

3相データにおける因子変化の記述のための諸方法 (I)

— 因子分析型のモデル —

村上 隆

本研究は、いわゆる3相データ (three-mode data) における因子変化 (factor change) の探索的レベルでの記述を与えるための諸方法がある枠組に添って概観するとともに若干の新しい方法を提案することを目的とする。

ここで言う3相データとは、図1のような形をとるものである。すなわち、 N 人の被験者の、 n 個の変数に関する、 p 回の機会における測定値の集合である。この際 N 人の被験者と n 個の変数は、 p 回の機会を通じて共通であることが前提である。これを3元 (three-way) のデータと呼んでもよいが、各元がそれぞれ別の内容 (ここでは、被験者、変数、機会) を指している場合には、3相データと呼ぶのが普通である。(modeとwayの使いわけについてはCarroll & Arabie, 1980参照)。

3相データの例としては、いわゆる縦断的データや、多特性-多方法行列 (multitrait-multimethod matrix, Campbell & Fiske, 1959) のもとになるデータ、セマンティック・ディファレンシャル法によるデータ等がただちに思いつかれる。しかし、本研究では扱いの対象となる3相データをもう少し狭い範囲のものに限定する。

同じ被験者と変数からなる測定を複数回反復するのはそこに、何らかの変化が生じることを想定し、その変化 (あるいは不変性) を (統計的に) 記述するためであろう。そのような変化として通常まず第一にとりあげられるのは、各変数の平均値の変化である。しかし、本研究でとりあげる諸方法では、この平均値の変化は関心の対象とはなっていない。(ただし、平均差を分析終了後に

		機 会												
		1				2				p				
		変 数				変 数				変 数				
		1	2	3	...	n	1	2	3	...	n	1	2	3
被 験 者	1													
	2													
	3													
	⋮													
	N													

図1 3相データ

復元することが可能な場合もある。Evans, 1968) 従って, “概念” の (平均的) 位置が重要であるようなセマンティック・ディファレンシャル法のデータに適用される方法としては不都合なものが多いと思われる。

また, 変数の分散の変化も (一部を除き) 関心の対象ではない。記述の対象となるのは, 変数間の関連性, すなわち変数間の相関構造の変化と, 因子, または合成変量上における被験者の “相対的” 位置の変化とである。結局それは, 因子分析における因子負荷の変化と因子得点の変化ということになる。この両方の変化を含めて因子変化 (Bentler, 1973) と呼ぶ。

本研究は 2 編に分けられる。本稿 (I) では狭い意味での因子分析モデルを扱い, (II) では主成分分析, 正準相関分析に関連するモデルをとりあげる。モデルを具体的に扱うのは 5 節においてであるが, その前に幾つかの前提となる事柄について論じておく必要がある。

1. 因子モデル

本研究 (I), (II) を通じて我々は, 因子分析という用語をかなり広い意味で用いる。すなわち, 共通性の推定を含む狭い意味での因子モデル以外に, 前述のように, 主成分分析, 更に正準相関分析さえも含むことがある。(因子分析と主成分分析の区別は 4 節で明確にする。)

ここで言う因子モデルとは, だいたい次のような内容のことを指す。すなわち, $z_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n$, を, i 番目の被験者の j 番目の変数上での測定値, $f_{il}, i = 1, \dots, N, l = 1, \dots, q$, を i 番目の被験者の l 番目の因子上での因子得点, $a_{jl}, j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, q$ を j 番目の変数の l 番目の因子への因子負荷とするとき z_{ij} を

$$z_{ij} \cong \sum_{l=1}^q f_{il} a_{jl} \quad (1.1)$$

の形に分解することである。記号 \cong は, 今のところ漠然と近似する, という意味をあらわすものとする。また, 以後 $N > n > q$ という不等式が (それぞれかなりの差をもって), 成立しているものとする。

\mathbf{Z} を, z_{ij} を要素とする $N \times n$ のデータ行列, \mathbf{F} を f_{il} を要素とする $N \times q$ の因子得点行列, \mathbf{A} を a_{jl} を要素とする $n \times q$ の因子負荷行列とすると, (1.1) はこれらを用いて,

$$\mathbf{Z} \cong \mathbf{F}\mathbf{A}^T \quad (1.2)$$

とかくことができる。(\mathbf{A}^T は \mathbf{A} の転置をあらわす。以下同様。)

この際, データ行列 \mathbf{Z} の各列 (変数) は, それぞれ平均値が 0, 分散が 1 となるよう標準化されているものと

する。そこで, 次で定義される行列 \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \quad (1.3)$$

は, 変数間の相関係数

$$r_{jj'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{ij} z_{ij'} \quad (1.4)$$

を要素とする相関行列となる。また, 因子得点行列 \mathbf{F} の各列も, 平均値 0, 分散 1 であり, かつ相互に無相関とする。すなわち, \mathbf{I} を ($q \times q$ の) 単位行列とすると,

$$\frac{1}{N} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (1.5)$$

が成立するものとする。この性質を仮定した因子モデルは, 直交モデルと呼ばれ, 因子間に相関があることを許容する斜交モデルと対比される。本研究では, (何らかの意味で) 直交する因子得点を想定したモデルのみをとりあげる。

(1.3) の右辺に, (1.2) の左辺を代入し, (1.5) を用いると,

$$\mathbf{R} \cong \mathbf{A}\mathbf{A}^T \quad (1.6)$$

が導かれる。これは因子分析の基本公式と呼ばれるものである。また, (1.2) の左から $(1/N)\mathbf{F}^T$ をかけ, 再び (1.5) を用いてそれを転置することにより,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{N} \mathbf{Z}^T \mathbf{F} \quad (1.7)$$

が導ける。(これは, 後にみるような条件の下で等式として成立する。)(1.7) は, 因子負荷が, データと因子得点との相関係数であることを意味するものであり, 因子分析の解釈に際して重要な意義がある。

(1.2) 及び (1.6) は, とともに左辺のデータを, 右辺の構造モデルによって近似する, という形をとっている。(1.2) は, 各被験者の n 個の変数上の得点を, 直接的には観測不能なより少数の因子上の得点の一次結合の形に要約しようとするものであり, (1.6) は, n 個の変数間の相関係数を, 変数と因子の間の相関係数である因子負荷に縮減して, 変数間の関係を見通しやすくするねらいをもっている。

因子分析のモデルには, (直交モデルの場合) 直交回転に関する不定性 (indeterminacy) があることには注意する必要がある。 \mathbf{T} を

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{T}^T \quad (1.8)$$

を満足する $q \times q$ の正規直交行列とする。

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{T} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{T} \quad (1.10)$$

は、それぞれもとの因子負荷 \mathbf{A} と因子得点 \mathbf{F} の座標軸を \mathbf{T} によって回転したものである。このとき、(1.8) から、

$$\mathbf{GB}^T = \mathbf{FA}^T \quad (1.11)$$

$$\mathbf{BB}^T = \mathbf{AA}^T \quad (1.12)$$

となり、(1.2) と (1.6) の構造モデルのデータに対する近似の程度は、 \mathbf{A} を \mathbf{B} に、 \mathbf{F} を \mathbf{G} に置きかえても全く変化がない。 \mathbf{T} は (1.8) を満足している限りどのようにとってもよいから、データに同程度の近似を示す因子モデルは無数にあることになる。

解の不定性は因子分析の最大の弱点とされる一方で、varimax 回転 (Kaiser, 1958) 等のいわゆる解析的回転法の出現ともあいまって、因子分析の解釈可能性を大幅に高めてきたことも否定できない。

2. 3相データの因子モデルと因子変化

3相データに対する因子モデルを極く一般的に考えるとすれば、次のようになるであろう。すなわち、機会 k におけるデータ行列を \mathbf{Z}_k 、因子得点行列を \mathbf{F}_k 、因子負荷行列を \mathbf{A}_k とするとき、

$$\mathbf{Z}_k \equiv \mathbf{F}_k \mathbf{A}_k^T; \quad k = 1, \dots, p \quad (2.1)$$

である。我々は、機会 k による平均差には関心をもちたないことにしたから、 \mathbf{Z}_k は各機会ごとに平均値が0となるように基準化する。すなわち、

$$\frac{1}{N} \mathbf{Z}_k^T \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

ここで、 $\mathbf{1}$ はすべての要素が1であるような N 次元ベクトル、 $\mathbf{0}$ は n 次元のゼロベクトルである。(このような変換に対する反論は Bentler, 1973参照。) また、分散の変化にも関心をもちたないとするれば、 \mathbf{Z}_k は機会ごとに分散1となるように基準化してよい。すなわち、

$$\text{diag} \left(\frac{1}{N} \mathbf{Z}_k^T \mathbf{Z}_k \right) = \mathbf{I} \quad (2.3)$$

ここで、 diag は行列の対角要素だけを取り、非対角要素をすべて0とする演算である。

Hakstian (1973) は、(2.3) の変換は変数の単位を機会ごとに違ったものとしてしまうから不適切であり、

$$\text{diag} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{1}{N} \mathbf{Z}_k^T \mathbf{Z}_k \right) = \mathbf{I} \quad (2.4)$$

とするのが適切だとする。(2.4) は、 p 回の機会全体を通じての分散の平均値を1とするような変換である。しかしながら、多くの心理学的測定値には絶対的単位は欠けており、むしろ個人の相対的位置にのみ注目した方

がよいことがしばしばであると思われる。以下において、大部分の場合、データは (2.2) と (2.3) を満足するように変換されているものとする。

もし、(2.1) のように、データを機会ごとの因子負荷と因子得点によって記述するとすれば、各因子は次の4つのカテゴリーのどれかに分類されると考えることもできよう (Baltes & Nesselroade, 1973)。

a型) 因子負荷不変—因子得点安定

b型) 因子負荷不変—因子得点変動

c型) 因子負荷変化—因子得点安定

d型) 因子負荷変化—因子得点変動

もちろん、4つの型の間にはさまざまな中間段階が存在しうるし、後に述べるようにこの分類法自体に若干あまい点もあるが、一つの目安としての有効性はあろう。因子得点の安定性は因子得点間の相関行列

$$\mathbf{S}_{kk'} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_{k'} \quad (2.5)$$

により (ここで因子得点は、機会ごとに標準化されているとした)、また、因子負荷の不変性は Wrigley & Neuhäus (1955) の一貫性係数

$$\Phi_{kk'} = \{ \text{diag}(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k) \}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_{k'} \{ \text{diag}(\mathbf{A}_{k'}^T \mathbf{A}_{k'}) \}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

等によって、ある程度判定することはできよう。

このように見ると、問題は何もないように見える。すなわち、個々の \mathbf{Z}_k に対して個別に因子分析を適用し、得られた因子得点と因子負荷の変化の程度を、(2.5) と (2.6) によって判定すればよいのではなからうか。しかしながら、個別の因子分析の反復適用というこの方法には少なくとも2つの問題点が指摘されるのである。

まず第一に、因子分析の解の不定性に起因する問題がある。各機会における因子得点と因子負荷には、当然機会ごとに異なった回転を施してよい筈であるし、実際個別の因子負荷に対して決まる解析的回転は同一のものではないであろう。むしろ、個別に適用された因子分析の座標軸には直接的な対応関係はないから、回転行列が同じであるか否かを問うこと自体に意味がない。いずれにしても回転前の因子負荷 \mathbf{A}_k 、 $\mathbf{A}_{k'}$ 、因子得点 \mathbf{F}_k 、 $\mathbf{F}_{k'}$ と、(1.9)、(1.10) を通じて定義される回転後の因子負荷 \mathbf{B}_k 、 $\mathbf{B}_{k'}$ 、因子得点 \mathbf{G}_k 、 $\mathbf{G}_{k'}$ について、

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_{k'} \neq \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_{k'}$$

$$\frac{1}{N} \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_{k'} \neq \frac{1}{N} \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_{k'}$$

であり、一貫性係数と因子得点間相関の値は、適用される直交回転によって変わりうることになる。この点はむ

しるこの性質を逆用し、因子負荷の一致度を相互に最大化するような回転法 (Evans, 1971) や、因子得点間相関を最大化するような回転法 (清水・辻岡, 1981) を用いることが考えられる。ただし、これは因子変化の型について何らかの予見をもっている場合に限られるであろう。

第二の問題はもう少し微妙である。これは因子モデルがデータと完全に一致するとは限らないことからくる。データは常に何かしかの誤差を含んでいるものである。他方、因子分析の解法は多くの場合、データとのズレを最小化するように作られている。この際、データとモデルとのズレが誤差とみなされるのが普通である。しかしながら、データ中に含まれる測定誤差またはサンプリング誤差と、データとモデルとのズレという意味での“誤差”は完全に一致するとは限らず、推定されたモデルのパラメータ A_k, F_k の中には、データの測定誤差、あ

るいはサンプリング誤差の成分も含まれてしまう。特に質問紙調査のように個々の得点の信頼性の低い場合や、標本の大きさが小さい場合には、機会ごとに個別に適用された因子分析の結果には、そのような誤差成分が多量に含まれてしまう可能性が大きい。その結果、得られた因子負荷と因子得点は、相互に予想以上の不一致を示す場合がある (村上・後藤・辻本, 1978)。

以上の理由で、3相データは全体を同時に分析する必要がある。そして、その際因子変化をどのように表現するか、という点でさまざまなモデルが分化してくることになる。

3. 相関行列上にあらわれる因子変化

各機会のデータ行列を図1のような形に並べた超行列 (super matrix) を Z とする。

$$Z = [Z_1 Z_2 \dots Z_p] \quad (3.1)$$

				機 会											
				1			2			⋮			p		
				変 数			変 数			⋮			変 数		
				1	2	3	⋮	n	1	2	3	⋮	n	1	2
機	1	変 数	1												
			2												
機	2	変 数	1												
			2												
機	p	変 数	1												
			2												

図2 超相関行列

である。この Z によって定義される行列 R ,

$$R = \frac{1}{N} Z^T Z \quad (3.2)$$

は、機会 k における n 個の変数と、機会 k' における n 個の変数の間の相関行列

$$R_{kk'} = \frac{1}{N} Z_k^T Z_{k'} \quad (3.3)$$

を要素とする超行列 ($np \times np$ の大きさをもつ) となる。すなわち、

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1p} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p1} & R_{p2} & \dots & R_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

の形をとる (図2)。

機会ごとの因子モデル (2.1) により、 $R_{kk'}$ は、

$$R_{kk'} \cong A_k S_{kk'} A_k^T \quad (3.5)$$

ただし、

$$S_{kk'} \cong \frac{1}{N} F_k^T F_{k'} \quad (3.6)$$

という形であらわすことができる。(3.6) は、 $\text{diag}(1/N) F_k^T F_k = I$ が成立しているとき因子得点間の相関行列、そうでなければ因子得点間の共分散行列と考えることができる。

因子変化を問題にする場合、個々の被験者の因子得点そのものを知る必要はなく、因子得点間の相関関係を知ることができれば十分であろう。従って、因子変化を記述するために必要な情報は、超行列 R の中に含まれると云ってよいように思われる。

因子得点間相関 (または共分散) 行列を要素とする超行列を S とする。すなわち、

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

である。因子負荷行列 A_k を主対角線上にもち、他の要他の要素をすべてゼロ行列 O とする超行列を A^0 とする。すなわち、

$$A^0 = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_p \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

