別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　On modulation spaces and their applications to dispersive equations
（モジュレーション空間と分散型方程式への応用について）

氏　　名　加　藤　睦　也

論　文　内　容　の　要　旨

本論文ではモジュレーション空間の基礎的な構造の決定と非線形分散型方程式への応用について考える。モジュレーション空間は 1983 年に Feichtinger によって時間周波数解析の観点から導入された関数空間である。音声などの周波数は時間と共にその性質が変化していく。周波数を解析する際に一般的に用いられるフーリエ変換では周波数の構造を詳しく教えてくれる。その一方で、周波数の性質や構造が時間の経過によってどのように変わっていくか、などの時間と周波数との関係性までは教えてくれない。そこで、それらの関係を決定するために導入されたのが短時間フーリエ変換である。短時間フーリエ変換は、ある時刻付近で値が 1 の窓関数を対象の周波数に作用させることで、その時刻における周波数の解析を可能としている。Feichtinger はこの短時間フーリエ変換の各変数をルベーグノルムで測ることでモジュレーション空間、およびそのノルムを構成した。しかし、モジュレーション空間は Feichtinger による導入後から約 20 年間、あまり活発には研究されていなかった。しかし、Wang-Hudzik(2007) による冪型非線形項を持つシュレディンガー方程式への応用、同時期の Benyi et al.(2007) によるフーリエ積分作用素への応用を口火にモジュレーション空間の研究は急速に発展していく。本論文では、Wang-Hudzik らの研究を原点にしてモジュレーション空間の非線形分散型方程式への応用、特に可解性について考えている。

本論文は六章に分けられ構成されている。第一章ではモジュレーション空間の背景やその特筆すべき先行研究を述べた後、いくつかの本論文における主結果を提示する。

第二章では、本論文を通して用いられる記号の説明や、モジュレーション空間を含むいくつかの関数空間の定義やそれらの基本的な性質について述べている。

第三章以降では申請者が実際に得た結果について各背景と共に詳しく紹介していく。さて、可解性を証明するためには Kato(1983) による固定点定理を元とした手法を用いるが、その際の重要な道具の一つとして線形解に対する時間減衰評価式が挙げられる。第三章ではその評価式をモジュレーション空間の枠組みで構成することで、線形解の相関数が従来のものよりも広いクラスに属していても不具合無しに構成できることを述べている。ここでの「不具合」とは評価式の行き先で可微分性が増大しないことを言う。もし可微分性が増加した場合、その評価式のもとで固定点定理がうまく働くかわからず、可解性を証明できるかどうかわからない。例えば、線形解の相関数として $|\xi|^2+\cos(|\xi|)$ を考えてみる。この相関数に対応する方程式は、周波数成分が振動しているような摂動が働いているシュレディンガー方程式とみなせる。さて、この相関数に対して実際に時間減衰評価式を構成しようとするとモジュレーション空間の枠組みでは可微分性に変化はない（第 3.1 章または Remark3.7）。

その一方で、通常の手法に則ってベゾフ空間の枠組みでこの評価式を考えると、構成することはできるものの可微分性が増大してしまう。そのため、ベゾフ空間上では不具合の無い時間減衰評価式が構成できるかはわからない。本章では先で構成した時間減衰評価式を元に時間大域解の適切性についても述べている。

第四章の前半では Wang-Hudzik(2007) によって構築されたモジュレーション空間の特性を用いることで新しいクラスに属する時間大域解の存在性を示している。通常、分散型方程式に対する時間減衰評価式は $t=0$ で発散するような時間減衰項を持つ。しかし彼らはモジュレーション空間の枠組みで評価式を構成することで減衰項が $t=0$ において発散しないように改良した。本章ではこの性質に着目して大域解を構成する。冪型非線形項をもつ分散型方程式の可解性を固定点定理によって述べる際、（基本的には）ストリッカーツ評価式を用いる手法と時間減衰評価式のみを用いる手法のふたつがあるが、本章では主に後者の手法を用いる。Cazenave-Weissler(1998) や Wang-Hudzik（2007）はこの手法から可解性を述べる際に、解空間もしくは初期値に時間の重みをつけることで解の挙動を制御し、可解性を証明している。本章では彼らとは異なり、改良された評価式のもつ時間減衰項の可積分性によって解を制御し、可解性を証明している。

また、第四章の後半では線形解の相関数が特に球対称性をもつ多項式の場合にこれまでの既存の結果よりも良い時間減衰を持つ時間減衰評価式を構成している。既存の結果ではすべて（申請者の知る限りでは）相関数の最大次数、また最小次数にのみ依存して時間減衰率は決定されていた。しかし申請者は、多項式のもつ停留点と変曲点に着目し、注意深く振動項を分解することでより良い時間減衰評価式を構成した。ここで停留点もしくは変曲点とは相関数 ϕ に対して $\phi'=0$ もしくは $\phi''=0$ となる点のことである。

第三、四章の主張は特に冪型非線形項を持つ方程式に対するものであるが、第五章では非線形項に微分作用をもつ二次元一般化 Zakharov–Kuznetsov 方程式について考える。微分型非線形項を持つ方程式の可解性を示すために必要な道具は（基本的に）ストリッカーツ評価式、（Kato type の）平滑化効果の評価式、最大値関数の評価式の三つである。このうち、ストリッカーツ評価式と平滑化効果の評価式はすでに Linares-Pastor(2009) と Ribaud-Vento(2012) によってそれぞれ最適な評価式が得られている。しかし、最大値関数の評価式においては Linares-Pastor(2009) による時間局所的なもののみであった。そのため、この方程式に対する時間大域的な可解性の先行研究は極めて少ない。しかし、本章ではモジュレーション空間を用いて周波数空間を細かく分割することで時間大域的な最大値関数の評価式を構成できることを示し、さらにその評価式を用いて時間大域解の可解性についても言及している。

また、本論文では偏微分方程式論への応用だけでなく、関数空間自体の基礎的な構造についても述べている。1992 年に Gröbner によって α–モジュレーション空間と呼ばれる前述のモジュレーション空間をさらに一般化したような関数空間が導入された。ここでの指数 α は $\alpha\in[0,1]$ を満たすものであり、周波数空間をどのように分割するかを決定する指数である。特に $\alpha=0,1$ の場合にはモジュレーション空間、ベゾフ空間とそれぞれ一致する。α–モジュレーション空間もまた他分野に応用されており、例えば Kobayashi–Sugimoto–Tomita(2009) は α–モジュレーション空間に属する表象をもつ擬微分作用素の L^2–有界性を証明した。同様の結果はベゾフ空間に対しては Sugimoto(1988) が、モジュレーション空間に対しては Sjöstrand(1994) によって得られていた。彼らの結果は $\alpha=0,1$ の場合にはそれぞれの結果と一致し、さらに、各関数空間同士の最適な包含関係から第三の関数空間としてのものであることがわかっている。本論文の第六章ではその α–モジュレーション空間と L^p–ソボレフ空間、および局所ハーディー空間との最適な包含関係を決定している。