u_+ + \omega_1^{-1}u_-|^2, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ (u_\pm, n_\pm)|_{t=0} = (u_{\pm 0}, n_{\pm 0}) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d). & \end{cases} \tag{2}$$

次元 $d = 3$ では Ozawa-Tsutaya-Tsutsumi によりエネルギー空間すなわち $L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ における適切性が知られている. また, Guo-Nakanishi-Wang により, 同じく 3 次元で初期値が球対称かつ小さい場合にエネルギー空間における解の散乱が得られている. これらはともに劣臨界指数における結果である. そして次元 $d \geq 4$ の場合には適切性及び解の散乱に関する結果は知られていない. 本論文では $d \geq 4$ の場合の (2) を考察し, 以下の主結果を得た.

定理 1. *(i)* $d = 4$ とする. このとき (2) は $H^{1/4}(\mathbb{R}^4) \times \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R}^4)$ において時間局所適切である.
(ii) $d \geq 5, s = (d^2 - 3d - 2)/2(d+1)$ とする. このとき (2) は $H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ において時間局所適切である.
(iii) $d \geq 4, s = d/2 - 2$ とし, 初期値は球対称であると仮定する. このとき (2) は $H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ において小さな初期値に対して時間大域的適切かつ解は $H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ において散乱する.

定理 1 の証明は, 方程式を積分方程式に直し, 縮小写像の原理を用いて証明される. その際の鍵となるのが非線型項の評価, すなわち双線型評価を導くことである. まず初期値が球対称の場合について述べる. (2) の臨界指数は $s_c = d/2 - 2$ である. 臨界空間で双線型評価を示すときの困難な点は以下である. 目的の評価式を得るためには, (2) の非線型項の ω_1^{-1} の可微分性を有効に利用する必要があるが, それを十分に活用できない場合が存在し, そのとき臨界空間で双線型評価を導くことは困難である. Bourgain の Fourier 制限ノルム法は可微分性を得することのできる強力な手法として知られている. Fourier 制限ノルムは通常, $\varepsilon > 0$ を十分小さい実数として時間変数について $H^{1/2+\varepsilon}$ を用いて定義される. 双線型評価に双対性の議論を用いるため, この空間の双対空間 $H^{-1/2-\varepsilon}$ での評価も必要となる. しかし $H^{-1/2-\varepsilon}$ では ε だけ正則性が不足してしまうため, 臨界空間で双線型評価式を示すことは難しい. そこで本論文では上記の Fourier 制限ノルムを持つ Bourgain 空間を精密化した U^2, V^2 型空間を用いる. この空間は Koch-Tataru により導入されたものであり, 尺度臨界空間での適切性問題に対して特に有効である. 正定数 $c \neq 1$ があるため, (2) の第一式と第二式で波の伝播速度が異なる. これを利用すれば以下の不等式を示すことができ, 可微分性を得することができる. もし $|\xi| \gg \langle \xi' \rangle$ ならば

$$M' := \max\{\big|\tau \pm c|\xi|\big|, |\tau' \pm \langle \xi' \rangle|, |\tau - \tau' \pm \langle \xi - \xi' \rangle|\} \gtrsim |\xi|. \tag{3}$$

ここで ξ, ξ' はそれぞれ波動方程式, Klein-Gordon 方程式の振動数, $\big|\tau \pm c|\xi|\big|, |\tau' \pm \langle \xi' \rangle|, |\tau - \tau' \pm \langle \xi - \xi' \rangle|$ はそれぞれ波動方程式, Klein-Gordon 方程式の線型部分の表象である. また Guo-Wang により球対称 Strichartz 評価は通常の Strichartz 評価よりも広い範囲の許容指数の対について成立することが知られている. そこでこの球対称 Strichartz 評価と U^2, V^2 型空間を組み合わせることで, 臨界空間での小さな初期値に対する時間大域的適切性及び解の散乱を得ることができる.