このとき、(3.5) の関係は全体として、

$$R \cong A^0 S A^{0T} \quad (3.9)$$

とあらわすことができる。

それはさておき、ここでは、さまざまな因子変化の R 上でのあらわれ方について、図式化した例を幾つか示すことにしよう。Murakami (1983) は、単一の相関行列上に、Baltes & Nesselrode (1973) の a 型 ~ c 型の因子がいわば相乗りしている場合の例をあげている。ここではもう少し自由な立場からの例示を試みる。例のとりあげ方は、必ずしも体系的でも網羅的でもないが、一口に因子変化と呼ばれる概念の多様性について考慮し、以下の節でとりあげる多くの手法のうちから、想定される因子変化の型によって、どれを選択するかを判断するための一助となることを目的としている。機会の数 p は 2, 変数の数 n は 5 の場合に限定する。

例は、簡略化した図の形で示す。すなわち、

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

の下三角部分、及び、2つの機会における因子負荷行列 A_1, A_2 を縦に並べた行列 A ,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

及び因子間相関行列

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

の各要素を、1に近い大きな値を**, 中程度の値を*, 0に近い値を空白で示す。(この区別は厳密なものではない。) A と S には回転に関する任意性が含まれるが、単純構造に近づけるように、変換されているものと考えられる。

例1. これは、因子負荷不変、因子得点安定の場合を示す (図3)。この図で、変数1~3, 4と5は、それぞれ相互に高い相関をもち、この2つのグループ間の相関はすべて0に近い。この点は、因子負荷を単純構造化するためであって、因子変化そのものに特に関係はない。重要な点は、1) R_{11} と R_{22} のパターンがほぼ同一で、2) それぞれが R_{12} (あるいは R_{21}) にはほぼそのまま再現される、という点である。このとき、因子負荷 A_1 と A_2 はほぼ同一で、因子得点間相関行列 S_{12} (あるいは S_{21}) は、単位行列に近いものとなる。Baltes & Nesselrode の言う a 型の因子である。

例2. この例は、例1に近いが、 R_{21} の部分の値がやや低い点が異なる (図4)。 A_1 と A_2 は、例1の場合と

3相データにおける因子変化の記述のための諸方法（I）

		<i>R</i>									
		①					②				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
①	1	1.0									
	2	**	1.0								
	3	**	**	1.0							
	4				1.0						
	5				**	1.0					
②	1	**	**	**			1.0				
	2	**	**	**			**	1.0			
	3	**	**	**			**	**	1.0		
	4				**	**				1.0	
	5				**	**				**	1.0

		<i>A</i>		<i>S</i>			
		I	II	①		②	
				I	II	I	II
①	1	**		I	1.0		
	2	**		II		1.0	
	3	**					
	4		**	I	**		1.0
	5		**	II		**	1.0
②	1	**					
	2	**					
	3	**					
	4		**				
	5		**				

図3 例1の相関行列 *R*, 因子負荷行列 *A*, 因子得点間相関行列 *S* (模式図)。

*R*と*S*は下3角部分のみを示し、それ以外でも0に近い値は空白としている。説明は本文参照。

		<i>R</i>									
		①					②				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
①	1	1.0									
	2	**	1.0								
	3	**	**	1.0							
	4				1.0						
	5				**	1.0					
②	1						1.0				
	2						**	1.0			
	3						**	**	1.0		
	4									1.0	
	5									**	1.0

		<i>A</i>		<i>S</i>			
		I	II	①		②	
				I	II	I	II
①	1	**		I	1.0		
	2	**		II		1.0	
	3	**					
	4		**	I			1.0
	5		**	II			1.0
②	1	**					
	2	**					
	3	**					
	4		**				
	5		**				

図5 例3の相関行列 *R*, 因子負荷行列 *A*, 因子得点間相関行列 *S* (模式図)。

		<i>R</i>									
		①					②				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
①	1	1.0									
	2	**	1.0								
	3	**	**	1.0							
	4				1.0						
	5				**	1.0					
②	1	*	*	*			1.0				
	2	*	*	*			**	1.0			
	3	*	*	*			**	**	1.0		
	4				*	*				1.0	
	5				*	*				**	1.0

		<i>A</i>		<i>S</i>			
		I	II	①		②	
				I	II	I	II
①	1	**		I	1.0		
	2	**		II		1.0	
	3	**					
	4		**	I	*		1.0
	5		**	II		*	1.0
②	1	**					
	2	**					
	3	**					
	4		**				
	5		**				

図4 例2の相関行列 *R*, 因子負荷行列 *A*, 因子得点間相関行列 *S* (模式図)。

		<i>R</i>									
		①					②				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
①	1	1.0									
	2	**	1.0								
	3	**	**	1.0							
	4				1.0						
	5				**	1.0					
②	1	**	**	**			1.0				
	2	**	**	**			**	1.0			
	3	**	**	**			**	**	1.0		
	4									1.0	
	5									**	1.0

		<i>A</i>		<i>S</i>			
		I	II	①		②	
				I	II	I	II
①	1	**		I	1.0		
	2	**		II		1.0	
	3	**					
	4		**	I	**		1.0
	5		**	II			1.0
②	1	**					
	2	**					
	3	**					
	4		**				
	5		**				

図6 例4の相関行列 *R*, 因子負荷行列 *A*, 因子得点間相関行列 *S* (模式図)。

同様はほぼ同一となるが、因子得点間相関行列の S_{21} の部分の対角要素は、かなり小さい値となる。これは、実際のデータにおいて割合よく見られるパターンである。

2つの機会が単なる反復であれば、これは因子の、繰返しに関する信頼性（再検査信頼性）が例1の場合に比べて低いことを意味し、2つの機会が、多特性—多方法行列の場合であれば、収束的妥当性のやや低い場合に相当する。

因子得点は幾分不安定なのであるが、これをb型と呼ぶかa型と呼ぶかは、かなり主観的な問題とすることになるであろう。

例3. R_{21} の要素の値が更に低く、 R_{21} はほとんどゼ

		R									
		①					②				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
①	1	1.0									
	2	**	1.0								
	3	**	**	1.0							
	4				1.0						
	5				**	1.0					
②	1				*	*	1.0				
	2				*	*	**	1.0			
	3				*	*	**	**	1.0		
	4	*	*	*						1.0	
	5	*	*	*						**	1.0

		A	
		I	II
①	1	**	
	2	**	
	3	**	
	4		**
	5		**

		S			
		①		②	
		I	II	I	II
①	I	1.0			
	II		1.0		
②	I		*	1.0	
	II	*			1.0

		A'	
		I	II
①	1	**	
	2	**	
	3	**	
	4		**
	5		**

		S'			
		①		②	
		I	II	I	II
①	I	1.0			
	II		1.0		
②	I	*		1.0	
	II	*			1.0

図7 例5の相関行列，因子負荷行列，因子得点間相関行列（模式図）。

ロ行列という場合である（図5）。因子負荷は不変であるが、因子得点間相関は0に近くなる。再検査信頼性、あるいは収束的妥当性はほとんど認められない、ということになる。Baltes & Nesselroade の分類で言えば典型的なb型因子である。

例4. いままでの3つの例では、2つの因子がともに同一の型に分類されていた。しかし、2つの型の因子が一つの相関行列中にあらわれる場合も当然ありうる。図6では、変数1～3が高く負荷する第I因子はあきらかなa型、変数4、5が高く負荷する第II因子はあきらかなb型となっている。パーソナリティ評定に関する多特性—多方法行列において、方法1（機会1に対応）を自己評定、方法2（機会2に対応）を他者評定とすると、特性によって自己評定と他者評定が一致するものとしなものがあるため、これに近い形があらわれることが多いようである。

例5. かなり人工的な例であり、実際にこのような形があらわれることは稀であると思われるが、モデルとしては一つの典型であり、Baltes & Nesselroade の分類の多義性を示す例でもあるのでとりあげておく（図7）。すなわち、2つの因子は、2つの機会の間では無相関で

		R									
		①					②				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
①	1	1.0									
	2	**	1.0								
	3	**	**	1.0							
	4				1.0						
	5				**	1.0					
②	1	**	**	**			1.0				
	2	**	**	**			**	1.0			
	3			**	**				1.0		
	4			**	**				**	1.0	
	5			**	**				**	**	1.0

		A	
		I	II
①	1	**	
	2	**	
	3	**	
	4		**
	5		**

		S			
		①		②	
		I	II	I	II
①	I	1.0			
	II		1.0		
②	I	**		1.0	
	II	**			1.0

図8 例6の相関行列，因子負荷行列，因子得点間相関行列（模式図）。

3相データにおける因子変化の記述のための諸方法 (I)

あるが、機会1の第I因子は、機会2の第II因子と相関を示し、機会1の第II因子は、機会2の第I因子と相関を示している。(どちらか一方だけなら、縦断研究で同一特性の測定のための instrument が年齢によって変化せざるを得ないような場合には、実際に起こりうるかもしれない。)

この場合、因子得点間相関行列の S_{21} の部分は、非対角要素だけが0でない、という若干奇妙なことになる。これは、b型の極端な場合とも見られるが、この場合はむしろ、図7の A' 、 S' のように因子負荷が変化するc型因子とみなす方が自然であろう。後にとりあげる縦断的因子分析法では、実際 A' 、 S' のような解が得られる

		R													
		①					②								
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5				
①	1	1.0													
	2	**	1.0												
	3	**	**	1.0											
	4	**	**	**	1.0										
	5	**	**	**	**	1.0									
②	1	**	**	**	*	*	1.0								
	2	**	**	**	*	*	**	1.0							
	3	**	**	**	*	*	**	**	1.0						
	4	*	*	*	**	**					1.0				
	5	*	*	*	**	**					**	1.0			

A		S			
		①		②	
		I	II	I	II
①	1	**	—	1.0	
	2	**	—	—	—
	3	**	—		
	4	**	—	*	—
	5	**	—	*	—
②	1	**			1.0
	2	**			
	3	**			
	4		**		
	5		**		

A'		S'			
		①		②	
		I	II	I	II
①	1	**		1.0	
	2	**		**	1.0
	3	**			
	4		**	**	*
	5		**	*	**
②	1	**			1.0
	2	**			
	3	**			
	4		**		
	5		**		

図9 例7の相関行列、因子負荷行列、因子得点間相関行列 (模式図)。

ことになる。こう考えるとすれば、因子負荷が不変であるかどうかは、機会ごとの変数間相関行列 R_{11} と R_{22} だけを見ていたのではわからない、ということになる。

例6. Baltcs & Nesselroade のc型は、図8のような場合を指すと思われる。この例では、機会1では変数1~3と4~5が相互に相関が高く、機会2では1~2と3~5が相関が高い。すなわち、変数3が高く負荷する因子が、機会1と2では変化している。 R_{21} のところにはその変化に対応したパタンがあらわれており、因子得点は安定であると考えられることができる。実際のデータでこの形があらわれることは比較的稀であるようだ。

例7. いわゆる因子構造の分化が起る例である(図9)。機会1では全変数が相互に高い相関をもっており、機会2ではこれが2群に分かれる。 R_{21} には、 R_{11} と R_{22} の平均的なパタンがあらわれている。これは機会間で因子数が変わる場合とみなすのが自然である。Baltcs & Nesselroade の分類ではd型ということになるうか。

このとき、機会1では因子得点が相関することを許せば、図9の A' 、 S' のような表現もできる。これについては、5.2でとりあげるモデルを参照されたい。

この形は、実際のデータでは比較的よく見られる。必

		R													
		①					②								
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5				
①	1	1.0													
	2	**	1.0												
	3	**	**	1.0											
	4				1.0										
	5				**	1.0									
②	1	*	*	*	*	*	1.0								
	2	*	*	*	*	*	**	1.0							
	3	*	*	*	*	*	**	**	1.0						
	4	*	*	*	*	*					1.0				
	5	*	*	*	*	*					**	1.0			

A		S			
		①		②	
		I	II	I	II
①	1	**		1.0	
	2	**			1.0
	3	**			
	4		**	*	*
	5		**	*	*
②	1	**			1.0
	2	**			
	3	**			
	4		**		
	5		**		

図10 例8の相関行列、因子負荷行列、因子得点間相関行列 (模式図)。

ずしも発達の文脈でなくても、例えばパーソナリティ評定において他者評定は自己評定に比べて（何らかの反応傾向その他の影響で）分化度が低くなることが多い。

例 8. 図10は、非常に奇妙な形であるが、多特性-多方法行列において時にみられる。各機会の因子負荷は同一とみなされるから、b型の一種と言えよう。機会1と機会2に共通しているのは単一の因子であり（恐らく一種の反応傾向）、これを取除くと、2つの変数群はむしろ逆相関なのであろう。従って、測定したい特性に関しては収来的妥当性のみならず弁別的妥当性も欠いているような場合ということになる。

例 9. これはほとんど例1と同一であるが、機会1の変数1～3にかかわる部分の相関だけがやや低い場合である。このとき、機会1の第I因子の因子負荷が低いものとなる。これは一応c型ということになるであろう。しかし、Wrigley & Neuhaus の一致性係数（2.6）の値はほぼ1に近いものとなる。（因子寄与でnormalizeされるから。）ある意味ではa型に含めてもよいのかもしれない。

以上9つの例は、いずれも過度の単純化が行なわれており、実際の相関行列は、これら（あるいはそれ以外）のパターンが組み合わさった複雑な様相を呈することにな

るであろう。しかしながら、これらのプロトタイプを想定しておくことは、モデルの選択のみならず、結果の解釈にあたって有効性をもつものと思われる。これらの例は、5節において再び論じられよう。

4. 主成分分析と因子分析

この節をここに挿入するのは、用語に関する若干の混乱を回避すること、並びに、5節及び次稿で論ずる幾つかのモデル及びそれに対するアルゴリズムの定式化の基礎を明確化するためである。

1節において、ここでは因子という語をかなり広い意味で用いると述べた。このような広義の因子の用法は、通常の心理学研究におけるそれとおおよそ一致していると思われる。すなわち多くの心理学研究では、主成分分析が因子分析の名の下に用いられている。

このような拡張解釈は、通常の（2相の）データの分析に関する限り、さほど大きな混乱をひきおこすものではない。すなわち、因子分析（主因子法）と主成分分析とはアルゴリズムに関しては、以下にみるように、共通性の推定という一点を除けば全く同一であるし、変数がある程度多い場合には、算出される因子負荷行列に極めて大きな差を生ずることは稀である。

しかしながら、3相データを扱う場合には、因子分析（型）モデルと、主成分分析（型）のモデルでは、共通性の推定以外にもアルゴリズム的には全く異なる面が出てくる場合がある。更に、同一の形をとるモデルが、一方では解けても、他方では（今のところ）解けない、といった場合もでてくる。

