報告番	※ 第
–	–

主 論 文 の 要 旨

論文題目 An index theorem for Toeplitz operators on partitioned manifolds
(分割された多様体における Toeplitz 作用素の指数定理)

氏 名 瀬 戸 樹

論 文 内 容 の 要 旨

主論文の主定理として, 完備 Riemann 多様体に対する指数定理を得た. この主定理は, 本質的に奇数次元多様体に対する定理である J. Roe [6] (1988) や N. Higson [5] (1991) の指数定理 (Roe-Higson 指数定理と呼ぶ) の偶数次元における類似物である.

主定理を述べる前に Roe-Higson 指数定理について触れる. M を完備 Riemann 多様体, $C^*(M)$ を Roe 環とする [6]. 特に M がコンパクトと仮定すると, $C^*(M)$ はコンパクト作用素環 $\mathcal{K}$ と一致するので, $C^*(M)$ は $\mathcal{K}$ の一般化とみなすことができる. D を M 上の Dirac 作用素とする. Roe は [6] において, 閉多様体上の Dirac 作用素の Fredholm 指数の類似物として, K_1 群の元 $\mathrm{ind}(D) \in K_1(C^*(M))$ を定義した.

完備 Riemann 多様体 M と同次元の境界付き部分多様体 M^+, M^- が $M = M^+ \cup M^-$ かつ $M^+ \cap M^- = \partial M^+ = \partial M^-$ をみたすとする. $N = M^+ \cap M^-$ とすると, N は余次元 1 の部分多様体である. この N がコンパクトで境界のない多様体のとき, M が分割された多様体であるという. 例えば, $M = \mathbb{R} \times N$ には標準的な分割 $M = (\mathbb{R}_{\leq 0} \times N) \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times N)$ が定まる. 以下, M は分割された多様体とする. N 上には自然に Dirac 作用素 D_N が定まり, D_N は N の単位法ベクトル場を用いた $\mathbb{Z}_2$ 次数に関して odd な作用素となる. 今, odd 作用素 D_N を正の部分空間に制限した作用素 D_N^+ は楕円形微分作用素なので, N がコンパクトで境界のない多様体であることから D_N^+ は Fredholm 作用素である. Roe は M の分割から加法的写像 $\zeta_* : K_1(C^*(M)) \to \mathbb{C}$ を定義した. 写像 ζ_* は本質的に, 分割の情報から定まる巡回コサイクル ζ に作用素を代入することによって定義され, これは非可換幾何学における Connes のペアリング [3] と一致する. Roe-Higson 指数定理は, 次の公式である: $\zeta_*(\mathrm{ind}(D)) = (-8\pi i)^{-1}\mathrm{index}(D_N^+)$.

ところで, 奇数次元閉多様体上の楕円形微分作用素の Fredholm 指数は常に 0 であることが知られている [1, Proposition 9.2]. 特に $\mathrm{index}(D_N^+) = 0$ であるから, 偶数次元多様体 M に対しては常に $\zeta_*(\mathrm{ind}(D)) = 0$ である. 一方で, 一般の $x \in K_1(C^*(M))$ に対し, $\zeta_*(x)$ は 0 とは限らない.

主論文では, N 上の作用素として Toeplitz 作用素を用いることで, $\zeta_*(x)$ の値を調べた. 具体的には, $x \in K_1(C^*(M))$ として $\mathrm{ind}(D)$ の代わりに $\mathrm{Ind}(\phi, D) = [\phi]\hat{\otimes}[D]$ を用い, $\mathrm{index}(D_N^+)$ の代わりに Toeplitz 作用素 $T_{\phi|_N}$ の Fredholm 指数を用いた.

	主定理	Roe-Higson 指数定理
$\dim M$	偶数	奇数
$K_1(C^*(M))$ の元	$\mathrm{Ind}(\phi, D)$	$\mathrm{ind}(D)$
N 上の作用素	Toeplitz 作用素 $T_{\phi\|_N}$	Dirac 作用素 D_N^+

$\mathrm{Ind}(\phi, D)$ と $T_{\phi|_N}$ は次のように定義する. まず, $C_w(M)$ を, 滑らかで有界な M 上の関数であって, 勾配ベクトル場も有界であるような関数全体によって生成される C^* 環と定義する. このとき, $\mathbb{Z}_2$ 次数 ϵ について odd な M 上の Dirac 作用素 D は KK 群の元 $[D] \in KK^0(C_w(M), C^*(M))$ を定める. 一方で, $\phi \in GL_l(C_w(M))$ は $[\phi] \in K_1(C_w(M))$ を定める. このとき, Kasparov 積

$$\hat{\otimes} : K_1(C_w(M)) \times KK^0(C_w(M), C^*(M)) \to K_1(C^*(M))$$

を用いて $\mathrm{Ind}(\phi, D) = [\phi]\hat{\otimes}[D] \in K_1(C^*(M))$ と定義する．この元は，P. Baum と R. G. Douglas [2] による閉多様体上の Toeplitz 作用素の Fredholm 指数の一般化とみなすことができ，$\mathcal{D} = (D+\epsilon)(D^2+1)^{-1/2}$ を用いて具体的に

$$\mathrm{Ind}(\phi, D) = \left[\mathcal{D}\begin{bmatrix}\phi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathcal{D}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \phi^{-1}\end{bmatrix}\right] \in K_1(C^*(M))$$

