

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	甲	第	号
------	---	---	---	---

氏 名 加 藤 睦 也

論 文 題 目

On modulation spaces and their applications to dispersive equations

(モジュレーション空間と分散型方程式への応用について)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
吉 田 伸 生

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
杉 本 充

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
寺 澤 祐 高

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
南 和 彦

論文審査の結果の要旨

Modulation 空間とは、Feichtinger らにより比較的最近導入された関数空間の一種である。偏微分方程式論における基本空間として通常よく用いられる Sobolev 空間や Besov 空間 $B^{p,q}$ などとは異なり、信号処理理論における時間周波数解析あるいは量子力学の考え方とも共通する、変数とそのフーリエ変数を同時に扱うという特徴を持っており、相空間解析との親和性も高い関数空間である。この modulation 空間に関しては、最近になって次々とその基本的性質が解明されてきている。例えば、Sobolev 空間や Besov 空間との包含関係については Sugimoto-Tomita, Kobayashi-Sugimoto などにより完全に決定されている。また、Schrödinger 方程式や波動方程式の初期値問題の解作用素は L^p 上で有界ではないが modulation 空間上では有界となることが Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers により示されている。これは modulation 空間のもつ顕著な利点であり、この新しい関数空間の重要性が強く認識されるきっかけとなった成果のひとつである。また、偏微分方程式論への応用の観点からの進展も顕著である。実際 Wang らによる一連の研究をきっかけとして、modulation 空間の特質を生かした非線形偏微分方程式の研究も盛んに行われている。

加藤睦也氏の学位論文はこのような状況を背景としたものであり、modulation 空間論の有用性を示す基本的かつ重要な貢献として位置づけられるものである。その主たる成果は、以下のとおりである：

第1の成果として、Wang-Hudzik により示されていた非線形シュレディンガー方程式の初期値問題における modulation 空間での適切性の結果を、より一般の分散型方程式の場合にまで拡張した。Wang-Hudzik によれば、基本解の $L^p - L^{p'}$ -時間減衰評価を modulation 型に変更することにより初期時刻での特異性を除くことができ、それ故通常より適用範囲の広い Strichartz 評価式を導出できるなど、この利点を生かした非線形解析を行うことが可能となる。特に、Cazenave-Weissler などの先行研究と比較して、初期値の滑らかさの指数や非線形性に対する仮定を大幅に改良できることが示されるが、加藤氏はこれら一連の議論を一般の分散型方程式に対してまで範囲を広げて展開している。その最も重要かつ非自明な部分は、一般の分散型方程式の基本解に対する modulation 空間における時間減衰評価の部分であるが、これに関しては Guo-Peng-Wang による Besov 空間における先行研究が存在している。しかし、modulation 空間で考えることにより Besov 空間では取り込むことができない振動型の摂動を持った方程式も扱うことができることを指摘した点は、modulation 空間の有用性に関する新しい知見である。

第2の成果として、非線形分散型方程式の一つである Zakharov-Kuznetsov 方程式に対して、小さい初期値に関する時間大域的適切性を示した。これに関しては、ごく最近 Grünrock が十分に小さい正則性の次数（いわゆるスケール臨界）をもつ Sobolev 空間の範疇で独立に論じているが、加藤睦也氏は modulation 空間を用いることにより、その次数よりもかなり小さい（正則性が悪くてもよい）ところで適切性を示している。その際に用いられる基本解に対する最大関数評価は、これまでは Sobolev 空

論文審査の結果の要旨

間における時間局所的な評価しか知られていなかったが、加藤睦也氏の主要な貢献は modulation 空間の範疇では時間大域的な評価が与えられる事を示したことであり、このことが時間大域的な適切性の証明の重要な鍵となっている。

第3の成果として、 α -modulation 空間と Sobolev 空間との包含関係を決定した。 α -modulation 空間 ($0 \leq \alpha \leq 1$) とは、Gröbner により導入された関数空間で、modulation 空間 ($\alpha = 0$) と Besov 空間 ($\alpha = 1$) とを結びつける役割を持っている。Besov 空間と Sobolev 空間との包含関係は古くから知られており、modulation 空間と Sobolev 空間との間の包含関係についても Kobayashi-Sugimoto により完全に決定されていたが、加藤睦也氏によって $0 < \alpha < 1$ における包含関係が初めて決定された。

このように、加藤睦也氏の学位論文は関数空間論およびその偏微分方程式論への応用に対する新しい知見を与えたものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。第1の成果は副論文として J. Math. Anal. Appl. 誌および Adv. Differential Equations 誌において掲載（が決定）されており、第2、第3の成果も、査読者からの指摘に従って改訂中の状況である。

審査委員会は、2016年2月4日に学位審査公開セミナーを行った。この場において申請者はそれぞれの問題の背景や意義、また証明の基本的なアイデアについて明快な説明を行ない、この分野における申請者の十分な学識が確認された。従って審査委員会は、申請者が博士（数理学）の学位が授与される資格を有すると判断する。