従って本節では、主成分分析と主因子法因子分析の定式化の違いを再確認しておきたいと考える。

4.1 主成分分析（I）

主成分分析では、因子分析の基本モデル（1.2）の左辺と右辺の差を、単に誤差と考える。（そこに何らの構造も仮定しない。）すなわち、

$$Z = FA^T + E \tag{4.1}$$

とし、(1.2)の左辺と右辺を最小2乗法の意味で最大限に近似しようとする。これは、 $\text{tr } E^T E$ (tr は、行列のトレース、すなわち行列の対角要素の総和をあらわす。)を最小化するように、行列 F と A を求めることによって達成される。要素を用いてあらわすと、

$$\text{tr } E^T E = \sum_i \sum_j (z_{ij} - \sum_l f_{il} a_{jl})^2 \tag{4.2}$$

である。制約条件（1.5）の下で、 A は、

$$RA = AL \tag{4.3}$$

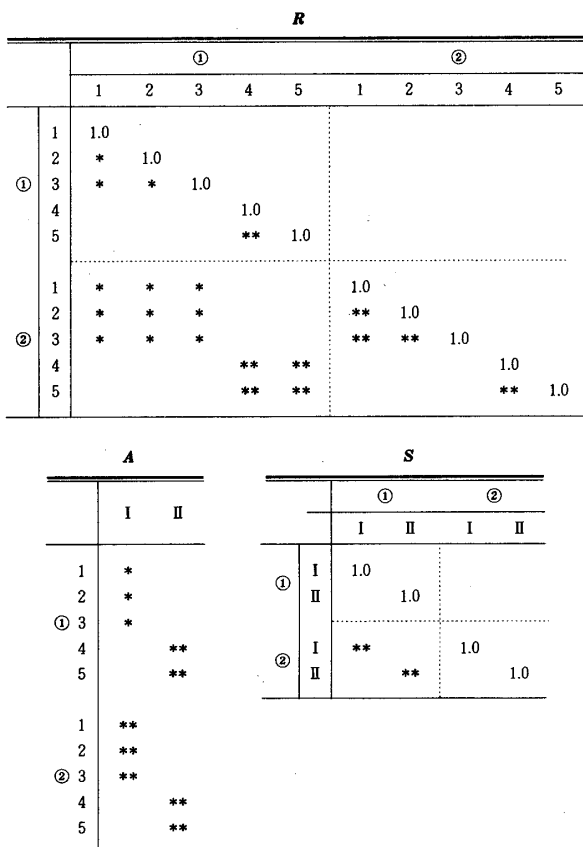


図11 例9の相関行列、因子負荷行列、因子得点間相関行列（模式図）。

なる固有方程式を満たす固有ベクトルの行列として得られる。ただし、 $\text{tr } \mathbf{E}^T \mathbf{E}$ の最小化という条件から、 \mathbf{R} の q 番目までの最大固有値に対応する固有ベクトルであり、 $q \times q$ の対角行列 \mathbf{L} の対角要素はその固有値である。 \mathbf{A} は、

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{L} \quad (4.4)$$

となるように scaling される。 \mathbf{F} はこの \mathbf{A} を用いて、

$$\mathbf{F} = \mathbf{ZAL}^{-1} \quad (4.5)$$

によって得られる。(4.5) の左から $(1/N)\mathbf{Z}^T$ をかけ、(4.3) を用いることによって (1.7) が得られる。 \mathbf{A} 、 \mathbf{F} には、(1.9)、(1.10) の直交回転をほどこすことができる。以上の解法は Keller (1962) による。

この解法について注意すべき点は以下の通りである。

- (1) 因子数 q を変数の数 n に等しくとると、 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 、すなわちモデルのデータへのあてはまりは完全になる。
- (2) 因子数を q から q' ($q' > q$) に増加させたとき、 q までの解は変化しない。

以上2点は、極めて当然のことのようにも見えるが、どんなモデルでも成立するとは限らない。なお(2)の点については、回転を行なわない場合に限られる。例えば因子数 q' の解を varimax 回転して得られる因子負荷行列の各列のうちには、因子数 q の解を varimax 回転した因子負荷行列のどれかと一致するものは(一般には)ない。回転に関しては、

- (3) 直交回転である限り、因子得点 \mathbf{F} はどのように回転しても、(1.5) を満たすという意味で直交しているが因子負荷行列を回転すると (4.4) が対角行列であるという意味では直交しなくなる。

また、

- (4) しばしば因子得点の“推定”ということばが使われる。しかし(4.5)で算出される因子得点(正確には成分得点)は推定された値ではなく、データ \mathbf{Z} との相関係数行列が因子負荷行列 \mathbf{A} であるという意味で、正確な値である。

これらの点については、しばしば誤解がある。

最後に、(4.7) はデータ \mathbf{Z} を、因子によって説明される部分 \mathbf{FA}^T と、説明されない部分 \mathbf{E} にわけていいると考えることができる。さて、 $\text{tr } \mathbf{E}^T \mathbf{E} / N$ は、因子によって説明されない部分の分散である。簡単な演算により、

$$\text{tr } \mathbf{E}^T \mathbf{E} / N = \text{tr } \mathbf{R} - \text{tr } \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (4.6)$$

ここで $\text{tr } \mathbf{R}$ は変数の数 n に等しくデータの全分散を示し、 $\text{tr } \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ は因子寄与(各因子の因子負荷の2乗和)の総和で、因子によって説明される部分の分散に等しく、更に

これは q 番目までの固有値の総和 $\text{tr } \mathbf{L}$ に等しい。 $\text{tr } \mathbf{L} / n$ は、 q 個の因子によって説明される分散の割合を示すことになる。

4.2 主成分分析 (II)

主成分分析には別の formulation もある。 \mathbf{W} を $n \times q$ の重みの行列とし、これによって因子得点(成分得点)行列 \mathbf{F} を、

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z}\mathbf{W} \quad (4.7)$$

と定義する。(1.5) の条件により、この重みは、

$$\mathbf{W}^T \mathbf{R}\mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (4.8)$$

を満足しなければならない。データと因子得点との相関係数行列 \mathbf{A} を (1.7) で定義すると、(4.7) より、

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{W} \quad (4.9)$$

である。この相関係数の2乗和、すなわち、

$$\text{tr } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{W}^T \mathbf{R}^2 \mathbf{W} \quad (4.10)$$

を最大化するように重み行列 \mathbf{W} を定めることを考える。Lagrange の未定数法を用いて、この \mathbf{W} は、

$$\mathbf{R}^2 \mathbf{W} = \mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{L} \quad (4.11)$$

なる固有方程式を満足するものであることが導かれる。 \mathbf{R} のランクが変数の数 n に等しいとすれば(これは $N > n$ であれば、実際のデータではまず確実に満足される)、 \mathbf{R} の逆行列 \mathbf{R}^{-1} を (4.11) の左からかけて、

$$\mathbf{R}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{L} \quad (4.12)$$

が得られる。対角行列 \mathbf{L} の対角要素は大きい順に q 番目までの固有値であり、 \mathbf{W} はそれに対応する固有ベクトルを列としてもつ。(4.8) の条件を満足するために、 \mathbf{W} は、

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{L}^{-1} \quad (4.13)$$

を満足するように scaling される。また(4.9)と(4.12)により、

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{L} \quad (4.14)$$

である。 \mathbf{A} と \mathbf{F} には任意の直交回転を行なってよい。

なお、この解法は普通

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$$

の下での、

$$\text{tr } \frac{1}{N} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \text{tr } \mathbf{W}^T \mathbf{R}\mathbf{W}$$

の最大化, という形で記述される場合が多い。ここでは通常の因子分析の scale と合わせるために, 制約条件を (4.8) とした。このやり方は芝 (1975) と同じである。ただしそこでは, 1 因子ずつ順に求めていく定式化となっており, 回転の問題には触れられていない。

さて, この解法は結果的には前項の解法と完全に同等である。このことは (4.2) の最小化が (4.10) の最大化と等しいことを示す, (4.6) からも見えてとることができる。しかし, この, データの重みつき合成得点としての因子 (成分) 得点の定義を行なうやり方は, 3 相データにおいては最大化の基準によって実にさまざまな解を生み出す。前項で述べた, データに最大限のあてはめをはかる方法だけでなく, データの部分に着目した最適化の formulation には, このやり方が便利なのである。例えば, 機会の数 p を 2 としたとき, (3.10) の相関行列において, R_{12} の部分に着目し 2 つの機会の共通部分の何らかの意味の最大化を考えることがありうる (例えば正準相関分析)。

4.3 因子分析

狭い意味で因子分析と言う場合, その基本モデルは,

$$Z = FA^T + UD + E \quad (4.15)$$

である。新たにあらわれた U は $N \times n$ の行列で, 独自性と呼ばれ, 各列の平均は 0, 分散は 1 で, しかも

$$\frac{1}{N} U^T U = I \quad (4.16)$$

である。 D は対角行列で, その要素は各変数の独自性の標準偏差である。更に U と F は無相関, すなわち,

$$\frac{1}{N} F^T U = 0 \quad (4.17)$$

と仮定される。独自性から更に誤差成分を分離して考えることもあるが, ここではそれはしない。(4.15) の E は普通の記述には含まれていないがモデルとデータとのズレを意味するものとする。 \hat{Z} を

$$\hat{Z} = Z - E \quad (4.18)$$

と定義すると, (1.5), (4.16), (4.17) により,

$$\frac{1}{N} \hat{Z}^T \hat{Z} = AA^T + D^2 \quad (4.19)$$

である。

因子分析には実にさまざまな解法が提唱されているが, R と (4.19) とのズレを

$$S = \text{tr} (R - AA^T - D^2)^T (R - AA^T - D^2) \quad (4.20)$$

の最小化という意味で最小にしようとする解法が, 主因子法 (principal factor method) である。

すなわち, (4.20) を A 及び D^2 で偏微分すると,

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial S^2}{\partial A} = (R - AA^T - D^2)A \quad (4.21)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial S^2}{\partial D^2} = \text{diag}(R - AA^T - D^2) \quad (4.22)$$

を得る。それぞれを O と置き, 解を一意的にするために

$$A^T A = L \quad (4.23)$$

を対角行列とし,

$$R^\dagger = R - D^2 \quad (4.24)$$

と定義すると,

$$R^\dagger A = AL \quad (4.25)$$

$$R^\dagger = R - I + \text{diag}(AA^T) \quad (4.26)$$

が得られる。(4.25) は R の対角要素が共通性 (1-独自性) でおきかえられていることを除けば, 主成分分析における固有方程式 (4.3) と全く同一であり, (4.26) は R^\dagger を求めるためには, R の対角要素を因子負荷行列の対応する行の 2 乗和で置きかえればよいことを意味している。実際には, $I - D^2$ の適当な初期値から始めて, (4.25) と (4.26) を交互に収束するまで反復することになる。これらはよく知られた, 共通性の反復推定を伴う主因子法である (Harman & Jones, 1966)。また, 主成分分析は, $D^2 = 0$ と置いた場合における主因子法であり, (1.6) に対する最小 2 乗解でもある。

S^2 は (4.24), (4.25) を用いて,

$$S^2 = \text{tr} R^{\dagger 2} - \text{tr} L^2 \quad (4.27)$$

となる。これは (対角要素を共通性でおきかえた) 相関行列の全要素の 2 乗和と, 固有値の 2 乗和との差である。

因子分析では, 因子得点行列 F を正しく求めるための公式は存在せず, 何らかの基準によって推定しうにすぎない。このための方法は多数提案されている (Shiba, 1969) が; Kendall (1975) のように, F を求めることは不可能であり, 推定を行なわない方がよいとするものもある。そうだとすれば, 因子分析とは単に,

$$R^\dagger \cong AA^T \quad (4.28)$$

というモデルのあてはめに尽きることになり, Guttman (1981) のように, “因子分析家は個人の因子得点にまで進むことなしに……相関行列を部分的に検討する(にすぎない)” と論ずることが正当になるかもしれない。我々も, 以下の部分では因子得点は単にその間の相関または共分散の形でしか扱わない。

因子分析に関しては、主成分分析 (I) のところで述べた (2) の事実は成立しないことに注意すべきである。なぜなら D^2 は因子数 q によって異なるから、因子数を q としたときの最小 2 乗解 A の $q-1$ 番目までの列は、因子数を $q-1$ としたときの最小 2 乗解と一般には一致しない。

以上において我々は、広い意味での因子分析を、

- 1) データ行列 Z に対する FA^T のあてはめ。
- 2) 何らかの基準を満たす合成得点 ZW の生成。
- 3) 相関行列 R^+ に対する AA^T のあてはめ。

の 3 種に分類した。ここでは 1) を“主成分型のモデル”、2) を“合成得点型のモデル”、3) を“因子分析型のモデル”と呼ぶことにする。以下においては、種々の 3 相データの因子分析のためのモデルを、この分類に従って概観する。本稿において取り扱うのは前述のように、3) の因子分析型モデルに限る。

5. 因子分析型のモデル

因子変化を因子負荷の変化と因子得点の変化に分けてとらえるとすれば、3 節において述べ、かつ幾つかの例を示したように、その情報は (3.4) の形の超行列 R に対する因子分析型モデルの一般的形式は (3.9) である。そこで、ここでは (3.9) の形の構造モデルをあてはめるさまざまな試みについて概観する。また幾つかの場合について新しい解法を提案する。

ここで扱う幾つかのモデルについては Bentler (1973) がまとめた形で論じており、また我が国では野口 (1982) による紹介が手際よい。

本稿では前述の Baltes & Nesselroade の因子変化の分類に沿った単純な枠組、すなわち、

- 1) 因子負荷、因子得点とも機会ごとに異なる場合。
 - 2) 因子負荷が全機会を通じて共通の場合。
 - 3) 因子得点が全機会を通じて共通の場合。
 - 4) 因子負荷、因子得点とも全機会を通じて共通の場合。
- という順序で記述をすすめることにする。

一部のモデルを除き、単純な意味での最小 2 乗解、すなわち、超行列 R と構造モデルとのズレの 2 乗和を最小にする解法をとりあげる。これは通常の 2 相データにおける主因子法の拡張である。

相関行列 R の共通性は概に推定済みであるか、または共通性の推定は全くおこなわないものとする。3 相データでは何を共通性とみなすかについて、かなり問題がある (村上, 1982)。本研究では、その問題に立ち入る余裕がない。

5.1 因子負荷と因子得点がともに変化するモデル

これは、データ行列についてみれば、

$$Z_k \equiv F_k A_k^T$$

すなわち、因子得点も因子負荷も機会 k ごとに異なることを想定したモデルである。これは 2 節において批判的に言及した機会ごとの相関行列 R_{kk} に対する因子分析の反復適用に必ずしも尽きるわけではなく、基準のとりかた、制約条件の入れ方によって、幾つかの可能性が生ずる。ここでは 4 種のモデルとその解法について述べる。

5.1.1 一般的モデル

因子得点は機会ごとに標準化されている、すなわち、

$$\frac{1}{N} F_k^T F_k = I; k = 1, \dots, p$$

と仮定する。因子得点間相関行列 S は、

$$S = \begin{bmatrix} I & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & I & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & I \end{bmatrix}$$

のように、主対角線上に単位行列がならぶ形になる。

A_k と S の各要素を、 R に対する最小 2 乗解となるように、すなわち、

$$S^2 = \text{tr} \sum_{k=1}^p \sum_{k'=1}^p (R_{kk'} - A_k S_{kk'} A_k^T)^T (R_{kk'} - A_k S_{kk'} A_k^T) \quad (5.1)$$

を最小にするように求めることを考える。ただし、

$$S_{kk} = I; k = 1, \dots, p \quad (5.2)$$

とする。

この解を得るためには、解の不定性を利用すれば簡単になる。 $A_k, S_{kk'}$ を (5.2) を満たし S_k^2 を最小化するような解とする。このとき、各 A_k を

$$A_k^{*T} A_k^* = I; k = 1, \dots, p \quad (5.3)$$

を満たすような A_k^* に変換する行列 T_k^* 、

$$A_k^* = A_k T_k^*; k = 1, \dots, p$$

が存在する。これにより、 $S_{kk'}$ を

$$S_{kk'}^* = T_k^{*-1} S_{kk'} (T_{k'}^*)^T; k, k' = 1, \dots, p$$

と変換すると、

$$A_k^* S_{kk'}^* A_k^{*T} = A_k S_{kk'} A_k^T$$

であり、これは制約条件が (5.2) から (5.3) に変わった点を除けば、やはり S_k^2 を最小にする解であることがわかる。そこで、まずこの A_k^* と $S_{kk'}^*$ を求める。