と表わせる．Toeplitz 作用素 $T_{\phi|_N}$ は次のように定義する．N 上には自然に Dirac 作用素が定まるので，その非負固有ベクトルによって生成される部分空間を H_+ と書く．ϕ の N 上への制限 $\phi|_N$ は N 上の $GL_l(\mathbb{C})$ 値連続関数である．$\phi|_N$ の掛け算作用素を H_+ への射影 P で切り落とすことによって Toeplitz 作用素 $T_{\phi|_N}$ を定める: $T_{\phi|_N} := P\phi|_N P^* : H_+^l \to H_+^l$．この $T_{\phi|_N}$ は，$GL_l(\mathbb{C})$ 値であることから Fredholm 作用素である．主定理は次である．

主定理　次の公式が成り立つ: $\zeta_*(\mathrm{Ind}(\phi, D)) = (-8\pi i)^{-1}\mathrm{index}(T_{\phi|_N})$．

証明で最も重要なステップは，$M = \mathbb{R} \times N$, $\phi = 1 \otimes \psi$, $\psi \in C^\infty(N; GL_l(\mathbb{C}))$ の場合の証明である．その証明には，Fredholm 作用素のホモトピーによる変形と Fourier 変換を用い，最後に Hilbert 変換の固有ベクトルを用いる．

主定理と Roe-Higson 指数定理は，懸垂同型を用いると次のような“形式的な”関係がある．偶数次元多様体 M 上の Dirac 作用素 D は $[[D]] \in KK^0(C_0(M), \mathbb{C})$ を定め，$\phi \in GL_l(C_0(M))$ に対し $[[\phi]] \otimes [[D]] \in KK^1(C_0(M), \mathbb{C})$ を得る．すると，一点に潰す写像から誘導される写像 $e : KK^0(C(N), \mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$ と懸垂同型 $\sigma : KK^1(C_0(M), \mathbb{C}) \to KK^0(C(N), \mathbb{C})$ によって $e(\sigma([[\phi]] \otimes [[D]])) = \mathrm{index}(T_{\phi|_N})$ を得る．一方で，Roe-Higson 指数定理により，任意の $x \in KK^1(C_0(M), \mathbb{C})$ に対して $\zeta_*(A(x)) = e(\sigma(x))$ である．ここで，$A : KK^1(C_0(M), \mathbb{C}) \to K_1(C^*(M))$ は Roe の定義した $\mathrm{ind}(D) \in K_1(C^*(M))$ を与える写像で，組み立て写像 (assembly map) と呼ばれている．したがって，$\zeta_*(A([[\phi]] \otimes [[D]])) = \mathrm{index}(T_{\phi|_N})$ という主定理と同じ形の公式を得る．

ところが，ϕ は M のコンパクト集合の外で定数となる関数なので，$\phi|_N$ は定数関数と $GL_l(C(N))$ 内でホモトピックである．ゆえに右辺は 0 である．したがって，非自明な指数を得るためには $C_0(M)$ より大きい C^* 環を用いる必要がある．このとき，懸垂同型を用いた議論は使えない．

そのような C^* 環として Higson 環 $C_h(M)$ [5] が候補に挙がる．$C_h(M)$ は N. Higson が Roe の指数定理を K ホモロジーを用いて証明するために導入した C^* 環で，勾配ベクトル場が無限遠で消えるような滑らかで有界な関数によって生成される C^* 環である．しかし，例えば $x \in N = S^1$ に対し $\psi(x) = e^{ix}$ と定義すると，$1 \otimes \psi \notin C_h(\mathbb{R} \times S^1)$ であるので，主定理を証明するためには Higson 環では不十分である．一方で任意の $\psi \in C^\infty(N)$ に対して $1 \otimes \psi \in C_w(\mathbb{R} \times N)$ である．また，$C_w(M)$ は $[D] \in KK^0(A, C^*(M))$ を定義できる C^* 環 A のうちで最大のものである．これらのことは，主定理において $C_w(M)$ という C^* 環を導入する意義を述べている．

参考文献

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. III. *Ann. of Math. (2)*, 87:546–604, 1968.

[2] Paul Baum and Ronald G. Douglas. *K* homology and index theory. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, volume 38 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 117–173. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[3] Alain Connes. Noncommutative differential geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (62):257–360, 1985.

[4] Nigel Higson. On the relative *K*-homology theory of Baum and Douglas. preprint, 1990.

[5] Nigel Higson. A note on the cobordism invariance of the index. *Topology*, 30(3):439–443, 1991.

[6] John Roe. Partitioning noncompact manifolds and the dual Toeplitz problem. In *Operator algebras and applications, Vol. 1*, volume 135 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 187–228. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.