次に初期値が非球対称の場合について考える. 4 次元以下では Lorentz 変換不変則による制約を強く受けるため, 臨界指数で適切性を得ることは難しい. このため 4 次元ではこの変換則によって定まる Lorentz 指数 $s_l = 1/4$ での適切性を考える. 初期値が球対称のときと同様に, U^2, V^2 型空間を適用し, 定理 1 (i) が得られる. 5 次元以上では, 臨界指数が Lorentz 指数よりも大きくなり, 上記の Lorentz 変換不変則による問題は起こらないため臨界指数での適切性が期待される. しかし以下で説明する通り, 臨界空間では非線型項の相互作用の一部分に対し, 双線型評価を示すことが困難である. (2) の第一式の非線型項は $n_\pm(\omega_1^{-1} u_\pm)$ とみなせる. $n_\pm, u_\pm$ の振動数をそれぞれ ξ, ξ' としたとき, $|\xi| \lesssim |\xi'|$ と $|\xi| \gg |\xi'|$ の場合に分けて考える. $|\xi| \lesssim |\xi'|$ の場合は, ω_1^{-1} によって可微分性を得する効果が強い. よって, Strichartz 評価を適用するだけで臨界空間で双線型評価を示すことができる. 一方, $|\xi| \gg |\xi'|$ の場合には, (3) を適用し, 可微分性を得する必要がある. (3) において, 次の三通りが考えられる. $(a)\, M' = \big|\tau \pm c|\xi|\big|, (b)\, M' = |\tau' \pm \langle \xi' \rangle|, (c)\, M' = |\tau - \tau' \pm \langle \xi - \xi' \rangle|$. (a) の場合には $n_\pm$ に (3) を適用し, $\omega_1^{-1} u_\pm$ に Strichartz 評価を適用すると臨界空間での双線型評価を示すことができる. (c) についても双対性の議論を用いれば (a) と同様の結果が得られる. 一方 (b) では $n_\pm$ に Strichartz 評価を適用し, $\omega_1^{-1} u_\pm$ に (3) を適用する. この場合には, Strichartz 評価の許容指数の範囲に対する制限が強いため, Sobolev の埋め込みを用いて ω_1^{-1} を十分に活用することができず, 臨界空間で双線型評価を示すことは難しい. このため初期値の正則性の仮定を強くする必要があり, $s = (d^2 - 3d - 2)/2(d+1) = s_c + 1/(d+1)$ に対して定理 1 (ii) を示した.

次に Zakharov 方程式について述べる. Zakharov 方程式はプラズマ物理における Langmuir 乱流を記述する方程式であり, 以下で表される.

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)u = nu, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ (\partial_t^2 - \Delta)n = \Delta |u|^2, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ (u, n, \partial_t n)|_{t=0} = (u_0, n_0, n_1) \in H^k(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^l(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{l-1}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{4}$$

未知関数 u, n はそれぞれ複素数値関数, 実数値関数とする. (4) は Schrödinger 方程式と波動方程式という, 異なる尺度を持つ方程式の連立系のため, 尺度臨界指数は存在しない. しかし Ginibre-Tsutsumi-Velo は尺度臨界指数に相当する臨界指数を求めており, その値は $(k, l) = \big((d-3)/2, (d-4)/2\big)$ である. 彼らにより劣臨界空間での時間局所適切性が示されたが, 臨界空間では示されていなかったため, 本論文では臨界空間の場合を考察し, 以下の主結果を得た.

定理 2. $d \geq 4, (k, l) = \big((d-3)/2, (d-4)/2\big)$ とする. このとき (4) は $H^k(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^l(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{l-1}(\mathbb{R}^d)$ において小さな初期値に対して時間大域的適切かつ解は $H^k(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^l(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{l-1}(\mathbb{R}^d)$ において散乱する.

Ginibre-Tsutsumi-Velo は Fourier 制限ノルム法を適用し, 劣臨界での結果を得た. しかし臨界空間では Bourgain 空間を用いることで時間変数についての正則性が不足するので, 本論文では定理 1 と同様に, U^2, V^2 型空間を用いる. ただし, Zakharov 方程式のような尺度の異なる方程式の連立系の臨界空間における適切性には, Strichartz の端点評価に関連する時空 Lebesgue 空間を用いる必要がある. そのため解空間として U^2, V^2 型を用いるだけでは適切性を示すことができない. そこで Schrödinger 方程式の解空間として U^2 型より広く V^2 型よりも狭い空間, すなわち V^2 と上記時空 Lebesgue 空間の共通部分を用いる. これにより臨界空間での適切性と解の散乱についての結果が得られる. 定理 2 は名古屋大学の津川光太郎准教授との共同研究である.

本論文の第一章では Klein-Gordon-Zakharov 方程式と Zakharov 方程式に対する既知の結果や記号, 関数空間などを簡単に説明し, 第二章では Klein-Gordon-Zakharov 方程式の結果や証明について詳しく述べ, 第三章では Zakharov 方程式の結果や証明について詳しく述べる.