$A_k, S_{kk'}$ を $A_k^*, S_{kk'}^*$ でおきかえた S_k^2 を $S_{kk'}^*$ で偏微

分すると、

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial S_1^2}{\partial \mathbf{S}_{kk'}} = \mathbf{A}_k^{*T} (\mathbf{R}_{kk'} - \mathbf{A}_k^* \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{A}_k^{*T}) \mathbf{A}_k^*$$

を得る。これを \mathbf{O} とおき、(5.3) を利用して、

$$\mathbf{S}_{kk'}^* = \mathbf{A}_k^{*T} \mathbf{R}_{kk'} \mathbf{A}_k^* \quad (5.4)$$

となる。

次に S_1^2 を \mathbf{A}_k^* で偏微分すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{\partial S_1^2}{\partial \mathbf{A}_k^*} &= \sum_{k'} (\mathbf{R}_{kk'} - \mathbf{A}_k^* \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{A}_k^{*T}) \mathbf{A}_k^* \mathbf{S}_{kk'}^* \\ &= \sum_{k'} \mathbf{R}_{kk'} \mathbf{A}_k^* \mathbf{S}_{kk'}^* - \mathbf{A}_k^* \sum_{k'} \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{S}_{kk'}^* \end{aligned}$$

である。この第1項に(5.4)を代入して全体を \mathbf{O} とおくと、

$$\sum_{k'} (\mathbf{R}_{kk'} \mathbf{A}_k^* \mathbf{A}_k^{*T} \mathbf{R}_{kk'}) \mathbf{A}_k^* = \mathbf{A}_k^* (\sum_{k'} \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{S}_{kk'}^*)$$

を得る。右辺の $(\sum_{k'} \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{S}_{kk'}^*)$ は、 $\mathbf{S}_{kk'}^* = \mathbf{S}_{kk'}^{*T}$ であることに注意すれば対称行列であり、適当な直交行列によって対角化することが可能である。解を一意的にするためにこの行列は既に対角行列となっているものとしよう。これを \mathbf{L}_k とかくと、

$$\left(\sum_{k'} \mathbf{R}_{kk'} \mathbf{A}_k^* \mathbf{A}_k^{*T} \mathbf{R}_{kk'} \right) \mathbf{A}_k^* = \mathbf{A}_k^* \mathbf{L}_k ; k = 1, \dots, p \quad (5.5)$$

となるが、これは対称行列 $(\sum_{k'} \mathbf{R}_{kk'} \mathbf{A}_k^* \mathbf{A}_k^{*T} \mathbf{R}_{kk'})$ の固有方程式系となっている。この行列には未知数 \mathbf{A}_k^* そのものが含まれているが、適当な初期値 (\mathbf{R}_{kk} の因子分析によるのが適当であろう) から初めて反復推定の手続きによることができる。収束した \mathbf{A}_k^* を用いて(5.4)により、 $\mathbf{S}_{kk'}^*$ を求めればよい。

このようにして得られた \mathbf{A}_k^* と $\mathbf{S}_{kk'}^*$ を、求める \mathbf{A}_k 、 $\mathbf{S}_{kk'}$ に変換するためには、対称行列 \mathbf{S}_{kk}^* を、

$$\mathbf{S}_{kk}^* = \mathbf{C}_k^{*T} \mathbf{C}_k^*$$

と分解する。この \mathbf{C}_k^* は、 \mathbf{X}_k を \mathbf{S}_{kk} のすべての0でない固有値に対応する固有ベクトルを列とする行列、 \mathbf{A}_k をその固有値を対角要素とする対角行列とすると、

$$\mathbf{C}_k^* = \mathbf{X}_k \mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

によって求められる。そこで、

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^* \mathbf{C}_k^{*T} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{S}_{kk'} = (\mathbf{C}_k^{*-1})^T \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{C}_k'^{-1} \quad (5.8)$$

とすればよい。

最後に、このやり方では各 \mathbf{A}_k に対して個別の回転を行なうことができる。回転行列を \mathbf{T}_k とするとき、

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{T}_k \quad (5.9)$$

によって回転後の因子負荷行列 \mathbf{B}_k が得られ、同じ \mathbf{T}_k を用いて、

$$\mathbf{P}_{kk'} = \mathbf{T}_k^T \mathbf{S}_{kk'} \mathbf{T}_k \quad (5.10)$$

によって回転後の因子得点間相関行列 $\mathbf{P}_{kk'}$ が得られる。(ここで回転によって因子得点間相関が変化する問題が生ずる。) 前述のように、ここでは因子負荷を相互になるべく一致させるような回転法や、因子得点間相関をできるだけ高くするような回転法等を試みる事ができよう。

なお、簡単な演算により、

$$S_1^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} \mathbf{R}_{kk'} \mathbf{R}_{kk'} - \text{tr} \sum_k \mathbf{L}_k \quad (5.11)$$

となる。これが小さいほどモデルのデータへのあてはまりはよい。従って(5.5)において固有値は大きい順にとることになる。

さて、この解法は筆者の知る限りどこにも現われたことのないものである。この解法は、先に述べた因子分析の個別の適用と同じ弱点を共有しているものの、 \mathbf{R} の全体に refer している点で、因子変化を検当するには幾分適したものであるようにも思われる。特に、因子得点間相関行列は(特に共通性推定を含む場合には)推定された因子得点によるよりも、この解法による方が良いのではないかと筆者は考える。ただし、実際にはこの2種の解が著しく異なることは余りないであろうが。

最後に、この解法では、個別の因子分析の場合と同様に、因子数は全機会を通じて同一である必要がないことを指摘しておこう。

5.1.2 個別の因子分析

上と同じ条件で、 \mathbf{R} 全体に対してではなく、 \mathbf{R} の対角要素 \mathbf{R}_{kk} だけに対するあてはまりを考える。このとき、条件(5.2)があるから、最小化すべき基準は、

$$S_2^2 = \text{tr} \sum_k (\mathbf{R}_{kk} - \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T)^T (\mathbf{R}_{kk} - \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T) \quad (5.12)$$

となる。この解が、各 \mathbf{R}_{kk} に対する個別の因子分析の適用に帰着することは容易にわかる。これは \mathbf{R}_{kk} の対角要素を1として考えれば主成分分析としての最小2乗解でもある。この解法をここでとりあげたのは、単に最適化基準の問題を明確にしておきたかったためにすぎない。

5.1.3 縦断的因子分析

ここまで、因子得点の変化の仕方については、特に何も考えてこなかった。一般にはあまりあらわれそうもな

い3節の例5のような奇妙な場合も含めて考えてきた。しかし現実には、より限定された変化だけを想定した方がよい場合もある。例えば、因子得点が異なる機会間でも直交する（無相関である）と仮定することが考えられる。すなわち、 $D_{kk'}$ を任意の対角行列として、

$$\frac{1}{N} F_k^T F_{k'} = D_{kk'}$$

と仮定する。 $D_{kk'}$ の対角要素は1より小さい。これは、Corballis & Traub (1970), Corballis (1973) によって縦断的因子分析 (longitudinal factor analysis) として提唱されたモデルである。因子得点間相関行列は全体として、

$$S = \begin{bmatrix} I & D_{12} & \dots & D_{1p} \\ D_{21} & I & \dots & D_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{p1} & D_{p2} & \dots & I \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

という形になる。

このモデルを、

$$S_{kk'}^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A_k D_{kk'} A_k^T)^T (R_{kk'} - A_k D_{kk'} A_k^T) \quad (5.14)$$

を最小にするように解くことは難しい。Corballis は、Jöreskog の Analysis of covariance structure の方法 (Jöreskog, 1970) を用いることを提唱している。

ただし $p=2$ の場合に限定すれば解を得ることは容易である。この場合、例えば 5.1.1 のやり方で求めた、

$$S = \begin{bmatrix} I & S_{12} \\ S_{21} & I \end{bmatrix}$$

のうち、 S_{21} の部分を対角化すればよい。 S_{12} に適用して

$$D_{12} = T_1 S_{12} T_2^T$$

とするような直交行列 T_1, T_2 は行列 S_{12}, S_{21} の factoring によって容易に求まるから、これによって A_1, A_2 を、

$$B_1 = A_1 T_1$$

$$B_2 = A_2 T_2$$

のように回転すればよい。これが、因子得点に関する正準相関分析を行なっていることになることは Nesselroade (1972) が指摘している。

これから気づかれるように、縦断的因子分析の解を回転することはできない。この点はこの方法の長所でもあり、短所でもある。単純構造に向けての回転を行なうことができない解は、やはり解釈が困難になる場合も多い

ようである。

実は、よく見ると回転が不可能であるのは、 $S_{12} S_{21}$ の固有値がすべて異なる場合、すなわち D_{11} の対角要素が相互に異なる場合であることがわかる。縦断的データでは、この要素は一種の再検査信頼性係数に相当するものである。時点間で直交性を保ちながら再検査信頼性が明確に異なるような因子、というのが縦断的因子分析で想定されているものであるが、そのような因子が存在し、かつ明瞭な解釈可能性をもつことは、かなり稀なのではないかと思われる。

縦断的因子分析は、探索的 (exploratory) 方法としてよりは、確認的 (confirmatory) 方法として用いられるべきものであろう。

5.1.4 多方法因子分析

機会の数 p と因子の数 q がかなり大きくなると、因子間相関行列 S それ自体も大きなものとなり、これ自体を解釈することが容易ではなくなってくることも考えられる。そこで S をもう一度因子分析しようと考えることになる。Jackson (1969, 1975) の多方法因子分析 (multimethod factor analysis) は、これを行なうものである。モデルとしては、

$$Z_k \cong F C_k^T A_k^T$$

の形となる。 C_k は因子得点の因子負荷行列、 F は F_k の更に基底にある因子得点とみなされる。

Jackson は、これを主成分モデルとして解いている。因子分析型のモデルとしては、

$$R_{kk'} \cong A_k C_k C_k^T A_k^T \quad (5.15)$$

となる。5.1.1 の解法の途中で S_{kk} を factoring するとき、少数の因子にとどめておくという便法もありうるが、

$$S_{kk'}^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A_k C_k C_k^T A_k^T)^T (R_{kk'} - A_k C_k C_k^T A_k^T) \quad (5.16)$$

を最小化するような R に対する最小2乗解も可能である。しかし、ここではこのアルゴリズムには立ち入らないことにしよう。(5.2.3 の準3相因子分析と似たものになる。)

縦断的因子分析が、時系列データの分析のために考えられたものであるのに対し、多方法因子分析は多特性—多方法行列の分析の文脈から出現してきたものである。縦断的データでは、極めて大きな因子構造の変化が現われることは稀であるのに対し、多特性—多方法行列には方法間で非常に複雑な特性の間の絡みが見られることが多いからこの発想は理解しうるものである。多方法因子

分析は、縦断的因子分析とは対照的に、極めて探索的な方法と言ってよいと思われる。

この項でとりあげたモデルは、縦断的因子分析を除けば、3節であげた相関のどれも記述できるであろう。ただ変化しうるパラメータが多いために、生じている変化の記述がかえってあいまいになることはありうる。つまり、個別の因子分析の弱点がほぼこれらの方法に共通する弱点である。

縦断的因子分析は逆に適用の範囲が大幅に限られる。この方法が威力を発揮するのは3節の例4、例9の場合であろう。例1～例3、例6等もうまくいきそうに見えるが、これらの場合、この方法による解は軸の位置が偶然の変動によって左右されやすく、解釈の点で問題を生じそうである。

5.2 共通の因子負荷を仮定するモデル

この項では、

$$Z_k \cong F_k A^T$$

という形のモデルをとりあげる。すなわち、因子得点については機会ごとに変化することを認めるが、因子負荷についてはすべての機会にわたって共通とする。このことから、このモデルでは因子負荷は機会を通じて一定であると仮定されているとみなされ易いが、後に述べるように必ずしもそうとも言えない。“共通の”という語を用いた理由である。

5.2.1 共通因子負荷モデル

最初に主成分型のモデルと直接対応がつけやすいモデルをとりあげる。記号は前項のままとし、

$$R_{kk'} \cong AS_{kk'}A^T \tag{5.17}$$

とするが、制約条件は(5.2)ではなく、**S**の主対角線上に並ぶ同一機会間の共分散行列の平均を単位行列に等しいとする。すなわち、

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p S_{kk} = I \tag{5.18}$$

とする。各機会の因子得点 F_k の各列の分散は1ではないから、個々の $S_{kk'}$ は相関行列でなく共分散行列である。

5.1.1の場合と同じように、

$$A^{*T} A^* = I$$

となるような A^* を考え、これに対応して $S_{kk'}$ を

$$A^* S_{kk'}^* A^{*T} = AS_{kk'}A^T$$

となるような $S_{kk'}^*$ におきかえる。

$$S_5^2 = \text{tr} \sum \sum (R_{kk'} - AS_{kk'}A^T)^T (R_{kk'} - AS_{kk'}A^T) \tag{5.19}$$

を最小にする解は、これを(パラメータ行列の置きかえを行なったうえで) $S_{kk'}^*$, A^* で偏微分して O とおくことにより、

$$S_{kk'}^* = A^{*T} R_{kk'} A^* \tag{5.20}$$

及び固有方程式

$$\left(\sum_k \sum_{k'} R_{kk'} A^* A^{*T} R_{kk'} \right) A^* = A^* L \tag{5.21}$$

を満たすものであることがわかる。(5.21)の左辺の行列には A^* 自体が含まれているから適当な初期値(この場合は5.2.3で述べる \bar{R} の factoring によるものがよさそう)から始めて反復近似していくことになる。収束の後に、(5.20)による $S_{kk'}^*$ の平均

$$\bar{S}^* = \frac{1}{p} \sum_k S_{kk}^*$$

を、

$$\bar{S}^* = C^{*T} C^*$$

と factoring し、

$$A = A^* C^{*T} \tag{5.22}$$

$$S_{kk'} = (C^{*-1})^T S_{kk'}^* C^{*-1} \tag{5.23}$$

によって A , $S_{kk'}$ が求められる。 A , $S_{kk'}$ には回転を施すことができる。

この方法では、 $S_{kk'}$ がすべて相関行列ではなく共分散行列となっているから、その点で幾分解釈に困難をきたす。しかし、その点は S の事後的な変換によって埋め合わせることはある程度できるし、更に同一機会間の因子得点が必要しも直交しない ($S_{kk} \neq I$) このモデルには、因子負荷の変化にある程度対応できるという merit もある。

A			S			
	I	II	①		②	
			I	II	I	II
1	**	*	**			
2	**	*	*	**		
3	**	*				
4	*	**	**		**	
5	*	**		**	-*	**

図12 共通因子負荷モデルによる例7(図9)の相関行列の分析結果(模式図)。

このことについては、3 節の例 7 を考えるとよいであろう。このような相関行列にこの方法を適用すると、得られる因子負荷行列と因子得点間相関行列は図 12 のような形になるであろう。因子負荷が単純構造からズレてくることはこの場合やむを得ない。注目すべきは \mathbf{S} の主対角部分に位置する 2 つの 2×2 の行列である。機会 1 相互間では 2 つの因子得点の共分散は正となり、機会 2 相互間でのそれは負となる。このようにして、この方法では因子の“分化”がある程度記述されているわけである。

なお、あてはまりの良さの基準 S_0^2 は、

$$S_0^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} R_{kk'} R_{kk'} - \text{tr} \mathbf{L} \quad (5.24)$$

となる。

5.2.2 不変因子負荷モデル

同じ (5.17) のモデルで、各機会における因子得点間相関をすべて分散 1 で直交するという条件 (5.2) を制約条件として課することを考える。すなわち、 \mathbf{S} の形を 5.1.1 のモデルと同じ形にする。これなら \mathbf{S} の要素はすべて相関係数として解釈できることになる。

