

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	甲	第	号
------	---	---	---	---

氏 名 加 藤 勲

論 文 題 目

Scattering and well-posedness for the Zakharov system and the Klein-Gordon-Zakharov system in four and more spatial dimensions

(空間次元4以上のZakharov方程式とKlein-Gordon-Zakharov方程式の解の散乱及び適切性)

論文審査担当者

主 査	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士(理学)
	杉 本 充
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(数理科学)
	津 川 光 太 郎
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士(理学)
	永 尾 太 郎
委 員	名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(理学)
	加 藤 淳

論文審査の結果の要旨

シュレディンガー方程式を典型例とする分散型方程式に対する非線形初期値問題に関する研究は、いくつもの新しい手法の開発とともにこの30年の間に飛躍的な進展をとげており、それらの手法が適用される方程式の範囲を広げつつ精力的な研究が世界的に行われている。特に初期値の空間として Sobolev 空間 H^s を取るときに、できるだけ小さい正則性の指数 s に関してその適切性（すなわち解の存在・一意性・初期値への連続依存性）を導く問題において、1993年に Bourgain が「Fourier 制限ノルム法」と呼ばれる方法を開発したことにより、この s に対する制約が様々な状況において大幅に改良されることとなった。ここで導入された関数空間は方程式の主要部の形に付随して定義されるものであり、今日では Bourgain 空間とよばれこの種の問題における標準的な道具のひとつとして認知されている。

一方、非線形方程式においては相似変換によっても解であるという性質が保たれる事が多く、しばしば、この相似変換に関してノルムが不変である Sobolev 空間においても適切性が成立するはずであるという考えのもとに研究が進められている。このときの Sobolev 指数 $s = s_c$ はスケール臨界指数と呼ばれており、分散型方程式の場合においても実際にこの指数での適切性を示すことが当面の目標とされているが、様々な状況において Bourgain の方法だけでそれを示すことは困難であり、 s_c よりも大きい指数 s (劣臨界)における適切性さえも与えられていない場合も多い。そのような状況のひとつとして、型の異なる方程式による連立系の場合があげられる。Bourgain 空間は方程式の形から定まるものであるため、それを用いた解析にはさまざまな不整合が生じてしまう。

加藤勲氏の学位論文はこのような状況を背景としたものであり、Hadac-Herr-Koch (2009) らにより考案された、Bourgain 空間とその双対空間との包含関係をさらに精密化した U^2, V^2 型 Fourier 制限ノルム法を用いる議論を援用することにより、型の異なる方程式による連立系の典型例である Zakharov 方程式および Klein-Gordon-Zakharov 方程式に対するスケール臨界指数、あるいはそれに近い劣臨界指数の Sobolev 空間での適切性および解の散乱を論じている。その主たる成果は、以下のとおりである：

第1の成果として、Klein-Gordon-Zakharov 方程式の初期値問題の適切性と解の散乱に関する結果を与えている。この問題に関しては、これまでは空間次元が3でエネルギー空間（したがって劣臨界指数の Sobolev 空間）の場合においてのみ考察されており、Ozawa-Tsutaya-Tsutsumi (1999) により小さい初期値に関する時間大域適切性が、Guo-Nakanishi-Wang (2014) により球対称な初期値に対する解の散乱がそれぞれ与えられていた。これに対して加藤勲氏は、空間次元が4以上の場合でスケール臨界指数の Sobolev 空間の場合であっても、初期値が球対称であるならば、球対称 Strichartz 評価と U^2, V^2 型 Fourier 制限ノルム法を組み合わせることで同じ結果が成立することを示している。また、初期値が球対称でない場合に対しても、劣臨界指数の Sobolev 空間における時間局所適切性を示している。

第2の成果として、Zakharov 方程式の初期値問題の適切性と解の散乱に関する結果を与えている。この問題に関しては、Ginibre-Tsutsumi-Velo (1997) が Bourgain 空間を用いることにより劣臨界指数の Sobolev 空間における時間局所適切性を示していたが、加藤勲氏はさらに U^2, V^2 型 Fourier 制限ノルム法を用いることにより、スケール臨界指数の Sobolev 空間においても、小さい初期値に関する時間大域適切性と解が散乱することを示している。Zakharov 方程式のスケール臨界指数の Sobolev 空間における解析の難しさは、この方程式がスケールの異なる方程式の連立系となっている点であり、そのため、Strichartz の端点評価に関連する時空 Lebesgue 空間を用い

論文審査の結果の要旨

る必要が生じる。それにより解空間として U^2 , V^2 型を用いるだけでは適切性を示すことができず、何らかの回避手段が必要となる。ここでは、これらの空間と Lebesgue 空間の共通部分を用いる方法を用いて結果を得ているが、この部分がもっとも深い洞察を要する点となっている。

このように、加藤勲氏の研究成果は偏微分方程式論における困難な課題に対する精密な解析および新しい知見を与えたものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。また、以上の成果は副論文において公表済みであり、このうち第2の成果は共著論文となつてはいるが、加藤勲氏の貢献はその論文としての成否に関わる重要な部分を含む、主要な箇所全てにわたっている。また、審査委員会は2016年2月10日に公開による学位審査セミナーを行ったが、その場において申請者はそれぞれの問題の背景や意義や証明の基本的なアイデアについての明快な説明を行ない、さらには質疑に対しても的確に応答するなど、この分野における申請者の十分な学識が確認された。

以上により、本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。