これは Hakstian (1973) が、主成分分析型のモデルとして考え、Case II と呼んでいるものと同等である。これを主成分分析型のモデルとして解くことはなかなか難しく、機会の数 $p=2$ の場合についての解法が得られるにとどまっている。しかし、因子分析型のモデルとしてなら、少し工夫すれば (5.19) の S_0^2 に相当するものを最小化するような解を比較的容易に得ることができる。

まず、 \mathbf{A} は各列が相互に直交し単位長さであるという条件、

$$\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^* = \mathbf{I}$$

を満足する \mathbf{A}^* におきかえる。 $\mathbf{S}_{kk'}$ も対応して $\mathbf{S}_{kk'}^*$ におきかえるが、同一機会間の行列 $\mathbf{S}_{kk'}^*$ は、すべて同一の行列 $\tilde{\mathbf{S}}^*$ とする。そこで最小化すべき基準は、

$$S_0^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} [R_{kk'} - \mathbf{A}^* \{ \delta_{kk'} \tilde{\mathbf{S}}^* - (1 - \delta_{kk'}) \mathbf{S}_{kk'}^* \} \mathbf{A}^{*T}]^T [R_{kk'} - \mathbf{A}^* \{ \delta_{kk'} \tilde{\mathbf{S}}^* - (1 - \delta_{kk'}) \mathbf{S}_{kk'}^* \} \mathbf{A}^{*T}] \quad (5.25)$$

となる。 $\delta_{kk'}$ は Kronecker のデルタである。 S_0^2 を $\tilde{\mathbf{S}}^*$ で偏微分して $\mathbf{0}$ とおくことにより、

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{A}^{*T} \left(\frac{1}{p} \sum_k R_{kk} \right) \mathbf{A}^* \quad (5.26)$$

同様にして、

$$\mathbf{S}_{kk'}^* = \mathbf{A}^{*T} R_{kk'} \mathbf{A}^*; \quad k \neq k' \quad (5.27)$$

S_0^2 を \mathbf{A}^* で偏微分して $\mathbf{0}$ とおき、整理すると、

$$\sum_k \sum_{k'} [R_{kk'} \mathbf{A}^* \mathbf{A}^{*T} \{ \delta_{kk'} \frac{1}{p} \sum_{k'} R_{kk'} - (1 - \delta_{kk'}) R_{kk'} \}] \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* (p \tilde{\mathbf{S}}^* + \sum_{k, k'} \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{S}_{kk'}^*) \quad (5.28)$$

となる。右辺の $(p \tilde{\mathbf{S}}^* + \sum_{k, k'} \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{S}_{kk'}^*)$ は対称行列だから、これを今までと同様に対角行列 \mathbf{L} とおきかえ、左辺の () 内の行列を、

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{p} \sum_k R_{kk} \quad (5.29)$$

と置くなどして更に整理すると、

$$(p \bar{\mathbf{R}} \mathbf{A}^* \mathbf{A}^{*T} \bar{\mathbf{R}} + \sum_{k, k'} R_{kk'} \mathbf{A}^* \mathbf{A}^{*T} R_{kk'}) \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{L} \quad (5.30)$$

という固有方程式の形となる。この場合も反復解法をとる必要がある。

(5.30) が収束したら、(5.26) によって求めた $\tilde{\mathbf{S}}^*$ を、

$$\tilde{\mathbf{S}}^* = \mathbf{C}^* \mathbf{C}^{*T} \quad (5.31)$$

と分解し、

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{C}^{*T} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{S}_{kk'} = (\mathbf{C}^{*-1})^T \mathbf{S}_{kk'}^* \mathbf{C}^{*-1} \quad (5.33)$$

によって、 \mathbf{A} 、 $\mathbf{S}_{kk'}$ が求められる。もちろん $\mathbf{S}_{kk} = \mathbf{I}$ である。この後、適当な回転を行なうことができる。

このモデルは、5.2.1 のそれに比べて解釈しやすさという点では格段に優れたものである。ただし、すべての R_{kk} に同じ因子負荷の積 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ があてはめられてしまうため、因子負荷が変化するデータに対しては、あてはまりの悪さとしてはあらわれるにせよ、それを行列 \mathbf{S} の上で読みとめることは難しくなるであろう。

5.2.3 平均相関行列の factoring

(5.29) の平均相関行列に対して、

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$

をあてはめるとする。これは、 $\bar{\mathbf{R}}$ に対して普通の因子分析を適用すればよい。これは上の 2 つのモデル、及び次の準 3 相因子分析のための初期値を提供するものとなる。

このモデルは、5.2.1 のモデルの主成分分析としての最小 2 乗解でもある (村上, 1979)。

5.2.4 準 3 相因子分析

先に、5.1.4 で述べたのと同じ理由により、 \mathbf{S} をもう一度因子分析することを考える。この場合、データ行列 \mathbf{Z}_k についてモデルは、

$$\mathbf{Z}_k \cong \mathbf{F} \mathbf{C}_k^T \mathbf{A}^T \quad (5.34)$$

となる。この形は、Tucker (1963, 1964, 1966) による 3 相因子分析 (three-mode factor analysis) の特殊な場合であり、既に Tucker (1963) 自身による若干の扱いがある他、主成分型のモデルとしての最小 2 乗解は Kroonenberg & de Leeuw (1977) によって与えられている。その因子変化に対する含意については Murakami (1983) 参照。

これを因子分析型のモデルとして考えると、

$$R_{kk'} \equiv AC_k C_k^T A^T$$

ということになり、これはまさしく (5.17) で $S_{kk'}$ を factoring したものに他ならない。このモデルを、村上 (1982) は準 3 相因子分析 (quasi three-mode factor analysis) と呼んだが、この最小 2 乗解は次のようにして得られる。

最小化すべき基準は、

$$S_{\text{誤}}^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - AC_k C_k^T A^T)^T (R_{kk'} - AC_k C_k^T A^T)$$

である。これを A を、

$$A^{*T} A^* = I$$

を満足する A^* におきかえて最小化しよう。対応する C_k は C_k^* とする。

まず、 $S_{\text{誤}}^2$ を C_k で偏微分して 0 とおくことにより、

$$\sum_k A^{*T} R_{kk'} A^* C_k^* = C_k^* (\sum_{k'} C_k^{*T} C_k^*) \quad (5.35)$$

を得る。右辺の $\sum_{k'} C_k^{*T} C_k^*$ は対称行列だから、これを対角行列と仮定し L とおくと、これは、

$$\begin{bmatrix} A^{*T} R_{11} A^* & A^{*T} R_{12} A^* & \dots & A^{*T} R_{1p} A^* \\ A^{*T} R_{21} A^* & A^{*T} R_{22} A^* & \dots & A^{*T} R_{2p} A^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{*T} R_{p1} A^* & A^{*T} R_{p2} A^* & \dots & A^{*T} R_{pp} A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_p^* \end{bmatrix} L \quad (5.36)$$

という形の固有方程式となる。

次に、 $S_{\text{誤}}^2$ を A^* で偏微分して 0 とおくことにより、

$$\sum_k R_{kk'} A^* C_k^* C_k^{*T} = A^* \left\{ \sum_k C_k^* (\sum_{k'} C_k^{*T} C_k^*) C_k^{*T} \right\}$$

ここで右辺の $\left\{ \sum_k C_k^* (\sum_{k'} C_k^{*T} C_k^*) C_k^{*T} \right\}$ は再び対称行列なのでこれを \tilde{L} とおき、更に左辺の最後の C_k^{*T} のところに、(5.35) の右辺の C_k^* をといた形のもの、

$$C_k^* = \sum_{k'} A^{*T} R_{kk'} A^* C_k^* L^{-1}$$

を代入して、

$$\sum_k \left\{ \left(\sum_{k'} R_{kk'} A^* C_k^* \right) L^{-1} \left(\sum_{k'} C_k^{*T} A^{*T} R_{kk'} \right) \right\} A^* = A^* \tilde{L} \quad (5.37)$$

が得られる。

適当な A^* の初期値 (これは \tilde{R} の固有ベクトルがよいと思われる) から始めて、(5.35) と (5.36) を交互に収束するまで反復する、いわゆる交互最小 2 乗法 (alternating least squares method) (高根, 1980) によって A^* と C_k^* を得ることができる。ただし、(5.37) の左辺の行列の中の A^* は、1 回前の反復において得られたものを用いる。

このモデルには、 A と C_k の scaling に関する任意性があるが、 C_k に関して

$$\frac{1}{p} \sum C_k C_k^T = I \quad (5.38)$$

とすれば、これは (5.18) と同等である。これは、次の \tilde{F}_k 、

$$\tilde{F}_k = F C_k^T$$

を機会 k の因子得点とみなしたとき、

$$C_k C_k^T = \frac{1}{N} \tilde{F}_k^T \tilde{F}_k$$

となり、 $C_k C_k^T$ は因子得点間の共分散行列とみなしうること、及びこのとき、因子負荷行列 A が、

$$A = \frac{1}{Np} \sum_k Z_k^T \tilde{F}_k$$

と、データと \tilde{F}_k との相関行列とみなせること、更に、(独自性について適当な仮定の下で、)

$$\tilde{A}_k = A C_k$$

を機会 k の因子負荷行列とすると、

$$\tilde{A}_k = \frac{1}{N} Z_k^T F$$

とみることができること等によって正当化されよう。

更に、

$$C_k = \frac{1}{N} \tilde{F}_k^T F$$

でもあり、 C_k 自体共分散行列とみなされる。

なお、このモデルでは因子得点行列 F の列数と因子負荷行列 A の列数は同じでなくてもよいこと、すなわち C_k は正方形でなくてもよいことは重要である。この結果として、このモデルでは、因子得点と変化と因子負荷の変化が定性的には識別可能となる (Murakami, 1983)。

回転に関しては、 T 、 \tilde{T} を直交行列とすると、

$$AC_k C_k^T A^T = (A\tilde{T})(\tilde{T}^T C_k T)(\tilde{T}^T C_k T)^T (A\tilde{T})^T$$

と2つの回転が可能である。一般には A を単純構造化するように \tilde{T} を定め、その後 C_k を単純構造化するように T を定めることによって解釈しやすい解を得ることが出来る。他方、 A と F の列数を等しくとった場合には C_k を可能な限り対角行列に近づけるように \tilde{T} と T を決めることも考えられる (Kroonenberg & de Leeuw, 1977)。これは、次の PARAFAC の近似解となる。

5.2.5 PARAFAC (直交解)

Harshman (Harshman & Berenbaum, 1981) は、3相データの因子モデルとして、

$$Z_k \equiv F D_k A^T$$

(D_k は対角行列) という形のものを考えた。 F の直交性を仮定すると、

$$R_{kk'} \equiv A D_k D_{k'} A^T \quad (5.39)$$

となるが、Harshman は $k = k'$ の部分のみに対して、

$$S_9^2 = \text{tr} \sum_k (R_{kk} - A D_k^2 A^T)^T (R_{kk} - A D_k^2 A^T) \quad (5.40)$$

を最小化するように A と D_k^2 を求める。(Harshman は、データの分散に関する標準化を行わないから、ここで R_{kk} とかいているものは共分散行列である。)

この解も先の縦断的因子分析と同様、回転を許さない一意的な解となる (Knuska, 1976)。ただし、これは (5.39) の形からもわかるように、 D_k^2 が相互に実質的に異なっている場合、すなわち R_{kk} が互いに異なる場合に限られる。そうでなければ、各機会の因子負荷 $A D_k$ はすべて等しく、それを任意に直交回転することが認められることになろう (Harshman & Berenbaum, 1981)。

この方法の発想の起源は Cattell (1944) の平行比例プロフィール (parallel proportional profiles) にある。Cattell は、いわゆる単純構造に向けての因子の回転を恣意的なものとして批判し、それにかわるものとして、因子得点が時系列的に比例的に変化すること、すなわち形式的に言えば各機会の因子得点が $F_k = F D_k$ となるように軸を回転することを提唱した。Harshman の基本モデルはこれの忠実な表現であり PARAFAC の名もそこに由来する。従って、このモデルの前提は一致性係数行列が単位行列となるという意味で因子負荷は一定でありかつ因子得点は分散のみが変化するというかなり強いものである。

ところで、(5.40) を最小化するアルゴリズムは、このモデルと平行して独立に開発された Carroll & Chang

(1970) の INDSCAL のそれと一致する。このアルゴリズム、(5.40) を要素を用いて、

$$S_9^2 = \sum_k \sum_j \sum_j' (r_{jkj'k} - \sum_j^{(L)} a_{ji} d_{ki} a_{j'i}^{(R)})$$

とかいたとき (ここで $a_{ji}^{(L)}$ は、(5.40) の D_k^2 の左側からかかる A の要素、 $a_{ji}^{(R)}$ は同じく右側からかかる A^T の要素をさす) このカッコ内を一種の重回帰方程式とみなして反復的に解くものである。例えば、 $a_{ji}^{(R)}$ について解くときには、 $a_{ji}^{(L)} \cdot d_{ki}$ はこれにかかる定数とみなせば、通常の最小2乗法によって $a_{ji}^{(R)}$ を求めることができる。次に $a_{ji}^{(L)}$ を求めるには $d_{ki}^2 a_{ji}^{(R)}$ を定数とみなせば同じことができ、 d_{ke} については $a_{ji}^{(L)} a_{j'i}^{(R)}$ を定数とすればよい。こうして3つの行列 $A^{(L)}$ 、 D_k 、 $A^{(R)}$ について交互に収束するまで続ける。(高根, 1980) にもっとスマートな解説がある。) 筆者の経験によれば、これは今まで述べてきた諸方法に比べて収束は遅くかつ次元の数が少ない場合以外にはあまりうまく働かないように思われる。

PARAFAC をこの形で用いた例として Haan (1981) がある。このモデルは R 全体ではなく R_{kk} の部分だけに対するあてはめしかしていないため、機会間で因子得点間相関をみる場合には、因子得点を ad hoc に推定してからでないといけない。この点、モデル自体の魅力にもかかわらず、3相データの因子分析法としてはやや中途半端な感が否めないように思われる。

5.2.6 PARAFAC の拡張

PARAFAC を相関行列 R の全体に対してあてはめるために、ただちに思いつかれるのは、(5.39) から、

$$S_{10}^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A D_k D_{k'} A^T)^T (R_{kk'} - A D_k D_{k'} A^T) \quad (5.41)$$

の最小化であろう。これは Khatri—Rao の因子モデルと呼ばれるものと一致する (McDonald, 1980)。しかし3節の例1のように $k \neq k'$ のときの $R_{kk'}$ が、 R_{kk} をほぼ再現しているような場合ならばともかく、実用上このモデルはほとんど使いものにならない。 D_k の要素には負の値が頻りに現れるし、 A の列の中にはほとんど同一のものがでてくる。これは、全般に値の小さくなりがちなる $R_{kk'}$ の部分 (3節の例2等) に最小2乗基準を適用する限りやむをえぬことである。このような事態を回避するために、 A の各列に直交条件を課すことも考えられるが、これはデータに対するあてはまりの点で余り満足できない結果となる。(これを実行するなら、Meredith & Tisak, 1982の、定常ウェイトをもつ正準相関分析における LAROOT というアルゴリズムが使われる。)

PARAFAC の考え方を生かしながら、相関行列全体の説明をはかるためには、基本モデルを放棄し、縦断的因子分析風に、

$$\frac{1}{N} \mathbf{F}_k \mathbf{F}_{k'}^T = \mathbf{D}_{kk'}$$

($\mathbf{D}_{kk'}$ は対角行列) と仮定するのがよさそうである。 $k \neq k'$ の場合の $\mathbf{D}_{kk'}$ の要素は因子得点の再検査信頼性相当のものとなる。換言すれば (5.17) において、 \mathbf{S} を、

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \dots & \mathbf{D}_{1p} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{D}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{D}_{p1} & \mathbf{D}_{p2} & \dots & \mathbf{D}_{pp} \end{bmatrix}$$

とすることに相当する。これは縦断的因子分析において因子負荷を一定とし、因子得点の分散が機会間で異なることを認めるモデルということになる。

最小化基準を、

$$S_{11}^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (\mathbf{R}_{kk'} - \mathbf{A} \mathbf{D}_{kk'} \mathbf{A}^T)^T (\mathbf{R}_{kk'} - \mathbf{A} \mathbf{D}_{kk'} \mathbf{A}^T) \quad (5.42)$$

とすると、これを最小化するには、INDSCAL のアルゴリズムがそのまま使える。($\mathbf{R}_{kk'}$ は $k \neq k'$ のとき非対称となるが、このことは実質的な障害とはならない。) \mathbf{A} の scaling は、 \mathbf{D}_{kk} を、

$$\frac{1}{p} \sum_k \mathbf{D}_{kk} = \mathbf{I}$$

とるように決めることが (他の方法との比較のためには) 適当と思われる。

以上、この項で述べた因子負荷を共通なものとする諸モデルは、Bentler (1973), Hakstian (1973) も言うように、実用上は最も有用な場合が多いであろう。特に、5.2.1 と 5.2.4 のモデルは、5.1 における諸モデルに比して特に適合度が低いとか解釈に困難をきたす場合を除けば、3 節で例示したどのような相関行列にも一応の対処ができるものである。

これに対して、5.2.2 のモデルは、同一機会間の相関行列 \mathbf{R}_{kk} がほぼ同一である場合に限って適用できる。3 節の例で言えば、例 7 と例 9 では具合が悪いことになろう。5.2.5 と 5.2.6 の PARAFAC は、例 9 が唯一の適用可能な場合であろう。(共分散行列で考えれば、例 1 ~ 例 3 で、うまくいく場合もある。)

5.3 共通の因子得点を仮定するモデル

この項では前項と逆に、因子得点はすべての機会にわたって共通で因子負荷が機会ごとに異なるモデル、すなわち、

$$\mathbf{Z}_k \cong \mathbf{F} \mathbf{A}_k^T$$

の形をとるものを取りあげる。“共通”の因子得点が必要でも“安定”な因子得点を意味しないことは、前項の因子負荷の場合と同様である。

5.3.1 共通因子得点モデル

上のモデルで因子得点は直交と仮定し因子分析型のモデルとして考えると、

$$\mathbf{R}_{kk'} \cong \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k'}^T \quad (5.43)$$

となる。これは、(3.9) において、 \mathbf{S} の要素となる機会間の因子得点間相関行列をすべて単位行列とする、すなわち、

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

という場合となる。

最小化基準は、

$$S_{12}^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (\mathbf{R}_{kk'} - \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k'}^T)^T (\mathbf{R}_{kk'} - \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k'}^T) \quad (5.44)$$

となるが、これを最小化する \mathbf{A}_k は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \dots & \mathbf{R}_{1p} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \dots & \mathbf{R}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{R}_{p1} & \mathbf{R}_{p2} & \dots & \mathbf{R}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \mathbf{L} \quad (5.45)$$

(\mathbf{L} は対角行列) という固有方程式を満足するものであることは容易にわかり、要するに \mathbf{R} の factoring に帰着する。各 \mathbf{A}_k に施される直交回転は同一のものでなければならない。

この方法を Bentler (1973) は identical factor score method と呼び、Hakstian (1973) は Case III として主成分分析型のモデルで同等の解を導いている。

直観的によく適合すると思われるのは、3 節の例 5 であり、この場合の因子負荷は図 13 の a のようになる。これは Baltes & Nesselroade の言う c 型因子そのものの表現になっていると言えよう。例 1 のような場合には図 13 の b のようになり、これも a 型因子の表現として問題はない。更に、例 3 の場合には、因子数を 4 とすれば図 13 の c の形の因子負荷行列ができる。この第 I 因子と第 III 因子、第 II 因子と第 IV 因子は同じパターンを示しており、それぞれ異なった (独立の) 因子得点に対応してい

るわけだから、結局 b 型因子の適切な表現とみることができる。従ってこのモデルは不安定な因子得点をもつ場合にも対処できることになる。

この方法が解釈上の問題をひきおこすのは、例 2 の場合である。この場合の結果は機会間相関行列 R_{21} の部分の要素の大きさに依存して変わるのであるが、これが比較的小さいと、図 13 の c に近い形となって機会間の関係が表現されないことになり (小嶋, 1979), これがやや大きい目の場合には、図 13 の b に近い 2 つの因子の他にもう 1 つ一見奇妙な第 III 因子がつけ加わった図 13 の d のようなことになる。

	a		b		c				d		
	I	II	I	II	I	II	III	IV	I	II	III
1	**		**		**				**		*
2	**		**		**				**		*
① 3	**		**		**				**		*
4		**		**		**				**	*
5		**		**		**				**	*
1		**		**			**		**		-*
2		**		**			**		**		-*
② 3	**		**				**		**		-*
4	**			**				**	**		-*
5	**			**			**		**		-*

図 13 共通因子得点モデルによる因子負荷 (模式図) a は例 5 (図 7), b は例 1 (図 3), c は例 3 (図 5), d は例 2 (図 4) の各相関行列の分析にそれぞれ対応する。

この第一の場合は、varimax 回転等の解析的な単純構造志向型の回転法が因子負荷の値を極端なものとするこの副作用と考えられる。第二の場合は、本来小さな値をとるべき S_{21} を無理に単位行列としたことの結果である。これは Guttman (1954) の simplex 型の相関行列を factoring した場合に生ずる問題と同じである。

この方法は通常の因子分析のプログラム以外のものを必要としないので取りつき易いものではあるが、上記のようにその解釈にはかなり注意が必要であると言える。

なお、5.2.4 で述べた準 3 相因子分析が、この方法による因子負荷行列 A_k を、

$$A_k \cong AC_k$$

と分解したものとみなすこともできることを指摘しておきたい。準 3 相因子分析が因子負荷の変化と因子得点の変化を区別しうるのは、このように 2 つのモデルの一種の総合化であるためでもある (村上, 1979)。

5.3.2 インター-バッテリー法

2 つの機会において測定を反復することの目的が、2 つの機会間の関係をできるだけ多くとりだしたい、ということにあるとすれば、5.3.1 の方法であげた第一の問題点を回避するために、 $R_{kk}(k \neq k')$ の部分に焦点をあてた方法を考える理由がある。Tucker (1958) の提案したインター-バッテリー法は機会の数 p が 2 の場合に限定されるが、このような目的をもつものである。(この方法の適用の対象となるデータは 3 相データに限定されない。すなわち、機会 1 と機会 2 の変数は同一である必要がない。)

このモデルでは、因子負荷行列 A_1, A_2 を、2 つの機会に共通する因子に対する負荷 $A_{1\uparrow}, A_{2\uparrow}$ と、それぞれの機会内のみ存在する因子に対する負荷 \bar{A}_1, \bar{A}_2 にわけて考える。すなわち、

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1\uparrow} & \bar{A}_1 & O \\ A_{2\uparrow} & O & \bar{A}_2 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

これにより、

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A_{1\uparrow}A_{1\uparrow}^T + \bar{A}_1\bar{A}_1^T & A_{1\uparrow}A_{2\uparrow}^T \\ A_{2\uparrow}A_{1\uparrow}^T & A_{2\uparrow}A_{2\uparrow}^T + \bar{A}_2\bar{A}_2^T \end{bmatrix}$$

ここで、 R_{12} の部分にのみ着目し、

$$S_{12}^2 = \text{tr}(R_{12} - A_{1\uparrow}A_{2\uparrow}^T)^T(R_{12} - A_{1\uparrow}A_{2\uparrow}^T)$$

を最小化するような $A_{1\uparrow}, A_{2\uparrow}$ を求めるのがこの方法である。 T を任意の非特異な正方行列とするとき、

$$A_{1\uparrow}A_{2\uparrow}^T = (A_{1\uparrow}T)(A_{2\uparrow}T^{-1})^T$$

だから、一般性を失うことなく

$$A_{1\uparrow}^T A_{1\uparrow} = I$$

としてよい。 S_{12}^2 を $A_{2\uparrow}$ で偏微分して O とおくことにより

$$A_{2\uparrow} = R_{21} A_{1\uparrow} \quad (5.47)$$

($R_{12}^T = R_{21}$ を利用している。) 次に S_{12}^2 を $A_{1\uparrow}$ で偏微分して O とおき、(5.47) を代入して、

$$(R_{12} R_{21}) A_{1\uparrow} - A_{1\uparrow} (A_{1\uparrow}^T R_{12} R_{21} A_{1\uparrow}) = O$$

ここで第 2 項の $(A_{1\uparrow}^T R_{12} R_{21} A_{1\uparrow})$ は対称行列だから、これを対角行列 L でおきかえて、

$$(R_{12} R_{21}) A_{1\uparrow} = A_{1\uparrow} L \quad (5.48)$$

という固有方程式に帰着する。 A_2^\dagger は (5.47) によって求めればよい。

A_1^\dagger と A_2^\dagger の scaling は前に示したように任意であるが、Tucker は、

$$A_1^{\dagger T} A_1^\dagger = L^1 = A_2^{\dagger T} A_2^\dagger \quad (5.49)$$

となるようにすることを提案している。この後 A_1^\dagger と A_2^\dagger に同じ直交回転を施すことができる。

この方法の解が時に極めて不合理なものとなりうることは、Gibson (1960, 1961) によって指摘されているがその理由は (5.49) にある。 A_1^\dagger と A_2^\dagger の寄与を等しくする根拠はどこにもなく、この結果 3 節の例 9 のような場合、 R_{11} の部分に対して \bar{A}_1 を虚数にしなければならないことがありうる。

Kristof (1967) は、この解法のかわりに、5.3.1 の解として得られた A_1, A_2 を正準相関分析のアルゴリズム等を用いて (5.46) に変形していく方法を提案している。

5.3.3 3つ以上の機会に対するインターバッテリー法

Tucker (1958) の方法は機会の数 p が 2 の場合に限定されていたために、不合理が生じた。ところが、 $p \geq 3$ の場合については、各機会の因子負荷の scaling は一意的に定まる。なぜなら、例えば $p=3$ のとき、

$$R_{12} \cong A_1^\dagger A_2^{\dagger T}$$

$$R_{13} \cong A_1^\dagger A_3^{\dagger T}$$

$$R_{23} \cong A_2^\dagger A_3^{\dagger T}$$

を最大限に成り立たせたとき、これらの右辺の値を変えないような変換は正規直交変換以外にありえないからである。

最小化基準を、

$$S_{14}^2 = \text{tr} \sum_{k \neq k'} \sum_{k'' \neq k'} (R_{kk''} - A_k^\dagger A_{k''}^{\dagger T})^T (R_{kk''} - A_k^\dagger A_{k''}^{\dagger T})$$

とするとき、この最小化は、Harman & Jones (1966) の MINRES 法に近いやり方で達成することができる。MINRES 法は共通性推定を含む因子分析の最小 2 乗解法であるが、 S_{14}^2 の最小化はその一般化とみなすことができる。つまり、 R の対角要素だけを推定すべき未知数と考えるのが通常の共通性推定であるが、 S_{14}^2 は R の主対角線上の行列 $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{pp}$ をすべて丸ごと未知数と考えていることになるからである。

S_{14}^2 を要素を用いてかくと、

$$S_{14}^2 = \sum_{k \neq k'} \sum_{k'' \neq k'} \sum_{j'} (r_{jkj'k''} - \sum_l a_{jkl} a_{j'k''l})^2 \quad (5.50)$$

となる。先の INDSCAL と同じように、 a_{jkl} を定

数とみなすと、これは $a_{j'k''l}$ を重みとする重回帰方程式の推定と同じ形になる。 j' と k'' の組み合わせごとに一組のパラメータが推定されるが、それを即座に a_{jkl} の値として置きかえてゆけば収束は速い。

筆者の検討によれば、因子数が過大なものでない限り不合理な解が生ずることは余りないようである。

以上の共通の因子得点を仮定する方法は、どのような相関行列にも一応適用することができると言える。この方法群において問題はむしろ解釈に際しての誤解の生じ易さにあるように思われる。

5.4 因子負荷、因子得点をともに共通と仮定する方法最後に

$$Z_k \cong FA^T$$

というモデルを考えよう。これは主成分分析型のモデルとして、Hakstian (1973) が Case I として提出している。因子得点の直交性を仮定すれば因子分析型のモデルは、

$$R_{kk'} \cong AA^T$$

である、

最小化基準を S_{15}^2 とすると、これは、

$$S_{15}^2 = \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - AA^T)^T (R_{kk'} - AA^T) \quad (5.51)$$

である。これを最小化する A は、

$$\bar{R} = \frac{1}{p^2} \sum_k \sum_{k'} R_{kk'}$$

とするとき、固有方程式

$$\bar{R}A = AL \quad (5.52)$$

を満足するものであることは容易に示される。

\bar{R} は、 R の要素行列の平均であるが、これはまた

$$\bar{Z} = \frac{1}{p} \sum_k Z_k$$

とするとき

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \bar{Z}^T \bar{Z}$$

すなわち、各被験者の各変数における p 回の測定値の平均値の共分散行列でもある。

このモデルで説明できるのは、3 節の例 1 の場合以外にはなく、“変化” の記述には全くならないが、データの最も節約的な記述を与える。

以上、この節で述べてきたモデルをまとめて表 1 に示す。

表1 モデルの要約¹⁾

名	称	基本モデル	制約条件	最小化基準 ²⁾	回転	文献 ³⁾
1.1	一般的モデル	$Z_k \equiv F_k A I$	$S_{kk} = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k (R_{kk} - A_k S_{kk} A_k^T)^2$	k ごとに可	
1.2	個別の因子分析	同上	同上	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k (R_{kk} - A_k A_k^T)^2$	同上	適用例多数
1.3	縦断的因子分析	同上	$S_{kk'} = \begin{cases} I, & k = k' \\ D_{kk'}, & k \neq k' \end{cases}$ ($D_{kk'}$ は対角行列)	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A_k S_{kk'} A_k^T)^2$	不可	Corballis (1973)
1.4	多方法因子分析	$Z_k \equiv F C I A I$	$\frac{1}{N} F^T F = I$ $C_k C_k^T = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A_k C_k C_k^T A_k^T)^2$	A_k は k ごとに可 C_k は全体として可	Jackson (1975)*
2.1	共通因子負荷モデル	$Z_k \equiv F_k A^T$	$\frac{1}{p} \sum_k S_{kk} = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A S_{kk} A^T)^2$	可	事実上これと等価な方法の適用例多数
2.2	不変因子負荷モデル	同上	$S_{kk} = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A S_{kk} A^T)^2$	可	Hakstian (1973)*
2.3	平均相関行列の因子分析	同上	$\frac{1}{p} \sum_k S_{kk} = I$	$S_k^2 = \text{tr} (\bar{R} - A A^T)^2, \bar{R} = \frac{1}{p} \sum_k R_{kk}$	可	
2.4	準3相因子分析	$Z_k \equiv F C_k A^T$	$\frac{1}{N} F^T F = I$ $\frac{1}{p} \sum_k C_k C_k^T = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A C_k C_k^T A^T)^2$	A, C_k にそれぞれ可	Kroonenberg & de Leeuw (1977)* 村上 (1982)
2.5	PARAFAC (直交解)	$Z_k \equiv F D_k A^T$ (D_k は対角行列)	$\frac{1}{N} F^T F = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k (R_{kk} - A D_k^2 A^T)^2$	不可	Harshman & Berenbaum (1981)
2.6	PARAFAC (拡張)	$Z_k \equiv F_k A^T$	$S_{kk'} = D_{kk'}$ ($D_{kk'}$ は対角行列) $\frac{1}{p} \sum_k D_{kk} = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A D_{kk} A^T)^2$	不可	
3.1	共通因子得点モデル	$Z_k \equiv F A I$	$\frac{1}{N} F^T F = I$	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A_k A_k^T)^2$	A_k 全体に対して可	適用例多数
3.2	インター・パッチリー法	同上(ただし $p=2$)	同上	$S_k^2 = \text{tr} (R_{kk} - A_k A_k^T)^2$	同上	Tucker (1958)
3.3	インター・パッチリー法 (一般化)	$Z_k \equiv F A I$	同上	$S_k^2 = \text{tr} \sum_k \sum_{k'} (R_{kk'} - A_k A_k^T)^2$	同上	
4.	不変化モデル	$Z_k \equiv F A^T$	同上	$S_k^2 = (\bar{R} - A A^T)^2, \bar{R} = \frac{1}{p} \sum_k \sum_{k'} R_{kk'}$	可	Hakstian (1973)*

1) $R_{kk'} = \frac{1}{N} Z_k^T Z_{k'}, S_{kk'} = \frac{1}{N} F^T F F_k, N$ は被験者の数, p は機会の数とする。

2) $X^T X$ の形の式を簡単のため X^2 と記した。

3) *は, 主成分分析型のモデルとして記述されたもの。

表 2 多特性—多方法行列 (Kelley & Fiske)

	Staff ratings					Peer ratings					Self ratings				
	1)	2)	3)	4)	5)	1)	2)	3)	4)	5)	1)	2)	3)	4)	5)
Staff ratings															
1) Assertive	1.00	.37	-.24	.25	.35	.71	.39	-.27	.03	.19	.48	.17	-.04	.13	.37
2) Cheerful	.37	1.00	-.14	.46	.19	.35	.53	-.31	-.05	.05	.31	.42	-.13	.27	.15
3) Serious	-.24	-.14	1.00	.08	.09	-.18	-.15	.43	.03	.04	-.22	-.10	.22	-.03	-.22
4) Unshakable poise	.25	.46	.08	1.00	.31	.26	.38	-.06	.02	.29	.19	.10	-.13	.22	.09
5) Broad interests	.35	.19	.09	.31	1.00	.41	.29	.03	.07	.47	.12	-.03	-.05	-.04	.26
Peer ratings															
1) Assertive	.71	.35	-.18	.26	.41	1.00	.37	-.15	.11	.33	.46	.09	-.04	.10	.27
2) Cheerful	.39	.53	-.15	.38	.29	.37	1.00	-.19	.23	.22	.36	.24	-.11	.15	.12
3) Serious	-.27	-.31	.43	-.06	.03	-.15	-.19	1.00	.19	.19	-.15	-.25	.31	.00	-.07
4) Unshakable poise	.03	-.05	.03	.20	.07	.11	.23	.19	1.00	.29	.12	-.11	.06	.14	.05
5) Broad interests	.19	.05	.04	.29	.47	.33	.22	.19	.29	1.00	.23	-.03	.06	-.03	.35
Self ratings															
1) Assertive	.48	.31	-.22	.19	.12	.46	.36	-.15	.12	.23	1.00	.23	-.05	.16	.21
2) Cheerful	.17	.42	-.10	.10	-.03	.09	.24	-.25	-.11	-.03	.23	1.00	-.12	.26	.15
3) Serious	-.04	-.13	.22	-.13	-.05	-.04	-.11	.31	.06	.06	-.05	-.12	1.00	.11	.17
4) Unshakable poise	.13	.27	-.03	.22	-.04	.10	.15	.00	.14	-.03	.16	.26	.11	1.00	.31
5) Broad interests	.37	.15	-.22	.09	.26	.27	.12	-.07	.05	.35	.21	.15	.17	.31	1.00

原

著

6. 数値例

この節では、5節でとりあげたモデルのうちから7種を選び、同一のデータ(相関行列)に適用してその結果を比較してみる。とりあげるのは、

- 1.1 一般的モデル
- 2.1 共通因子負荷モデル
- 2.2 不変因子負荷モデル
- 2.4 準3相因子分析
- 2.6 拡張されたPARAFAC
- 3.1 共通因子得点モデル
4. 不変化モデル

である。これらは、最小化基準が相互に比較可能な点から選ばれた。

分析の対象となるのは、村上(1981)でもとりあげた Kelly & Fiske (Campbell & Fiske, 1959より引用)の多特性-多方法行列(表2)である。

まず、7種のモデルのあてはまりを比較したものが表3である。因子数は2.4と3.1以外は3、3.1は4、2.4は因子得点行列の列数が4、因子負荷の列数が3である。(3.1、2.4でこの数を選ぶ理由は、村上(1981)参照。) S^2 は、それぞれのモデルの最小化基準(それぞれ S_{11}^2 , S_{22}^2 , S_{33}^2 , S_{11}^2 , S_{12}^2 , S_{15}^2 に相当する)。であり、 p は、これを $\text{tr} \sum \sum \mathbf{R}_{kk} \mathbf{R}_{kk}$ の値(表2の相関係数の2乗和, 27.30)で除したもので、すなわち、相関係数の2乗のうちモデルによって説明されない部分の割合である。更に、モデル中の独立なパラメータの数を参考のために掲げた。

S^2 が小さく、独立なパラメータの数が少ないモデルが一般的に言えば(そのデータに対する)良いモデルということになる。データが多変量正規分布をなし、パラメータが最尤推定値であれば、あてはまりの良さとパラメータの数のバランスの上で最良のモデルを選択する

表3 各モデルのあてはまりの良さ

モデル	S^2	p	因子数 $q(Q)$	独立なパラ メータの数
1.1	2.55	.093	3	63
2.1	2.79	.106	3	51
2.2	2.90	.106	3	39
2.4	4.69	.172	3(4)	36
2.6	3.53	.129	3	30
3.1	4.30	.157	4	54
4.	8.00	.293	3	12

ための情報量基準(例えば、坂元・石黒・北川, 1983)を用いることができる。ここでは、その条件は満足されていないから、選択の基準は直観的なものにならざるを得ない。

表3をしらべてみると、1.1、2.1、2.2の各モデルは、この順で制約条件が増し、独立なパラメータの数を減じているにもかかわらず、 S^2 の値はさほど目立った増加を示さず、各機会の因子負荷行列を共通のものと仮定すること、及びそれを不変のものと仮定することには大きな無理がないことを示している。このことは、表2において主対角線上に並ぶ同一方法内の 5×5 の部分相関行列が3つともほぼ同じであることから首肯されよう。次の2.4の準3相因子分析は、パラメータ数のわずかな減少に対し、 S^2 は著しく増加するところから、あてはまりの面からは余り良好なモデルとはみなし難い。むしろ2.6の拡張されたPARAFACの方が少数のパラメータでよいあてはまりを示している。3.1の共通因子得点モデルはパラメータ数が2.1以上に多いにもかかわらずあてはまりは著しく悪い。最後の不変化モデルのあてはまりは、当然のことながら最悪である。

以上から読みとれることは、この多特性-多方法行列には何らかの“変化”が含まれており、それは因子負荷の“変化”と言うよりは、因子得点のそれであるとみなされる、ということになる。

次に、各モデルのパラメータの内容を見ていこう。まず表4には、2.1の初期値となる機会ごとの個別の因子分析による因子負荷、2.1の回転前の因子負荷、同じく回転後の因子負荷が示されている。初期値と収束後の値の間に著しい相違はない。回転後の因子負荷は機会間でほぼ同一であり、第I因子には、AssertiveとBroad interestが、第II因子にはSeriousが、第III因子にはCheerfulとUnshakable poiseが高い負荷を示している。

表5は、対応する因子得点間相関行列である。これについては後に示す他のモデルと比較するだけにとどめておこう。

表6に示したのは、2.1のモデルの初期値となる2.3の平均相関行列の因子負荷、2.1の収束後の因子負荷、同じくそのvarimax回転後の因子負荷、更に2.2のモデルの回転後の因子負荷である。ここでも初期値と最終値の間に大きな違いは認められない。回転後の3つの因子は、表4のそれと同様である。2.1の因子負荷と2.2の因子負荷がほぼ完全に同一のものとなるのは、因子負荷を不変なものともみなしうるようなデータの特徴であると思われる。

2.2の不変因子負荷モデルの因子得点間相関行列を示

表4 一般的モデルの因子負荷

モデル	1.2			1.1 (回転前)			1.1 (回転後)		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Staff ratings									
1) Assertive	.72	-.31	.35	.79	-.20	.37	.66	-.54	.27
2) Cheerful	.74	-.11	-.47	.74	-.13	-.54	.04	-.27	.89
3) Serious	-.17	.90	-.03	-.26	.82	-.14	.07	.87	.01
4) Unshakable poise	.71	.34	-.39	.64	.43	-.41	.28	.25	.78
5) Broad interests	.61	.35	.60	.56	.51	.49	.88	.15	.11
Peer ratings									
1) Assertive	.70	-.34	.39	.80	-.10	.39	.86	-.25	.04
2) Cheerful	.69	-.36	-.32	.76	-.14	-.44	.37	-.47	.66
3) Serious	.00	.87	.17	-.23	.84	.11	-.01	.87	.10
4) Unshakable poise	.56	.45	-.59	.34	.56	-.60	.03	.27	.84
5) Broad interests	.70	.33	.40	.58	.56	.31	.72	.41	.23
Self ratings									
1) Assertive	.58	-.31	.70	.71	-.17	.46	.83	-.23	.10
2) Cheerful	.60	-.47	-.35	.59	-.36	-.48	.13	-.32	.77
3) Serious	.14	.85	.08	-.05	.86	-.08	-.03	.86	-.02
4) Unshakable poise	.71	.16	-.43	.60	.29	-.56	.13	.33	.80
5) Broad interests	.68	.34	.15	.64	.47	.25	.69	.43	.19

表5 一般的モデル(1.1)の因子得点間相関行列(回転後)

	Staff ratings			Peer ratings			Self ratings		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Staff ratings									
I	1.00								
II	.00	1.00							
III	.00	.00	1.00						
Peer ratings									
I	.62	-.19	.24	1.00					
II	-.00	.49	-.33	.00	1.00				
III	.07	.04	.25	.00	.00	1.00			
Self ratings									
I	.37	-.40	.18	.53	-.14	.12	1.00		
II	.05	.14	-.16	.01	.34	.00	.00	1.00	
III	-.11	-.10	.37	-.02	-.21	.10	.00	.00	1.00

下三角部分のみを示す。

表6 共通の因子負荷を仮定するモデルにおける因子負荷行列 (1)

モデル trait \ factor	2.3			2.1 (回転前)			2.1 (回転後)			2.2 (回転後)		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1) Assertive	.67	-.32	.47	.77	-.16	.41	.81	-.33	.15	.81	-.33	.15
2) Cheerful	.69	-.31	-.40	.71	-.21	-.48	.18	-.36	.78	.18	-.36	.79
3) Serious	-.02	.88	.02	-.19	.83	-.01	-.00	.85	.01	-.00	.85	.00
4) Unshakable poise	.66	.32	-.49	.53	.46	-.53	.14	.33	.81	.14	.33	.80
5) Broad Interests	.66	.36	.44	.59	.51	.38	.77	.36	.16	.77	.37	.16

表7 不変因子負荷モデル (2.2) の因子得点間相関行列 (回転後)

	Staff ratings			Peer ratings			Self ratings		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Staff ratings									
I	1.00								
II	.00	1.00							
III	.00	.00	1.00						
Peer ratings									
I	.65	-.03	.19	1.00					
II	-.23	.52	-.29	.00	1.00				
III	.10	-.03	.33	.00	.00	1.00			
Self ratings									
I	.47	-.28	.13	.51	-.14	.14	1.00		
II	-.00	.17	-.16	.01	.34	-.04	.00	1.00	
III	-.07	-.14	.36	-.07	-.19	.13	.00	.00	1.00

下三角部分のみを示す。

したのが表7である。一見して表5と極めてよく似ている。更に、ここには示さないが2.1の共通因子負荷モデルのそれとも同一方法内の部分を除きほとんど完全に一致している。

この表ではまず、ゴチックで示した同特性 (同因子) 異方法間の相関に注目する必要がある。StaffとPeerの間ではこの相関はかなり高く、いずれの因子もほぼ満足すべき収束的妥当性を示しているとみられる。Selfと他の2つの“方法”の間には若干問題がある。特に、第II因子 (Seriousに代表される) のSelfとStaffの間の相関 (.17) と、第III因子 (CheerfulとUnshakable poiseに代表される) のSelfとPeerの間の相関 (.13)

は目立って低く、この部分での収束的妥当性には疑問が投げかけられる。

異方法間の相関係数では、ゴチックで示した対角要素以外のところに大きな値が幾つか見られる。例えば、Staffとの第III因子とPeerの第II因子の間の-.29、Staffの第II因子とSelfの第I因子の間の-.28等である。村上(1981)は、Seriousと他の項目との相関のありかたが方法間で異なることが、Seriousに代表される因子の収束的妥当性を低めていると論じたが、ほぼ同様の結論がこの表からも得られると言えよう。

表5の一般モデルの因子得点間相関と比較すると、同因子間の相関は全般に高く、異因子間の相関は低くや

明確なパターンを示すが、これは因子負荷を共通のものとした結果として一応当然であろう。

表8は、因子負荷が共通となる2.2(再掲)、2.4、2.6、4の各モデルの因子負荷を並べて示したものである。2.4の準3相因子分析は、因子負荷の絶対値がやや小さいものの、ほぼ同一の解釈となる。4の不変モデルについても同様である。一方、2.6の拡張されたPARAFACの因子負荷は、大筋においては同等であるものの、単純構造からはかなり遠く、Broad interestsが第II因子に最も高く負荷する等の違いが見られる。これはこのモデルで回転が許されないことの必然的な結果である。

準3相因子分析の核行列は、村上(1981)の表7とほぼ同一なのでここでは省略し、核行列から再現される因

子間共分散行列を表9に示す。(村上、1981の表8と同等のもの。ただしここでは相関行列への変換は行なわれず、第II因子と第III因子は入れかわっている。) 因子負荷の絶対値が小さい分を埋めあわせるように、異方法間の共分散は全体に大きくなっているが、示されているパターンはだいたい表6と一致している。

表10は、拡張されたPARAFACの因子間共分散行列である。下三角部分で値の記入してないところはこの方法では定義により0である。同因子間の共分散の値は表7の対応する要素と驚くほどよく一致しており、あてはまりが比較的良好なこともあわせて、このデータにはこのモデルが最良ということになるかもしれない。ただし、異方法間での異なる因子間の相関関係は、この方法

表8 共通の因子負荷を仮定するモデルにおける因子負荷行列(2)

モデル	2.2(回転後)			2.4(回転後)			2.6			4(回転後)		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1) Assertive	.81	-.33	.15	.68	-.27	.25	.86	.18	-.13	.64	-.33	.22
2) Cheerful	.18	-.36	.79	.18	-.19	.71	.58	-.23	.62	.12	-.34	.60
3) Serious	-.00	.85	.00	-.01	.73	-.05	-.44	.72	.22	.00	.67	.01
4) Unshakable poise	.14	.33	.80	.22	.40	.58	.22	.26	.80	.12	.15	.55
5) Broad Interests	.77	.37	.16	.68	.31	.15	.48	.72	.06	.66	.14	.09

表9 準3相因子分析(2.4)の因子得点間共分散行列(回転後)

	Staff ratings			Peer ratings			Self ratings		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Staff ratings									
I	1.05								
II	-.23	.95							
III	-.04	.04	1.31						
Peer ratings									
I	1.00	-.09	-.01	1.00					
II	-.19	.85	-.47	-.02	1.13				
III	.13	.18	.80	.17	-.13	.55			
Self ratings									
I	.85	-.45	-.00	.84	-.23	.08	.95		
II	-.10	.18	-.33	.05	.66	-.15	.24	.92	
III	-.49	-.17	.96	-.43	-.35	.47	-.13	.09	1.13

下三角部分のみを示す。

表10 拡張された PARAFAC (2.6) の因子得点間共分散行列

	Staff ratings			Peer ratings			Self ratings		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Staff ratings									
I	1.10								
II		.92							
III			1.08						
Peer ratings									
I	.83			1.02					
II		.43			1.05				
III			.24			.94			
Self ratings									
I	.58			.51			.88		
II		.10			.32			1.03	
III			.26			.05			.98

下三角部分のみを示す。定義により0となる値は省略した。

表11 共通因子得点モデル (3.1) の因子負荷

	I	II	III	IV
Staff ratings				
1) Assertive	.70	-.33	.25	.14
2) Cheerful	.23	-.12	.79	-.07
3) Serious	-.20	.71	-.03	-.06
4) Unshakable poise	.34	.36	.59	-.21
5) Broad interests	.70	.24	.03	-.16
Peer ratings				
1) Assertive	.77	-.17	.18	.06
2) Cheerful	.44	.03	.60	-.14
3) Serious	-.07	.70	-.30	.23
4) Unshakable poise	.25	.46	.09	.09
5) Broad interests	.68	.37	-.06	.08
Self ratings				
1) Assertive	.49	-.23	.32	.17
2) Cheerful	-.10	-.25	.64	.17
3) Serious	-.04	.30	-.20	.65
4) Unshakable poise	-.09	.09	.56	.59
5) Broad interests	.45	-.15	.06	.64

では知ることができない。

最後に3.1の共通因子得点モデルの因子負荷を表11に示す。今までの各モデルの因子負荷で言えば第II因子に相当するものが、第IIと第IIIの2つの因子にわかれてあらわれていることが読みとれるであろう。SelfにおけるSeriousが他の2方法のそれと一致しないことが、因子得点の変化(移行)として表現されているわけである。

以上の例全体を通じて、共通性の推定は全く行なわれていない。因子分析型のモデルではその導入は容易であり、今後の検討に値する。

実際の適用にあたっては、それぞれのモデルにおける因子数の決定等多くの問題がある。質問紙データにおいては因子数の決定は、解釈に重点をおいた試行錯誤的なものとならざるを得ないであろう。(最尤推定を用い、統計的基準が導入されたとしても、その点は変わらないと思われる。)実用上適切な解を得るためには、一般的なモデルから始めて、各段階で暫定的な判断を行ないながら徐々に範囲を絞ってゆくことになるであろう。

最後に本稿において取り扱った因子分析型モデル、すなわち相関行列に対して何らかの構造をあてはめるタイプのモデルと、いわゆる共分散構造分析の関係について触れておこう。Joreskogに始まる共分散構造分析は、今日に至るまで発展を続けており、ほとんどいかなる構造のモデルでも一般化最小2乗法あるいは最尤法による

パラメータ推定が可能になりつつある（例えば McDonald, 1980）。本稿でとりあげたような型のモデルは恐らくすべて、共分散構造分析によって扱うことが可能であろう。

しかしながら、本研究で述べた多くのアルゴリズムはその単純性と頑健性の故に、研究の探索的段階（質問紙調査で言えば、何項目かを何らかの手法で合成した尺度にまとめる以前に個別項目のまま入力するような事態を想定している。）においては価値をもつと考える。この点は最尤法の因子分析の出現によって主因子法が価値を失なったわけではないのと同様の事情にあると思われる。

文 献

- Baltes, P.B. & Nesselroade, J.R. 1973 The developmental analysis of individual differences on multiple measures. In J.R. Nesselroade & H.W. Reese (Eds.) *Life-span developmental Psychology: Methodological issues*. Academic Press Pp 219-251.
- Bentler, P.M. 1973 Assessment of Developmental factor change at the individual and growth level. In J.R. Nesselroade & H.W. Reese (Eds.) *Life-span Developmental psychology: Methodological issues*. New York: Academic Press. Pp 145 - 174.
- Campbell, D.T., & Fiske, D.W. 1959 Convergent and discriminant validation by multitrait-multimethod matrix. *Psychological Bulletin*, 56, 81-105.
- Carroll, J.D. & Arabie, P. 1980 Multidimensional scaling. *Annual Review of Psychology*, 31, 607 - 649.
- Carroll, J.D. & Chang, J.J. 1970 Analysis of individual differences in multidimensional scaling via N -way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika*, 35, 283 - 319.
- Cattell, R.B. 1944 Parallel proportional profiles" and other principles for determining the choice of factors by rotation. *Psychometrika*, 9, 267 - 283.
- Corballis, M.C. 1973 A factor model for analysing change. *The British Journal of Mathematical & Statistical psychology*, 26, 90 - 97.
- Corballis, M.C. & Traub, R.E. 1970 Longitudinal factor analysis. *Psychometrika*, 35, 79 - 98.
- Evans, G.T. 1967 Factor analytical, treatment of growth data. *Multivariate Behavioral Research*, 2, 109 - 134.
- Evans, G.T. 1971 Transformation of factor matrices to achieve congruence. *British Journal of Mathematical Psychology*, 24, 22 - 48.
- Haan, N. 1981 Common dimensions of personality development: Early adolescence to middle life. In D.H. Eichorn, J.A. Clausen, N. Haan, M.P. Honzik, P.H. Mussen, (Eds.) *Present and Past in Middle Life*. Academic Press. Pp. 117 - 151.
- Hakstian, A.R. 1973 Procedures for the factor analytic treatment of measures obtained on different occasions *British Journal of Mathematical and statistical Psychology*, 26, 219 - 239.
- Harman, H.H. & Jones, W.H. 1966 Factor analysis by minimizing residual (MINRES). *Psychometrika*, 31, 351 - 368.
- Harshman R.A. & Berenbaum, S.A. 1981 Basic concepts underlying the PARAFAC-CANDECOMP three-way factor analysis model and its application to longitudinal data. In D.H. Eichorn, J.A. Clausen, N. Haan, M.P. Honzik & P.H. Mussen (Eds.) *Present and Past in Middle Life*. Academic Press. Pp. 435 - 459.
- Gibson, W.A. 1960 Remarks on Tucker's inter-battery method of factor analysis. *Psychometrika*, 25, 19 - 25.
- Gibson, W.A. 1961 A retraction on inter-battery factor analysis. *Psychometrika*, 26, 451 - 452.
- Guttman, L.A. 1954 A new approach to factor analysis: In P.F. Lazarsfeld (Ed.) *Mathematical Thinking in the Social Sciences*. Free Press, Pp. 258 - 348.
- Guttman, L.A. 1981 What is not what in statistics. In I. Borg (Ed.), *Multidimensional Data Representations: When and Why*. Mathesis Press, Pp. 20 - 46.
- Jackson, D.N. 1969 Multimethod factor analysis in the evaluation of convergent and discriminant validity. *Psychological Bulletin*, 22, 30 - 49.
- Jackson, D.N. 1975 Multimethod factor analysis: A reformulation. *Multivariate Behavioral Research*, 10, 259 - 275.
- Jöreskog, K.G. 1970 A general method for analysis of covariance structures. *Biometrika*, 57, 239 - 251.

- Kaiser, H.F. 1958 The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, **23**, 187 - 200.
- Keller, J.B. 1962 Factorization of matrices by least squares. *Biometrika*, **49**, 239 - 242.
- Kendall, S.M. 1975 *Multivariate Analysis*, (2nd edition). Charles Griffin.
- 小嶋秀夫 1979 親子関係の心理 (一) ——親子関係把握の研究 児童心理, **33**, 938 - 955.
- Kristof, W. 1967 Orthogonal inter-battery factor analysis. *Psychometrika*, **32**, 199 - 227.
- Kroonenberg, P.M. & de Leeuw, J. 1977 TUCKALS2. A program for three-mode principal component analysis of three-mode data. Research Bulletin (R.B. 001-77), Department of Data Theory, University of Leiden.
- Kruskal, J.B. 1976 More factors than subjects, tests, and treatments: An indeterminacy theorem for Canonical Decomposition and individual difference scaling. *Psychometrika*, **41**, 281 - 293.
- McDonald, R.P. 1980 A simple comprehensive model for the analysis of covariance structure: Some remarks on applications. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **33**, 161 - 183.
- Meredith, W. & Tisak, J. 1982 Canonical analysis of longitudinal and repeated measures data with stationary weights. *Psychometrika*, **47**, 47 - 67.
- 村上 隆 1979 因子変化の記述と準3相因子分析 名古屋大学教育学部紀要——教育心理学科——, **26**, 1 - 16.
- 村上 隆 1981 最小2乗法による準3相因子分析のアルゴリズム 名古屋大学教育学部紀要——教育心理学科——, **28**, 39 - 59.
- 村上 隆 1982 共通性推定を含む準3相因子分析 第10回日本行動計量学会大会発表論文抄録集 58 - 59.
- Murakami, T. 1983 Quasi three-mode principal component analysis - A method for assessing the factor change -. *Behaviormetrika*, **14**, 29 - 50.
- 村上 隆・後藤宗理・辻本英夫 1978 3相因子分析の適用上の諸問題. 名古屋大学教育学部紀要——教育心理学科——, **25**, 19 - 39.
- Nesselroade, J.R. 1972 Note on the "longitudinal factor analysis" model. *Psychometrika*, **37**, 187 - 191.
- 野口裕之 1982 発達の解析論 波多野完治 (監修) ピアジェ派心理学の発展 I 国土社. Pp.173 - 211.
- 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 1983 情報量統計学 共立出版.
- Shiba, S. 1969 New estimates of factor scores. *Japanese Psychological Research*, **11**, 129 - 133.
- 芝 祐順 1975 行動科学における相関分析法(第2版) 東京大学出版会.
- 清水和秋・辻岡美延 1981 交叉相面的確認的因子分析法 関西大学社会学部紀要, **12**, 129 - 145.
- 高根芳雄 1980 多次元尺度法 東京大学出版会.
- Tucker, L.R. 1958 An inter-battery method of factor analysis. *Psychometrika*, **23**, 111 - 136.
- Tucker, L.R. 1963 Implication of factor analysis of three-way matrices for measurement of change. In C.W. Harris (ed.) *Problems of Measuring Change*. University of Wisconsin Press, Pp 122 - 137.
- Tucker, L. R. 1964 The extension of factor analysis to three dimensional matrices. In N. Frederiksen and H. Gulliksen (Eds.) *Contributions to mathematical psychology*. New York: Hold, Rinehart and Winston. Pp. 109 - 127.
- Tucker, L. R. 1966 Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, **31**, 279 - 311.
- Wrigley, C. & Neuhaus, J. 1955 The matching of two sets of factors. *American Psychologist*, **10**, 418 - 419.

(1983年7月31日 受稿)

METHODS FOR DESCRIPTION OF FACTOR CHANGE IN THREE-MODE DATA (I)
— FACTOR ANALYTICAL MODELS —

Takashi MURAKAMI

SUMMARY

This paper presents and compares several factor analytic models, some of which are new, dealing with three-mode data, especially longitudinal or multitrait-multimethod data. Consider the following factor equation for k th occasion:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{U}_k,$$

where \mathbf{Z}_k is the $N \times n$ matrix of standard scores on the variables, \mathbf{F}_k is the $N \times q$ matrix of factor scores, \mathbf{A}_k is the $n \times q$ matrix of factor loadings, and \mathbf{U}_k is the $N \times n$ matrix of unique scores. Under the appropriate assumptions, it is derived that

$$\mathbf{R}_{kk'} = \mathbf{A}_k \mathbf{S}_{kk'} \mathbf{A}_{k'}^T + \mathbf{\Delta}_{kk'},$$

where $\mathbf{R}_{kk'}$ is the matrix of inter variable correlations, $\mathbf{S}_{kk'}$ is the matrix of inter factor scores correlations (or covariances), and $\mathbf{\Delta}_{kk'}$ is the matrix of inter unique score covariances, respectively, between k th and k' th occasions. Various models can be formulated corresponding to the assumptions on \mathbf{A}_k and $\mathbf{S}_{kk'}$

Main models and their assumptions are as follows:

1.1 General model:

$$\mathbf{S}_{kk} = \mathbf{I}, k = 1, \dots, p.$$

1.3 Longitudinal factor analysis model (Corballis, 1973):

$$\mathbf{S}_{kk'} = \begin{cases} \mathbf{I} & k = k', \\ \mathbf{D}_{kk'} & k \neq k', \end{cases}$$

where $\mathbf{D}_{kk'}$ is the diagonal matrix.

1.4 Multimethod factor analysis model (Jackson, 1975):

$$\mathbf{S}_{kk'} = \mathbf{C}_k \mathbf{C}_{k'}^T; \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^T = \mathbf{I}, k = 1, \dots, p.$$

2.1 Common factor loading model:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \dots = \mathbf{A}_p; \frac{1}{p} \sum_k \mathbf{S}_{kk} = \mathbf{I},$$

2.2 Invariant factor loading model (Hakstian, 1973):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \dots = \mathbf{A}_p; \mathbf{S}_{kk} = \mathbf{I}, k = 1, \dots, p.$$

2.4 Quasi three-mode factor analysis model:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \dots = \mathbf{A}_p; \mathbf{S}_{kk'} = \mathbf{C}_k \mathbf{C}_{k'}^T; \frac{1}{p} \sum_k \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^T = \mathbf{I}$$

2.6 Extended PARAFAC model:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \dots = \mathbf{A}_p; \mathbf{S}_{kk'} = \mathbf{D}_{kk'}, k, k' = 1, \dots, p.$$

3.1 Common factor score model:

$$\mathbf{S}_{kk'} = \mathbf{I}, k, k' = 1, \dots, p.$$

4. Invariant model:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \dots = \mathbf{A}_p; \mathbf{S}_{kk'} = \mathbf{I}, k, k' = 1, \dots, p$$

Least squares algorithm which minimizes the quantity,

$$S^2 = \text{tr} \sum_k^p \sum_{k'}^p (\mathbf{R}_{kk'}^\dagger - \mathbf{A}_k \mathbf{S}_{kk'} \mathbf{A}_{k'}^\top)^\top (\mathbf{R}_{kk'}^\dagger - \mathbf{A}_k \mathbf{S}_{kk'} \mathbf{A}_{k'}^\top),$$

where $\mathbf{R}_{kk'}^\dagger$ is defined as

$$\mathbf{R}_{kk'}^\dagger = \mathbf{R}_{kk'} - \Delta_{kk'}$$

is formulated for each model.

Analysis of Kelly & Fiske's multitrait-multimethod matrix is attached as a numerical example, and the type of the factor change described by each model is discussed.